Statistische Physik
Übungsblatt 9

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Sönke Niekamp, Dr. Matthias Kleinmann, Do 8–10, Raum: D120

Besprechung: 16. Juni 2011

1. **Jordan-Wigner-Transformation***
   Es geht darum, die Erzeuger und Vernichter für Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen durch die Spinoperatoren darzustellen. Wir bezeichnen mit S_j^α den Spin-Operator auf dem j-ten Teilchen in Richtung $\alpha = x, y, z$. Es gilt wie üblich $[S_j^\alpha, S_k^\beta] = i\,\delta_{jk} \sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_j^\gamma$. Wir definieren nun

$$S_j^\pm = S_j^x \pm i\, S_j^y \quad \text{und} \quad c_k = \prod_{j=1}^{k-1} (2S_j^+ S_j^- - 1) S_k^+.$$

   (a) Zeigen Sie, dass es sich bei c_k um einen geeigneten Vernichter handelt (Vertauschungsrelationen).

   (b) Wie sieht der Vakuumzustand aus?

2. **Spinlose Fermionen***
   Wechselwirkungsfreie Fermionen haben z.B. einen Hamiltonoperator der Form

$$H = \sum_{m,n=1}^{N} t_{mn} a_m^\dagger a_n,$$

   wobei N die Anzahl der Zustände, $a_n^\dagger$ den Erzeuger und t_{mn} eine hermitesche $N \times N$-Matrix bezeichnet.

   (a) Zeigen Sie, dass für jede unitäre Matrix u_{kl} die Operatoren $c_k = \sum_l u_{kl} a_l$ einen neuen Satz von Vernichtern definieren.

   (b) Zeigen Sie, dass es eine solche unitäre Matrix gibt, so dass

$$H = \sum_{n=1}^{N} e_n c_n^\dagger c_n.$$