

Statistische Physik

Übungsblatt 10

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne

Übungen: Sönke Niekamp, Dr. Matthias Kleinmann, Do 8–10, Raum: D120

Abgabe: Di, 21. Juni 2011

1. Elektronen im Halbleiter (4 Punkte)

Ein Halbleiter bestehe aus zwei Energiebändern, die durch eine Energielücke $\Delta\varepsilon = \varepsilon_c - \varepsilon_v > 0$ getrennt sind. Bei $T = 0$ ist das Valenzband voll besetzt und das Leitungsband leer.

- Bestimmen Sie die Leitungselektronendichte N_c/V und die Valenzlöcherdichte P_v/V als Funktionen von T und μ . Die Zustandsdichte können Sie im Moment noch allgemein lassen.
- Aus der Erhaltung der Elektronenzahl ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für μ . Wir machen die Konsistenzannahmen $k_B T \ll \varepsilon_c - \mu$ und $k_B T \ll \mu - \varepsilon_v$. Lösen Sie mit Hilfe dieser Annahmen nach μ auf.
- Die Energien der Leitungselektronen seien nun durch $\varepsilon_c(\vec{k}) = \varepsilon_c + \hbar^2 \vec{k}^2 / (2m_c)$ und die der Valenzelektronen durch $\varepsilon_v(\vec{k}) = \varepsilon_v - \hbar^2 \vec{k}^2 / (2m_v)$ gegeben. Was ist also die Zustandsdichte? Was ergibt sich für das chemische Potential? Überprüfen Sie die Konsistenzannahmen.

2. Ideale zweidimensionale Quantengase (3 Punkte)

Wir betrachten ideale Bose- und Fermigase in zwei Dimensionen. In der nächsten Aufgabe werden Sie zeigen, dass ihre Zustandsdichte durch

$$\frac{A}{(2\pi)^2} \sum_{m_s} \int d^2k f(\varepsilon_k) = \int d\varepsilon \varrho(\varepsilon) f(\varepsilon) \quad \text{mit} \quad \varrho(\varepsilon) = \frac{gAm}{2\pi\hbar^2}$$

gegeben ist. Hierbei ist A die (dem Volumen entsprechende) Fläche und der Faktor $g = 2s + 1$ berücksichtigt die Spinartung. Betrachten Sie im Folgenden immer sowohl den bosonischen als auch den fermionischen Fall.

- Berechnen das chemische Potential als Funktion der Teilchendichte N/A und der Temperatur T . Skizzieren Sie μ als Funktion von T .
- Erinnern Sie sich an die Virialentwicklung

$$p = \frac{N}{A} k_B T \left[1 - b_2(T) \frac{N}{A} + \mathcal{O}\left(\frac{N}{A}\right)^2 \right]$$

und berechnen Sie den zweiten Virialkoeffizienten $b_2(T)$, indem Sie $p = -\partial_A J(T, A, \mu)$ nach der Dichte N/A entwickeln.

3. Zustandsdichten*

Wir betrachten ein ideales Quantengas in D Dimensionen. Die Zustandsdichte $\varrho(\varepsilon)$ ist so definiert, dass $\varrho(\varepsilon) d\varepsilon$ die Zahl der Einteilchenzustände mit Energien zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ ist.

- Zeigen Sie, dass die Oberfläche der D -dimensionalen Einheitskugel durch

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$$

gegeben ist, wobei $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t}$ die Gamma-Funktion ist. (Hinweis: Integrieren Sie $\exp(-|\vec{r}|^2)$ einmal in kartesischen und einmal in Kugelkoordinaten.)

- Die Dispersionsrelation, d. h. die Beziehung zwischen Energie und Impuls eines Teilchens, sei in der Form $\varepsilon = \varepsilon(p)$ mit irgendeiner monoton wachsenden Funktion $\varepsilon(p)$ gegeben. Hierbei ist $p = |\vec{p}|$ der Betrag des D -dimensionalen Impulses. Bestimmen Sie die Zustandsdichte $\varrho(\varepsilon)$.
- Berechnen Sie die Zustandsdichte explizit für eine quadratische Dispersionsrelation $\varepsilon(p) = p^2/(2m)$ und die Dimensionen $D = 1, 2, 3$. Zeichnen Sie $\varrho(\varepsilon)$ für diese Fälle.