

Statistische Physik

Übungsblatt 3

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Florian Köppen, Tobias Moroder, Fr 8–10, Raum: D120

Abgabe: Di, 3. Mai 2011

1. Relative Entropie (5 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass sowohl die klassische relative Entropie $H(P\|Q) = \sum_i P(i) \log[P(i)/Q(i)]$ für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P(i), Q(i)$, als auch die quantenmechanische relative Entropie $S(\varrho\|\sigma) = \text{tr}[\varrho \log(\varrho) - \varrho \log(\sigma)]$ für zwei beliebige Dichtematrizen ϱ, σ nicht-negativ sind.

- Zeigen Sie zuerst die Ungleichung $\log(x) \leq x - 1$ für $x \geq 0$ (welche aus der Konkavität des Logarithmus folgt) und beweisen Sie damit anschließend $H(P\|Q) \geq 0$.
- Seien $|a_i\rangle$ und $|b_j\rangle$ zwei verschiedene Basen des Hilbertraums \mathcal{H} , sowie $P(i)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeigen Sie, dass sowohl $C_i(j) = |\langle a_i | b_j \rangle|^2$ für alle i , als auch $Q(i) = \sum_j C_i(j) P(i)$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen darstellen.
- Verwenden Sie die beiden vorherigen Teilaufgaben, um $S(\varrho\|\sigma) \geq 0$ zu beweisen. (Hinweis: $S(\varrho\|\sigma)$ ist durch eine speziell gewählte klassische relative Entropie nach unten beschränkt)

2. Eigenschaften der von Neumann Entropie (4 Punkte)

In dieser Aufgabe möchten wir mit Hilfe von $S(\varrho\|\sigma) \geq 0$ zwei wichtige Eigenschaften der von Neumann Entropie $S(\varrho) = -\text{tr}[\varrho \log(\varrho)]$ zeigen.

- Sei ϱ_{AB} die Dichtematrix eines zusammengesetzten Systems AB , sowie ϱ_A, ϱ_B die Dichtematrizen der entsprechenden Einzelsysteme. Verwenden Sie $S(\varrho_{AB}\|\varrho_A \otimes \varrho_B) \geq 0$, um die Subadditivität der von Neumann Entropie zu beweisen: $S(\varrho_{AB}) \leq S(\varrho_A) + S(\varrho_B)$.
- Verwenden Sie die Subadditivität des Zustands $\varrho_{AB} = \sum_i P(i) |i\rangle \langle i| \otimes \varrho_i$, um die Konkavität der von Neumann Entropie zu zeigen: $\sum_i P(i) S(\varrho_i) \leq S[\sum_i P(i) \varrho_i]$.

3. Doktorarbeit (2 Punkte)

Eine Doktorarbeit mit 393 Seiten enthalte 1202 Plagiate, welche zufällig und unabhängig verteilt sind.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als ein Plagiat auf einer bestimmten Seite?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei aufeinanderfolgende Seiten kein Plagiat aufweisen?