Prof. Dr. O. Gühne S. Kränkl, Ch. Ritz & S. Wölk

SS 2014 Theoretische Elektrodynamik Übungsklausur

Freiwillige Abgabe bis: Dienstag, 17. Juni 2014

1. Potential zweier Punktladungen

Wir betrachten ein System aus zwei Punktladungen q_1 und $-q_2$ ($q_2 > q_1 > 0$) an den Orten $\vec{x}_1 = \vec{0}$ und $\vec{x}_2 = (0, 0, a)$. Zeigen Sie, dass das Potential auf einer Kugelfläche vom Radius R, deren Zentrum auf der z-Achse liegt und von den Punktladungen die Abstände ℓ_1, ℓ_2 hat, verschwindet, wobei ℓ_1, ℓ_2 und R durch

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2, \quad R^2 = \ell_1 \ell_2$$

zusammen hängen.

2. Elektrische Momente

Bestimmen Sie das Dipolmoment $\vec{p}$ und das Quadrupolmoment $Q_{i,k}$ einer (unendlich dünnen) geladenden Scheibe mit Radius R in der x, y-Ebene mit der Ladungsdichte

$$\sigma(r, \varphi) = \sigma_0 r \sin(\varphi)(1 + \cos(\varphi))$$

3. Spiegelladung

Die Ladung q befindet sich zwischen zwei Platten, die sich unter einem Winkel α schneiden. Für welche Winkel α kann dieses Problem mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen gelöst werden, indem man q und ihre Spiegelladungen immer wieder an den Platten spiegelt?

4. Laplacegleichung

Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ mit der Zusatzforderung

(a) $\Phi(\vec{r}) = \Phi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(b) $\Phi(\vec{r}) = \Phi(\rho), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $\Phi(\vec{r}) = \Phi(x)$

5. Randwertproblem

Eine geerdete Metallhohlkugel befinde sich in einem homogenen, elektrischen Feld $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$

(a) Berechnen Sie das Potential $\phi(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel.

(b) Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte auf der Kugel.

6. Stromdurchflossener Kreisring

(a) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte eines stromdurchflossenen Kreisrings mit Radius R für einen Punkt auf der Achse des Rings im Abstand a vom Mittelpunkt. Diskutieren Sie die Grenzfälle $a \ll R$ und $a \gg R$.

(b) Zwei gleichartige, scheibenförmige Spulen mit N Windungen, deren Höhe gegen ihren Radius R vernachlässigbar ist, sind so angeordnet, dass sie die z-Achse als gemeinsame Symmetrieachse haben und ihr Abstand gleich 4a ist. Die erste Spule befindet sich an der Position $(0, 0, -a)$ und wird vom Strom I durchflossen. Die zweite Spule befindet sich bei $(0, 0, 3a)$, und in ihr fließt der Strom $-8I$.Wie muss a gewählt werden, damit B an der Position z = 0 verschwindet?

7. Elektromagnetische Welle

Eine transversale elektromagnetische Welle in einem nichtleitenden, ungeladenen Medium sei zirkularpolarisiert

$$\vec{E} = E_0 \left[\cos(kz - \omega t)\vec{e}_x + \sin(kz - \omega t)\vec{e}_y\right]$$

und breitet sich in der z-Richtung aus. Berechen Sie

(a) die magnetische Induktion $\vec{B}$,

(b) den Poynting-Vektor $\vec{S}$,

(c) den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel θ gegen die Ausbreitungsrichtung ($\vec{k} = k\vec{e}_z$) geneigte Ebene (θ= Winkel zwischen $\vec{k}$ und Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene).

Formelsammlung:

- wichtige Integrale:
  $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x) = \pi, \quad \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos^2(x) = \pi/4, \quad \int\limits_0^{\infty} (\cos(ax) - \cos(bx))/x = \ln(b/a)$
- Definition des Quadrupoltensors:
  $Q_{i,j} = \int \mathrm{d}^3x\ \rho(\vec{x})(3x_i x_j - \vec{x}^2\delta_{i,j})$
- Laplaceoperator in Kugel- und Zylinderkoordinaten:
  $\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$
  $\Delta U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$
- Lösung der Laplacegleichung mit azimutal symmetrischer Randbedingung:
  $\phi(r,\theta) = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty}(\alpha_\ell r^\ell + \beta_\ell r^{-(\ell+1)})P_\ell(\cos\theta)$
- Legendre-Polynome:
  $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, \quad P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$
- magnetisches Moment einer rotierenden Hohlkugel:
  $\vec{m} = qR^2\omega/3$