Theoretische Physik: Elektrodynamik
Übungsblatt 1

Vorlesung: Matthias Kleinmann Übungen: Cornelia Spee, Michael Gaida, Jonathan Steinberg
Vorlesung: Di. 10-12 (D308) und Fr. 10-12 (D308)
Übungen: Fr. 8-10 (D115, B030)

Zu bearbeiten bis 09.04.2019

1. Delta-Funktion [3+3+3+1 Punkte]

Die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $F(x)$, die für $|x| \to \infty$ nach oben und unten beschränkt sind, bezeichnen wir als Testfunktionen. Es sei nun $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Folge von Testfunktionen mit $\lim_{|x|\to\infty} f_n(x) = 0$, für die der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx \tag{1}$$

für alle Testfunktionen $F(x)$ existiert.

Eine verallgemeinerte Funktion $f(x)$ ist dann durch den Grenzwert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x) \tag{2}$$

definiert.

(i) Zeigen Sie, dass die Folge von Testfunktionen $\delta_n(x) := \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$, mit $n = 1, 2, \ldots$, eine verallgemeinerte Funktion $\delta(x)$ definiert, für die gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx = F(0). \tag{3}$$

Die verallgemeinerte Funktion $\delta(x)$ heißt Delta-Funktion oder Delta-Distribution.

(ii) Die Funktion $h(x)$ habe eine einzige einfache Nullstelle bei x_0. Zeigen Sie, dass dann folgende Relation für die Delta-Distribution gilt:

$$\delta(h(x)) = \frac{1}{|h'(x_0)|} \delta(x - x_0). \tag{4}$$

Wie sieht Gleichung (4) aus, wenn $h(x)$ mehrere einfache Nullstellen hat.

(iii) Zeigen Sie, dass auf einem unbeschränkten Intervall die Delta-Distribution durch ein Fourier-Integral dargestellt werden kann:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} du. \tag{5}$$

Tipp: Verwenden Sie die Fourier-Transformation:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(k)e^{iku} dk, \quad c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iku} du. \tag{6}$$

(iv) In drei Dimensionen ist die Delta-Funktion durch $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ definiert. Geben Sie $\delta(\boldsymbol{r})$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an. Tipp: Transformieren Sie das Integral in $\int_V \delta(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = 1$.

2. Divergenz und Rotation [3+3 Punkte]

Zeigen Sie, dass in kartesischen Koordinaten für die Divergenz und die Rotation Folgendes gilt:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}, \tag{7}$$

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{u}) = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z = \nabla \times \boldsymbol{u}, \tag{8}$$

mit dem Nabla-Operator $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^{\mathrm{T}}$. Verwenden Sie die in der Vorlesung eingeführten Definitionen von Divergenz und Rotation:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{F = \partial V} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{F}, \tag{9}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathrm{rot}(\boldsymbol{u}) = \lim_{F \to 0} \frac{1}{F} \oint_{C = \partial F} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}, \tag{10}$$

wobei jeweils $F = \partial V$ die begrenzende Oberfläche des Volumens V, $C = \partial F$ die geschlossene Randkurve des Flächeninhalts F, und $\hat{\boldsymbol{n}}$ den Normalenvektor der Fläche F bezeichnen.