

Theoretische Physik: Elektrodynamik

Übungsblatt 3

Vorlesung: Matthias Kleinmann Übungen: Cornelia Spee, Michael Gaida, Jonathan Steinberg
Vorlesung: Di. 10-12 (D308) und Fr. 10-12 (D308)
Übungen: Fr. 8-10 (D115, B030)

Zu bearbeiten bis 30.04.2019

1. Quadrupoltensor einer achsensymmetrischen Ladungsverteilung [2+3+3 Punkte]

Eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ besitzt eine axiale Symmetrie um die z-Achse.

- (i) Zeigen Sie, dass der Quadrupoltensor diagonal ist.
- (ii) Verifizieren Sie: $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz}$.
- (iii) Berechnen Sie das Potential und die elektrische Feldstärke des Quadrupols als Funktion von Q_{zz} .

2. Potential und Feld eines Dipols [2+3+1+3 Punkte]

Zwei Punktladungen $+q$ und $-q$ befinden sich im Abstand a zueinander.

- (i) Zeigen Sie, dass das Potential für große Abstände vom Dipol, $|\mathbf{r}| \gg a$, wie folgt gegeben ist:

$$\phi(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3},$$

wobei $\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3r$ das Dipolmoment der Ladungsverteilung ist.

- (ii) Geben Sie das elektrische Potential in Kugelkoordinaten an und berechnen Sie daraus das elektrische Feld in Kugelkoordinaten.
- (iii) Skizzieren Sie Potential und Feld.
- (iv) Vergleichen Sie das Ergebnis für das elektrische Feld in Kugelkoordinaten mit der koordinatensystemunabhängigen Formel für das Dipolfeld,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^5}.$$

3. Mittelwertsatz der Potenzialtheorie [2+2 Punkte]

Der Mittelwertsatz der Potenzialtheorie bezieht sich auf harmonische Funktionen, d. h. Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0$, und besagt Folgendes:

Der Wert $\phi(\mathbf{r})$ einer harmonischen Funktion im Punkt \mathbf{r} ist gleich ihrem Mittelwert über die Fläche F_K einer beliebigen Kugel vom Radius R um \mathbf{r} ,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{F_K} \phi(\mathbf{r}') df'. \quad (1)$$

Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Potenzialtheorie, um Folgendes zu zeigen:

- (i) Zeigen Sie, dass es für eine Punktladung in einem nicht identisch verschwindenden elektrostatischen Vakuumfeld keine stabile Gleichgewichtslage gibt.
- (ii) Der räumliche Mittelwert des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ über das Innere einer Kugel K vom Radius R (mit Volumen V) um den Punkt \mathbf{r}_0 ist gegeben durch

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{V} \int_K \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3r. \quad (2)$$

Zeigen Sie für den Fall, dass $\rho(\mathbf{r}) \equiv 0$ in K , gilt $\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$.