Prof. Dr. O. Gühne — S. Kränkl, Ch. Ritz & S. Wölk

SS 2014 — Theoretische Elektrodynamik — Blatt 04

Abgabe des Übungsblattes: Dienstag, 13. Mai 2011

12. Eigenschaften der Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome aus Aufgabe 9 können auch durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \tag{1}$$

ausgedrückt werden. Zeigen Sie damit die folgenden Eigenschaften der Legendre-Polynome:

(a) Alle Legendre Polynome gehen durch den Punkt $(1, 1)$, d.h. $P_n(1) = 1$. (1 Punkt)

(b) Die Legendre Polynome sind orthogonal zueinander, d.h.

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m} \tag{2}$$

(3 Punkte)

13. Laplacegleichung mit azimutal symmetrischer Randbedingung

Gegeben sei ein ladungsfreies Volumen V. Das vorgegebene Potential Φ auf dem Rand von V besitze azimutale Symmetrie, d.h. $\Phi = \Phi(r, \theta)$.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Lösung für das Potential folgendermaßen durch Legendre-Polynome $P_\ell(\cos\theta)$ entwickeln lässt:

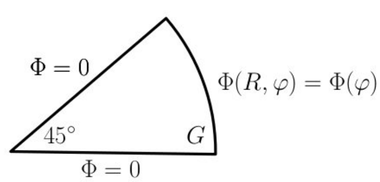
$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\alpha_\ell r^\ell + \beta_\ell r^{-(\ell+1)}\right) P_\ell(\cos\theta) \tag{3}$$

(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass im Inneren einer metallisch geerdeten Hohlkugel $(\Phi(R,\theta) = 0)$, $\Phi_{\text{in}} = 0$ gelten muss.

(1 Punkt)

14. Randwertproblem: Kreisausschnitt



Gegeben sei das ladungsfreie Gebiet G wie oben gezeichnet. Auf den beiden Schenkeln bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/4$ sei $\Phi = 0$, auf dem Kreisbogen gelte $\Phi(R,\varphi) = \Phi(\varphi)$. Berechnen Sie das Potential im Gebiet G mit Hilfe eines Separationsansatzes.

(4 Punkte)