

Abgabe des Übungsblattes: Mittwoch, 23. April 2011

1. Delta-Distribution

(a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Delta-Distribution, wobei $\Theta(x)$ die Heaviside-Funktion bezeichnet:

$$(i) \delta(x) = \delta(-x) \qquad (ii) \frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$$

(**Hinweis:** Multiplizieren Sie mit einer Testfunktion, die im Unendlichen verschwindet und integrieren Sie von $-\infty$ bis $+\infty$.)

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Eigenschaften der Delta-Distribution:

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \delta(x^2 - \pi^2) dx \qquad (ii) \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk x e^{ik(x-a)} \quad \text{für } a < 0 \text{ und } 0 < a$$

(2 Punkte)

Im Folgenden wollen wir die Darstellung der Delta-Distribution

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad (1)$$

aus der Vorlesung beweisen. Dazu gehen wir in 2 Schritten vor:

(c) Zeigen Sie, dass $\Delta 1/|\vec{r} - \vec{r}'| = 0$ für $\vec{r}' \neq \vec{r}$ gilt. (1 Punkt)

(d) Zeigen Sie, dass

$$\int_V d\vec{r}^3 \Delta \frac{1}{|\vec{r}'|} = -4\pi \qquad (2)$$

gilt, falls der Nullpunkt in V enthalten ist.

(**Hinweis:** Das beliebige Volumen V kann durch eine Kugel um den Ursprung ersetzt werden ohne den Wert des Integrals zu verändern.)

(1 Punkt)

2. Satz von Stokes

Verifizieren Sie für das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = (-y, x, 0)^T$ den Satz von Stokes

$$\oint_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{f} \qquad (3)$$

wobei der Weg ∂F durch einen Kreis in der xy-Ebene mit Radius R gegeben ist.

(2 Punkte)

3. Satz von Gauss

Verifizieren Sie für das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = (xy, 2yz, 3xz)^T$ den Satz von Gauss

$$\int_{F=\partial V} \vec{A} d\vec{F} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV \quad (4)$$

wobei V durch einen Würfel mit den Eckpunkten $(0, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (2, 2, 2)$ gegeben ist.

(2 Punkte)

4. Elektrisches Potential

Zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen mit Radien R_1 und R_2 mit $R_1 < R_2$ befindet sich Ladung mit der Ladungsdichte $\rho = \alpha/r^2$.

(a) Berechnen Sie die Gesamtladung (1 Punkt)

(b) Berechnen Sie das Potential Φ und die Elektrische Feldstärke \vec{E} .

(**Hinweis:** Überlegen Sie, welche Symmetrien in diesem Fall für Φ gelten und von welchen Variablen Φ daher nur abhängen kann.)

(2 Punkte)