Theoretische Physik: Elektrodynamik
Übungsblatt 2

Vorlesung: Matthias Kleinmann Übungen: Cornelia Spee, Michael Gaida, Jonathan Steinberg
Vorlesung: Di. 10–12 (D308) und Fr. 10–12 (D308)
Übungen: Fr. 8:30–10:00 (D115, B030)

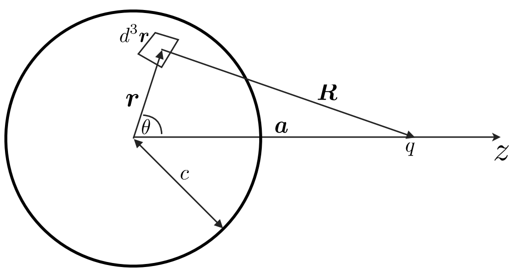
Zu bearbeiten bis 23.04.2019

1. Coulombkraft I [1+4+1+2 Punkte]

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass die Coulombkraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 durch

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3},$$

mit dem Verbindungsvektor $\boldsymbol{r}$, gegeben ist. Im Folgenden betrachten wir eine homogen geladene Kugel, mit Gesamtladung Q und Radius c, dessen Mittelpunkt sich im Abstand a zu einer Punktladung q befindet.



(i) Geben Sie formal das infinitesimale Kraftelement $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ an, welches von der Ladung $\mathrm{d}Q = \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3r$ in einem Volumenelement d^3r der Kugel auf q ausgeübt wird, wobei $\rho(\boldsymbol{r})$ die Ladungsdichte der Kugel bezeichnet.

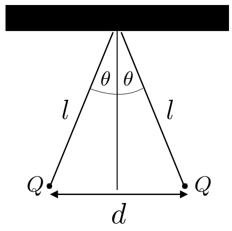
(ii) Berechnen Sie durch Integration über das Kugelvolumen (also durch Ausnutzung des Superpositionsprinzips) die gesamte auf q wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$, für $a > c$.
Hinweis: Führen Sie zunächst Kugelkoordinaten ein und legen die z-Achse in Richtung von $\boldsymbol{a}$. Die Integration über θ vereinfacht sich, wenn man R als Integrationsvariable einführt. Erinnern Sie sich an den Kosinussatz $R^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)$.

(iii) Interpretieren Sie das Ergebnis. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Ladungsdichte vom Abstand $|\boldsymbol{r}|$ zum Kugelmittelpunkt abhängt?

(iv) Wie lautet die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}$ im Fall $a < c$? An welcher Stelle ändert sich die Rechnung aus Aufgabenteil (ii)?

2. Coulombkraft II [6 Punkte]

Zwei punktförmige Körper der Masse m seien an zwei (masselosen) Fäden der Länge l in unmittelbarer Nähe voneinander aufgehängt.



Wenn beide Körper mit der gleichen Ladung Q aufgeladen werden, stoßen sich die Körper ab. Berechnen Sie den Winkel θ, unter dem sich dabei das mechanische Gleichgewicht einstellt.
Hinweis: Verwenden Sie die Cardanische Formel um die Nullstellen der auftretenden kubischen Gleichung zu bestimmen.

3. **Zerlegungssatz für Vektorfelder** [3 Punkte]

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ nicht die allgemeinste Lösung der Gleichung $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ ist, wenn $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ für $|r| \to \infty$ nicht verschwindet.
Hinweis: Verwenden Sie z.B. den Ansatz $u(x, y, z) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c_{i,j,k} x^i y^j z^k$ für die Laplace Gleichung $\Delta u = 0$.

4. **Multipolentwicklung** [6 Punkte]

Die Multipolentwicklung des elektrischen Potentials ϕ (bis zur zweiten Ordnung) lautet:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\boldsymbol{r}|} + \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{r}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{i,j} \frac{r_i r_j}{|\boldsymbol{r}|^5} + \dots \right),$$

wobei $q = \int \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}^3 r$ die Gesamtladung, $\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r} \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}^3 r$ das Dipolmoment, und

$$Q_{i,j} = \int \rho(\boldsymbol{r})(3 r_i r_j - |\boldsymbol{r}|^2 \delta_{i,j}) \mathrm{d}^3 r$$

die Komponenten des Quadrupoltensors bezeichnen.

Gegeben sei nun eine Hohlkugel mit Radius R welche die Ladungsverteilung

$$\rho(\boldsymbol{r}) = a_0 \cos(\theta)^2 \delta(r - R).$$

trägt. Berechnen Sie die Gesamtladung, das Dipolmoment und die Komponenten des Quadrupoltensors.