Statistische Physik
Übungsblatt 9

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Florian Köppen, Tobias Moroder, Fr 8–10, Raum: D120

Abgabe: Fr, 21. Juni 2013

1. **Adiabatik** (6 Punkte)
   Ein thermisch isoliertes System erfüllt die Gleichung

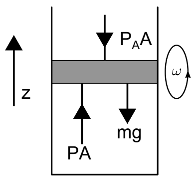
$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = (1-\gamma)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P, \tag{1}$$

   wobei $\gamma = C_P/C_V$ der adiabatische Exponent und C_P sowie C_V die entsprechenden Wärmekapazitäten bei konstantem Druck bzw. Volumen seien. Die partielle Ableitung $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$ kann typischerweise aus der gegebenen Zustandsgleichung berechnet werden.

   (a) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) gilt.

   (b) Finden Sie eine Lösung $T(V)$ dieser Differentialgleichung für den Fall des idealen Gases mit der Zustandsgleichung $PV = k_B NT$.

   (c) Nun möchten wir uns der Messung des adiabatischen Exponents zuwenden: Betrachten Sie dazu ein ideales Gas, welches durch einen Stempel der Masse m und Fläche A in einem Container gehalten wird. Der Stempel wirkt auf das Gas durch seine Schwerkraft mg und durch den Atmosphärendruck P_A auf das Gas, während das Gas durch seinen Druck P dem entgegenwirkt. Im Gleichgewichtszustand, in dem sich diese Kräfte kompensieren, nimmt das Gas das Volumen V_0 ein Daraus können Sie nun den Druck des Gases P_0 im Gleichgewicht bestimmen. Der Stempel wird nun angestoßen, so dass er mit der Kreisfrequenz ω um seine Ruhelage schwingt; diese Oszillationen können als adiabatisch angenommen werden. Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für die Position des Stempels z (durch eine Approximation erster Ordnung), um daraus die Verknüpfung zwischen den messbaren Größen $\omega, m, V_0, A, P_A, g$ und dem adiabatischen Exponent γ zu bekommen.



2. **Stirling-Formel** (5 Punkte)
   Es gibt viele Wege, die stirlingsche Näherung für $\log(n!)$ herzuleiten. Hier sollen Sie nun einen nachvollziehen:

   (a) Zunächst die Γ-Funktion: Zeigen Sie, dass $n! = \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t} dt$.
   Hinweis: Man kann z.B. den Umweg über $(-\partial/\partial\zeta)^n \int \mathrm{e}^{-\zeta t} dt$ gehen.

   (b) Zeigen Sie durch eine geschickte Umparametrisierung von t, dass gilt:

$$n! = n^n\, \mathrm{e}^{-n} R_n, \text{ wobei } R_n = n \int_{-1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n[t-\log(1+t)]}\, dt.$$

   (c) Zerlegen Sie nun den Integranden in R_n in ein Produkt der Form $\mathrm{e}^{-t^2 n/2}\mathrm{e}^{\cdots}$ und entwickeln Sie den zweiten Term bis einschließlich t^4. Das erlaubt es, die Integration durchzuführen — nähern Sie hierbei Integrale auf $[-\sqrt{n/2}, \sqrt{n/2}]$ durch Integrale auf $]-\infty, \infty[$.

   (d) Die ersten Terme der Stirling-Formel lauten

$$\log(n!) = n \log n - n + \tfrac{1}{2}\log(2\pi n) + \mathcal{O}(n^x).$$

   Bestätigen Sie diese Formel und bestimmen Sie x.