Statistische Physik
Übungsblatt 4

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Florian Köppen, Tobias Moroder

Abgabe: Fr, 10. Mai 2013

1. **Paramagnetismus** (7 Punkte)

   In dieser Aufgabe wollen wir uns ausführlich dem Spin-1/2-Paramagneten widmen. Betrachten Sie dazu ein System von N Spin-1/2-Teilchen in einem externen Magnetfeld $\vec{B} = B\hat{e}_z$. Jedes einzelne Teilchen i besitzt ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_i$, welches beschrieben wird durch

   $$\vec{\mu}_i = g\mu_B \left(\frac{1}{\hbar}\vec{S}_i\right) = \frac{g\mu}{2}\vec{\sigma}_i, \tag{1}$$

   mit dem Landé Faktor $g > 0$, dem Bohrschen Magneton μ_B und dem Spinoperator $\vec{S}_i = \hbar/2\vec{\sigma}_i$.

   (a) Wird die Wechselwirkung zwischen den Spins und anderen Freiheitsgraden vernachlässigt, ist die Energie des Systems durch den Einteilchen-Hamiltonoperator $H = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\mu}_i \cdot \vec{B}$ gegeben. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und Energieeigenzustände des Systems.

   (b) Im kanonischen Ensemble sind sowohl die Teilchenzahl N als auch das Magnetfeld B exakte Vorgaben, während für die innere Energie nur der Mittelwert $\langle H \rangle = U$ vorgegeben ist. Dieser wird durch den Lagrangeparameter $\beta = 1/kT$ kontrolliert (warum es sich bei T um die Temperatur handeln muss, erfahren Sie noch in der Vorlesung). Bestimmen Sie die Zustandssumme $Z(T, B, N)$ und den Dichteoperator des Gleichgewichtzustands $\varrho(T, B, N)$.

   (c) Berechnen Sie die freie Energie $F(T, B, N)$ und die Entropie $S(T, B, N)$. Untersuchen Sie das Verhalten dieser beiden Größen für die Grenzfälle $kT \gg \mu B$ und $kT \ll \mu B$.

   (d) Untersuchen Sie die innere Energie $U(T, B, N)$ und interpretieren Sie das Verhalten in den oben genannten Grenzfällen.

   (e) Zu guter Letzt betrachten wir das magnetische Gesamtmoment, welches durch die Observable $\vec{M} = \sum_i \mu_i$ beschrieben wird. Berechnen Sie den Mittelwert $\langle M_z \rangle = \mathrm{tr}(\varrho M_z)$ und skizzieren Sie das Verhalten.

2. **Operatorvariation und -ableitung** (4 Punkte)

   (a) Beschreiben Sie alle hermiteschen Matrizen A mit $\delta\,\mathrm{tr}(A^3 - 3A) = 0$.

   (b) Finden Sie eine nichthermitesche Matrix, für welche $\delta\,\mathrm{tr}(AA^\dagger A - 3A) = 0$.
   Hinweis: Für $i \neq j$ gilt z.B. $(\sigma_i + i\,\sigma_j)^2 = 0$.

   (c) Bestimmen Sie X in der Reihenentwicklung

   $$\exp[\sigma_x + \varepsilon\sigma_z] = \exp[\sigma_x] + \varepsilon\, X + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{2}$$

   wobei σ_x und σ_z Paulimatrizen sind.