

Statistische Physik

Übungsblatt 2

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne

Übungen: Florian Köppen, Tobias Moroder, Fr 8–10, Raum: D120

Abgabe: Fr, 26. April 2011

1. Entropie von Messergebnissen (5 Punkte)

Wir betrachten ein Spin-1-Teilchen in einem gemischten Zustand ϱ sowie Messungen der Spin-Ausrichtungen J_x und J_z . Sei $S(\varrho)$ die von-Neumann-Entropie und $S(P_\ell)$ die Shannon-Entropie der Messergebnisse für die Messung J_ℓ .

- (a) Berechnen Sie $S(P_x)$ sowie die Varianz $\Delta(J_x)$ für die 3 Eigenzustände von J_z .
- (b) Sei ϱ beliebig. Wann gilt $S(P_x) + S(\varrho) = 0$?
- (c) Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle Zustände ϱ gilt, $S(P_x) + S(P_z) \geq \varepsilon$.

2. Diskriminierungsklage gegen die University of Berkeley (3 Punkte)

Die University of Berkeley wurde verklagt, Frauen eine geringere Chance auf einen Graduierten-Studienplatz zu geben als Männern. Dies wurde anhand der Aufnahmezahlen für den Herbst 1973 begründet, die wie folgt lautet:

| | Bewerber | zugelassen |
|--------|----------|------------|
| Männer | 8442 | 44 % |
| Frauen | 4321 | 35 % |

- (a) Als Erstes möchten wir untersuchen, ob diese Klage überhaupt gerechtfertigt war, da das Bild natürlich immer aufgrund statistischer Fluktuationen verfälscht werden kann und Frauen 1973 vielleicht einfach nur extremes Pech hatten. Dazu betrachten Sie das Model, dass für jede Frau eine feste Aufnahmewahrscheinlichkeit von p_φ besteht, die für jede Kandidatin unabhängig gilt. Benutzen Sie Hoeffdings Ungleichung, um eine Schranke an die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass in einer Stichprobe von 4321 Frauen höchstens 40% zugelassen werden, obwohl in Wirklichkeit $p_\varphi \geq 0.44$ gilt.

Hoeffdings Ungleichung: Betrachte die Summe $\bar{X} = 1/N \sum_i X_i$ von N unabhängigen, reellwertigen Zufallsvariablen X_i mit $a_i \leq X_i \leq b_i$. Dann gilt für jedes $t \geq 0$

$$Prob[\bar{X} - \mathbb{E}(\bar{X}) \leq -t] \leq e^{-\frac{2t^2 N^2}{\sum_i (b_i - a_i)^2}}. \quad (1)$$

- (b) Dieses vereinfachte Model ist jedoch stark irreführend. Ein besseres Model wäre die Aufnahmewahrscheinlichkeit pro Fach zu vergleichen. Erklären Sie somit die oben dargestellten Daten für den Fall von nur zwei Departments, z.B. Physik und Biologie, wobei aber die konditionierten Aufnahmewahrscheinlichkeiten für Frauen immer größer sein sollen als die für Männer.

3. Informationsgehalt (3 Punkte)

Berechnen Sie die Shannon-Entropie der einzelnen Buchstaben der Sprachen Englisch, Französisch und Deutsch basierend auf der aufgelisteten relativen Häufigkeitstabelle und entscheiden Sie damit, welche Sprache am zufälligsten ist, oder anders formuliert, welche den höchsten Informationsgehalt pro Zeichen besitzt.

Als Vereinfachung betrachten Sie 'Andere' als ein einziges weiteres Zeichen. (Beachten Sie zudem, dass die angegebenen Häufigkeiten nicht normiert sind.)

| Buchstabe | Englisch | Französisch | Deutsch |
|-----------|----------|-------------|---------|
| a | 0.08 | 0.08 | 0.07 |
| b | 0.01 | 0.01 | 0.02 |
| c | 0.03 | 0.03 | 0.03 |
| d | 0.04 | 0.04 | 0.05 |
| e | 0.13 | 0.15 | 0.17 |
| f | 0.02 | 0.01 | 0.02 |
| g | 0.02 | 0.01 | 0.03 |
| h | 0.06 | 0.01 | 0.05 |
| i | 0.07 | 0.08 | 0.08 |
| j | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| k | 0.01 | 0.00 | 0.01 |
| l | 0.04 | 0.05 | 0.03 |
| m | 0.02 | 0.03 | 0.03 |
| n | 0.07 | 0.07 | 0.10 |
| o | 0.08 | 0.05 | 0.03 |
| p | 0.02 | 0.03 | 0.01 |
| q | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| r | 0.06 | 0.07 | 0.07 |
| s | 0.06 | 0.08 | 0.07 |
| t | 0.09 | 0.07 | 0.06 |
| u | 0.03 | 0.06 | 0.04 |
| v | 0.01 | 0.02 | 0.01 |
| w | 0.02 | 0.00 | 0.02 |
| x | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| y | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| z | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| Andere | 0 | 0.03 | 0 |

Tabelle 1: Relative Häufigkeit der 26 Zeichen des modernen lateinischen Alphabets für die Sprachen Englisch, Französisch und Deutsch, entnommen aus wiki.stat.ucla.edu/socr/index.php/SOCR_LetterFrequencyData.