

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 7

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne

Übungen: Martin Hofmann, Florian Köppen, Dr. Matthias Kleinmann

Übungen: Freitags 8 Uhr

Abgabe: Di, 27. Nov. 2012

1. **Erhaltungsgröße** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass, falls f nicht explizit von x abhängt, die extremale Funktion $y(x)$ des Funktionals $\int f(x, y, y') dx$ der Gleichung

$$f - y' \frac{\delta f}{\delta y'} = \text{const.}$$

genügt.

2. **Verallgemeinerte Lagrange-Gleichungen** (4 Punkte)

Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Minimierung des Funktionals $\int L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) dt$ her. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $L = -m\dot{q}^2/2 - kq^2/2$ auf.

3. **Legendre-Transformation** (3 Punkte)

Berechnen Sie die Legendre-Transformation der Funktion

(a) $f(\dot{x}) = \dot{x}^\alpha / \alpha$ bezüglich \dot{x} ,

(b) $f(\dot{x}) = e^{\dot{x}}$ bezüglich \dot{x} und

(c) $f(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2/2 - V(q_1, q_2)$ bezüglich \dot{q}_1 und \dot{q}_2 .

4. **Brachistochrone** (6 Punkte)

Berechnen Sie die Bahn, in welcher eine Punktmasse am schnellsten von Punkt A zum Punkt B gelangt. Es wirkt nur die Schwerkraft $F = -gy$.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für $y(x)$ auf. Verwenden Sie hierfür das Ergebnis aus Aufgabe 1.

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch Einführung eines Bahnparameters u und Trennung der Variablen.

Hinweise: Die Lösung ist eine Zykloide.