

Statistische Physik

Übungsblatt 6

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Florian Köppen, Tobias Moroder

Abgabe: Fr, 31. Mai 2013

1. Ising-Wechselwirkung (6 Punkte)

Betrachten Sie eine lineare Kette von N Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen. Jeder einzelne Spin kann sich parallel oder anti-parallel bezüglich eines Magnetfelds ausrichten, *i.e.*,

$$S_z^{(i)} |\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\rangle = \sigma_i |\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\rangle \quad (1)$$

mit $\sigma_i = \pm \frac{1}{2}$. Eine plötzliche Einstellung der Spins kann nur durch eine entsprechende Wechselwirkung auftreten. Im Folgenden betrachten wir die Ising-Wechselwirkung, welche durch

$$H = - \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i S_z^{(i)} S_z^{(i+1)} \quad (2)$$

beschrieben wird.

- Wie viele verschiedene Mikrozustände besitzt das System, wenn die Zahl der Spins auf N fixiert ist? Drücken Sie die Zustandssumme Z_N als Funktion der Mikrozustände aus.
- Betrachten Sie nun den Fall, dass die lineare Kette um ein Teilchen erweitert wird. Leiten Sie eine Rekursionsformel der Art $Z_{N+1} = f(Z_N)$ für die Zustandssumme ab.
- Bestimmen Sie Z_N mithilfe der zuvor ermittelten Rekursionsformel und $Z_1 = 2$.
- Berechnen Sie damit die Korrelationsfunktion $\langle S_z^{(i)} S_z^{(i+1)} \rangle$.

2. Druck-Ensemble (5 Punkte)

Das großkanonische Ensemble beschreibt die Situation fluktuierender Teilchenzahlen bei konstantem Volumen. Hier wollen wir den entgegengesetzten Fall betrachten, also den Fall eines fluktuierenden Volumens bei konstanter Teilchenzahl. Die Zustandssumme dieses Druck-Ensembles ist

$$Z_p = \sum_i \exp[-\beta(E_i + pV_i)], \quad (3)$$

wobei über alle möglichen Mikrozustände der Energie E_i und des Volumens V_i summiert wird. Das mittlere Volumen wird nun durch den Druck p kontrolliert.

Als Beispiel betrachten Sie ein lineares Molekül, welches von N gleichen Bausteinen aufgebaut wird. Jeder dieser Bausteine kann zwei verschiedene Längen a und b einnehmen, wobei $a > b > 0$. Die beiden Längen korrespondieren hierbei zu verschiedenen Energieeigenwerten E_a und E_b mit $E_b > E_a > 0$.

- Bestimmen Sie die Zustandssumme für das System mit Druck p und Temperatur T .
- Geben Sie die mittlere Gesamtlänge $\langle L \rangle$ als Funktion des Drucks p an. (*Hinweis:* Gehen Sie analog zur Berechnung von $\langle N \rangle$ beim großkanonischen Ensemble vor.)
- Welche Gesamtlänge ergibt sich für die Fälle $T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow \infty$?