

Statistische Physik

Übungsblatt 1

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Florian Köppen, Tobias Moroder, Fr 8–10, Raum: D120

Abgabe: Fr, 19. April 2013

1. Dichtematrizen (4 Punkte)

Wir untersuchen folgende Schar von Matrizen,

$$\varrho(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & \lambda & i/4 & 0 \\ 0 & -i/4 & m/16 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

wobei Sie für m die dritte Position Ihrer Matrikelnummer einsetzen.

- Geben Sie den Bereich für μ und λ an, so dass $\varrho(\lambda, \mu)$ eine Dichtematrix ist.
 - Sei $\varrho(\lambda, \mu)$ nun die gemeinsame Dichtematrix zweier Spin-1/2-Systeme. Wie lauten die reduzierten Dichtematrizen ϱ_A und ϱ_B für die einzelnen Spins? Wann gilt $\varrho = \varrho_A \otimes \varrho_B$?
- ### 2. Superposition und Mischung (3 Punkte)
- Sei $\varrho = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|$ die Dichtematrix des Singulett-Zustandes ($|\psi^-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$) und $\varrho' = (|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow|)/2$ die Mischung von $|\uparrow\downarrow\rangle$ und $|\downarrow\uparrow\rangle$.

- Zeigen Sie, dass keine unitäre Transformation U mit $\varrho = U\varrho'U^\dagger$ existiert.
 - Berechnen Sie die Erwartungswerte der Observablen $\sigma_x \otimes \sigma_x$, $\sigma_y \otimes \sigma_y$ und $\sigma_z \otimes \sigma_z$ jeweils für die Dichtematrizen ϱ und ϱ' .
- ### 3. Einzelnes Qubit (4 Punkte)

- Betrachte die folgende Klasse von Operatoren auf \mathbb{C}^2

$$\varrho(x, y, z) = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) \quad (1)$$

mit den aus der Vorlesung bekannten Pauli Matrizen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Bestimmen Sie den Wertebereich von der reellen Parametern x, y, z so dass $\varrho(x, y, z)$ eine zulässige Dichtematrix repräsentiert. Skizzieren Sie diesen Bereich und untersuchen Sie wo sie die reinen Zustände befinden.

- Vereinfachen Sie den Ausdruck $e^{-(\mathbb{1} + \mu\sigma_x)}$, mit μ reell, und berechnen Sie die Spur.
- ### 4. Geburtstagsparadoxon*
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Marsianer aus einer Gruppe von M Marsianern am gleichen Tag Geburtstag haben? (Das Marsjahr hat ca. 670 Marstage.)

5. Triell*

Drei Schützen schießen reihum aufeinander. Der erste Schütze trifft mit 50% Wahrscheinlichkeit, der zweite mit 80% und der dritte immer; das Ziel bestimmen die Schützen selbst. Berechnen Sie die Chancen jedes Schützen zu überleben bei jeweils den folgenden Strategien:

- Jeder Schütze schießt immer auf den stärksten Gegner.
- Wie (a), jedoch schießt der erste Schütze in die Luft solange er noch zwei Gegner hat.

6. **Mint drops Problem***

Eine Person hat in jeder seiner beiden Jackentaschen eine Schachtel mit jeweils N Mint drops. Bei schlechten Atem zieht er zufällig eine der beiden Schachteln hervor und entnimmt ein Mint drops. Dies macht er so lange bis eine der beiden Schachteln leer ist, danach tauscht er beide gegen volle Schachteln wieder aus. Wieviele Mint drops verbleiben im Mittel noch in der nichtleeren Schachtel?