Theoretische Physik: Elektrodynamik
Übungsblatt 5

Vorlesung: Matthias Kleinmann   Übungen: Cornelia Spee, Michael Gaida, Jonathan Steinberg
Vorlesung: Di. 10–12 (D308) und Fr. 10–12 (D308)
Übungen: Fr. 8:30–10:00 (D115, B030)

Zu bearbeiten bis 14.05.2019

1. Greensfunktion der Poisson-Gleichung [2+2+2 Punkte]

In der Vorlesung haben Sie die Greensfunktion als ein nützliches Werkzeug zum Lösen der Poissongleichung mit Randbedingungen kennengelernt. In dieser Aufgabe geht es darum, die Greensfunktion der (dimensionslosen) Poissongleichung in einer, zwei und drei Dimensionen herzuleiten. (Formal suchen wir die Greensfunktion unter der Randbedingung $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0$ für $|\boldsymbol{r}| \to \infty$.)

(i) Dimension $d = 1$:
Zeigen Sie, dass die δ-Distribution formal durch

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sgn}(x), \qquad \text{mit } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases} \tag{1}$$

dargestellt werden kann und lösen Sie hiermit die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x'^2} G(x, x') = -\delta(x - x'). \tag{2}$$

(ii) Dimension $d = 2$:
Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $\Delta_{\boldsymbol{r}'} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ in Polarkoordinaten. Gehen Sie dabei vom Ansatz $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = G(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)$ aus, der durch die Translations- und Rotationsinvarianz des Laplace-Operators nahe liegt. Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten lautet

$$\Delta_{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \tag{3}$$

(iii) Dimension $d = 3$:
Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $\Delta_{\boldsymbol{r}'} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ in Kugelkoordinaten. Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten lautet

$$\Delta_{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \tag{4}$$

2. Elektrostatisches Randwertproblem 2 [2+1+3+2+3 Punkte]

Wir betrachten eine Punktladung q bei $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}$ und eine leitende, geerdete Kugel mit Radius $a < |\boldsymbol{s}| \equiv s$ bei $\boldsymbol{r} = 0$.

(i) Überprüfen Sie, dass

$$\Phi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}|} - \frac{a}{s|\boldsymbol{r} - \frac{a^2}{s^2}\boldsymbol{s}|}\right) \tag{5}$$

die Lösung für das Potenzial außerhalb der Kugel ist und auch die Randbedingungen erfüllt.

(ii) Bestimmen Sie aus der obigen Lösung die Greensfunktion für das Randwertproblem.

Bitte wenden!

(iii) Berechnen Sie die auf der Oberfläche induzierte Flächenladungsdichte σ.

(iv) Betrachten Sie nun eine leitende, isolierte Kugel mit fester Gesamtladung Q. Zeigen Sie, dass dann für das Gesamtpotenzial außerhalb der Kugel gilt:

$$\Phi_Q(\boldsymbol{r}) = \Phi_0(\boldsymbol{r}) + \frac{sQ + aq}{4\pi\epsilon_0\, s|\boldsymbol{r}|} \tag{6}$$

(v) Bestimmen Sie für die isolierte Kugel die auf die Punktladung q wirkende Kraft und diskutieren Sie die Fälle $s \gg a$ und $s \approx a$.

3. Sphärische Multipolentwicklung [4 Punkte]

Das Potenzial einer Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r}')$ entwickelt nach Kugelflächenfunktionen lautet:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}, \tag{7}$$

wobei

$$q_{lm} = \int d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')(r')^l Y_{lm}^*(\theta',\phi'). \tag{8}$$

Des Weiteren gilt für die Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} Q_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right). \tag{9}$$

Zeigen Sie, wie die kartesischen Komponenten der Multipolmomente q, $\boldsymbol{p}$ und $Q_{i,j}$ und die sphärischen Multipolmomenten q_{lm}, für $l = 0, 1, 2$ in Zusammenhang stehen.