Statistische Physik
Übungsblatt 6

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Sönke Niekamp, Dr. Matthias Kleinmann, Do 8–10, Raum: D120

Abgabe: Di, 24. Mai 2011

1. **Redlich-Kwong-Gas** (2 Punkte)
   Wir nehmen für ein Gas folgende Zustandsgleichung an:
   $$p = \frac{NT}{V-b} - \frac{a}{\sqrt{T}\,V(V+b)}.$$
   Hierbei sind p, T und V wie üblich, N steht für die konstante Teilchenzahl und a, b bezeichnen phänomenologische Konstanten. Wir nehmen an, dass für geringe Dichte ($V/N \gg b$) die spezifische Wärme temperaturunabhängig wird ($C_V(T) \approx \text{konst.}$). Bestimmen Sie die freie Energie $F(T, V)$.

2. **Tonks-Gas** (4 Punkte)
   Wir betrachten ein eindimensionales System von N Teilchen jeweils der Länge ℓ. Die Teilchen können sich nicht durchdringen, wechselwirken sonst jedoch nicht miteinander. Bestimmen Sie (a) die Zustandssumme, (b) die freie Energie, (c) die Zustandsgleichung und (d) die innere Energie für dieses „Gas“.
   Hinweise: Dies ist im Prinzip analog zum idealen Gas (harten Kugeln). Allerdings können im eindimensionalen Fall die Teilchen ihre Anordnung nicht verändern. Die Teilchen können maximal die Länge L einnehmen (analog zu V). Betrachten Sie zuerst $N = 2$ und gehen Sie dann per Induktion vor.

3. **Thermalisierung***
   Ein Teilchen mit Masse m_1 gerät in ein ideales Gas mit Konstituentenmassen m_2 und wird nun hin und wieder mit einem Gasteilchen zusammenstoßen. Wir betrachten nur Stöße, bei denen die Impulse beider Teilchen parallel oder antiparallel sind. Berechnen Sie die mittlere kinetische Energie und Temperatur des Teilchens in Abhängigkeit der Anzahl der erfolgten Stöße. Vernachlässigen Sie hierbei die Rückwirkung auf das Gas.

4. **Stirling-Formel** (3 Punkte)
   Es gibt viele Wege die stirlingsche Näherung für $\log(n!)$ herzuleiten. Hier sollen Sie nun einen nachvollziehen:

   (a) Zunächst die Γ-Funktion: Zeigen Sie, dass $n! = \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t} dt$.
   Hinweis: Man kann z.B. den Umweg über $(-\partial/\partial\zeta)^n \int \mathrm{e}^{-\zeta t} dt$ gehen.

   (b) Durch geschickte Umparametrisierung von t erhält man (zeigen!)
   $$n! = n^n\, \mathrm{e}^{-n} R_n, \text{ wobei } R_n = n \int_{-1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n[t-\log(1+t)]}\, dt.$$

   (c) Zerlegen Sie nun den Integranden in R_n in ein Produkt der Form $\mathrm{e}^{-t^2 n/2} \mathrm{e}^{\cdots}$ und entwickeln Sie den zweiten Term bis einschließlich t^4. Das erlaubt es das Integral durchzuführen — nähern Sie Integrale auf $[-\sqrt{n/2}, \sqrt{n/2}]$ durch Integrale auf $]-\infty, \infty[$.

   (d) Die ersten Terme der Stirling-Formel lauten
   $$\log(n!) = n \log n - n + \tfrac{1}{2}\log(2\pi n) + \mathcal{O}(n^x).$$
   Bestätigen Sie diese Formel und bestimmen Sie x.