Theoretische Physik: Elektrodynamik
Präsenzübungen

Vorlesung: Matthias Kleinmann   Übungen: Cornelia Spee, Michael Gaida, Jonathan Steinberg
Vorlesung: Di. 10-12 (D308) und Fr. 10-12 (D308)
Übungen: Fr. 8-10 (D115, B030)

Zu bearbeiten am 05.04.2019

1. Satz von Stokes

Verifizieren Sie den Satz von Stokes:

$$\oint_{\partial F} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_F (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{F} \tag{1}$$

für das Vektorfeld:

$$\boldsymbol{A} = (4x/3 - 2y)\boldsymbol{e}_x + (3y - x)\boldsymbol{e}_y, \tag{2}$$

und die Fläche

$$F = \{\boldsymbol{r} | (x/3)^2 + (y/2)^2 \leq 1, z = 0\}. \tag{3}$$

2. Satz von Gauß

Verifizieren Sie den Satz von Gauß:

$$\oint_{F=\partial V} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{F} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) dV \tag{4}$$

für das Vektorfeld:

$$\boldsymbol{A} = ax\boldsymbol{e}_x + by\boldsymbol{e}_y + cz\boldsymbol{e}_z, \tag{5}$$

und das Volumen

$$V = \{\boldsymbol{r} | x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}. \tag{6}$$

3. Rechnen mit Gradient, Divergenz und Rotation

Für beliebige Funktionen $\phi(\boldsymbol{r})$, $\psi(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ gelten folgende Relationen:

$$\nabla(\phi\,\psi) = \phi\,\nabla\psi + \psi\,\nabla\phi, \tag{7}$$
$$\nabla \cdot (\phi\,\boldsymbol{u}) = \phi\,\nabla \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\phi, \tag{8}$$
$$\nabla \times (\phi\,\boldsymbol{u}) = \phi\,\nabla \times \boldsymbol{u} + \nabla\phi \times \boldsymbol{u}, \tag{9}$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}), \tag{10}$$
$$\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{u}), \tag{11}$$
$$\nabla(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) \tag{12}$$

wobei der Nabla-Operators durch $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^{\mathrm{T}}$ gegeben ist. Mit dem Nabla-Operator gelten für Gradient, Divergenz und Rotation fogende Relationen $\nabla\phi = \operatorname{grad}\phi$, $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \operatorname{div}\boldsymbol{u}$ und $\nabla \times \boldsymbol{u} = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}$. Verifizieren Sie (7) und (10). Zeigen Sie außerdem, dass für beliebiges ϕ bzw. $\boldsymbol{u}$ gilt:

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \tag{13}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) = 0. \tag{14}$$