

Theoretische Physik: Elektrodynamik

Übungsblatt 10

Vorlesung: Matthias Kleinmann Übungen: Cornelia Spee, Michael Gaida, Jonathan Steinberg
Vorlesung: Di. 10–12 (D308) und Fr. 10–12 (D308)
Übungen: Fr. 8:30–10:00 (D115, B030)

Zu bearbeiten bis 25.06.2019

1. Komplexe und reelle Darstellung von Wellenfunktionen [2+2+2 Punkte]

Elektromagnetischen Felder werden aus mathematischer Zweckmäßigkeit oft als komplex angesetzt. Dies ist erlaubt, da die linearen Operationen der relevanten Differenzialgleichungen Real- und Imaginärteile nicht mischen, sodass man den Übergang zum physikalischen Resultat (Realteil) erst ganz zum Schluss vollziehen muss. Bei der Energiedichte $w(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t))$ und der Energiestromdichte $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ handelt es sich jedoch um nichtlineare Ausdrücke für die man von Anfang an reell rechnen muss. Betrachten wir nun elektromagnetische Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu_0\mu_r\mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

- (i) Berechnen Sie das Zeitmittel $\overline{w(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} w(\mathbf{r}, t') dt'$, wobei $\tau = 2\pi/\omega$ einer charakteristischen Periode entspricht. Benutzen Sie die komplexen Ansätze (1) und (2).
- (ii) Berechnen Sie nun $\overline{w(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} w(\mathbf{r}, t') dt'$, unter Verwendung der Realteile der Felder (1) und (2).
- (iii) Berechnen Sie außerdem $\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t') dt'$, unter Verwendung der Realteile der Felder (1) und (2).

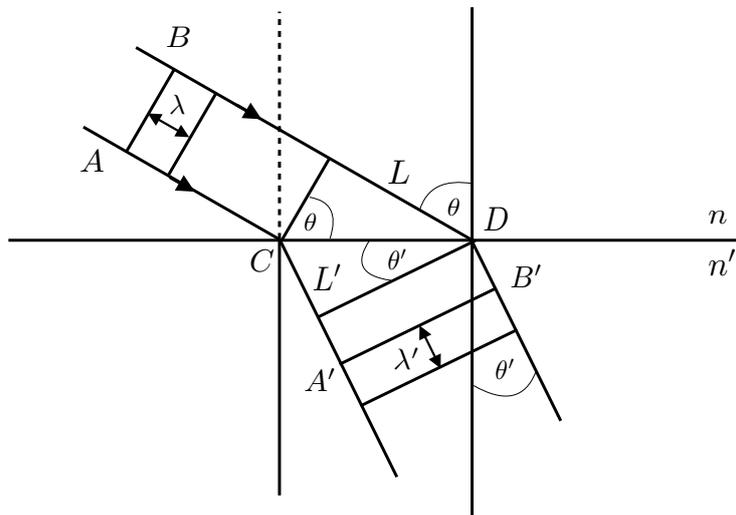
2. Elektromagnetische Wellen im Isolator [1+2+2+2+2+2 Punkte]

In einem linearen, isotropen, ungeladenen Isolator (ϵ_r, μ_r) sei die magnetische Induktion durch $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ mit $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = (\alpha\mathbf{e}_x + i\gamma\mathbf{e}_y)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ und $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ gegeben. $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ sei eine Lösung der Maxwell-Gleichungen.

- (i) Löst $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ auch die homogene Wellengleichung?
- (ii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen k und ω ?
- (iii) Bestimmen Sie die Richtung des Wellenvektors \mathbf{k} .
- (iv) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$.
- (v) Drücken Sie die zeitgemittelte Energiedichte $\overline{w(\mathbf{r}, t)}$ des elektromagnetischen Feldes als Funktion von α und γ aus.
- (vi) Berechnen Sie die zeitgemittelte Energiestromdichte $\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)}$ als Funktion von α und γ . Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)}$ und $\overline{w(\mathbf{r}, t)}$?

Bitte wenden!

3. Brechungsgesetz [2 Punkte]



Eine ebene Welle (Frequenz ω) fällt auf die (ebene) Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den (unterschiedlichen) Brechungsindizes n und n' . Sie habe in den Punkten A und B dieselbe Phase. Leiten Sie aus der Forderung, dass die Phase auch in den Punkten A' und B' gleich ist, das Brechungsgesetz ab.