SS 2014 Theoretische Elektrodynamik Blatt 05

Abgabe des Übungsblattes: Dienstag, 20. Mai 2014

15. Der Zerlegungssatz

Im Folgenden wollen wir den Zerlegungssatz beweisen. Dieser besagt, dass ein zweifach stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_\ell(\vec{r}) + \vec{a}_t(\vec{r})$, das mit seinen Ableitungen für große Abstände hinreichend rasch gegen null geht, eindeutig in einen wirbelfreien Teil $\mathrm{rot}\,\vec{a}_\ell(\vec{r}) = 0$, und einen quellenfreien Teil $\mathrm{div}\,\vec{a}_t(\vec{r}) = 0$ zerlegt werden kann. Dabei gilt:

$$\vec{a}_\ell(\vec{r}) = \mathrm{grad}\,\alpha(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \alpha(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\mathrm{div}\,\vec{a}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{1}$$

$$\vec{a}_t(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{\beta}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\mathrm{rot}\,\vec{a}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie folgende Relation:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_\ell(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_r\;\mathrm{rot}_r \int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{a}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}. \tag{3}$$

(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie:

$$\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_r\;\mathrm{rot}_r \int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{a}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \vec{a}_t(\vec{r}). \tag{4}$$

(3 Punkte)

Hinweis: Folgende Relationen könnten nützlich sein:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A} \tag{5}$$

$$\mathrm{div}\,(\varphi\vec{A}) = \varphi\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi \tag{6}$$

$$\mathrm{rot}\,(\varphi\vec{A}) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{A} + \vec{A}\times\mathrm{grad}\,\varphi \tag{7}$$

$$\int_V \mathrm{d}^3r\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \int_{\partial V} \mathrm{d}f\times\vec{A} \tag{8}$$

16. Magnetfeld eines stromdurchflossenen Hohlzylinders

Ein unendlich langer Hohlzylinder mit Innenradius R_1 und Außenradius $R_2 > R_1$ wird homogen vom Strom I durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ im ganzen Raum. Skizzieren Sie $|\vec{B}|$ als Funktion des Abstands von der z-Achse.

(2 Punkte)

17. Zylindersymmetrische Stromverteilung

Betrachten Sie eine zylindersymmetrische Stromverteilung in Kugelkoordinaten: $\vec{j} = j(r,\theta)\vec{e}_\varphi$.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch das Vektorpotential diese Struktur hat:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A(r,\theta)\vec{e}_\varphi \tag{9}$$

(3 Punkte)

Hinweis:Benutzen Sie die Entwicklung von

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 4\pi \sum_{m,\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_{\text{min}}^{\ell}}{r_{\text{max}}^{\ell+1}} Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \tag{10}$$

nach Kugelflächenfunktionen in der Integralformel für $\vec{A}(r)$, hierbei ist $r_{\text{min}} = \min(r,r')$ und $r_{\text{max}} = \max(r,r')$.

(b) Welcher skalaren Differenzialgleichung muss $A(r,\theta)$ genügen? (1 Punkt)