

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 4

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
 Übungen: Martin Hofmann, Florian Köppen, Dr. Matthias Kleinmann
 Übungen: Freitags 8 Uhr
 Abgabe: Di, 6. November 2012

1. **Ellipse** (4 Punkte)

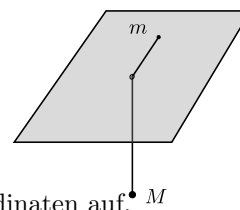
Zeigen Sie für die Gleichung

$$k = (1 + \varepsilon \cos \varphi) r(\varphi),$$

dass abhängig vom Parameter ε eine Ellipse ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$), Parabel oder Hyperbel ($x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$) entsteht. Bestimmen Sie jeweils a und b . Skizzieren Sie Ellipse, Parabel und Hyperbel.

2. **Zentralpotential** (6 Punkte)

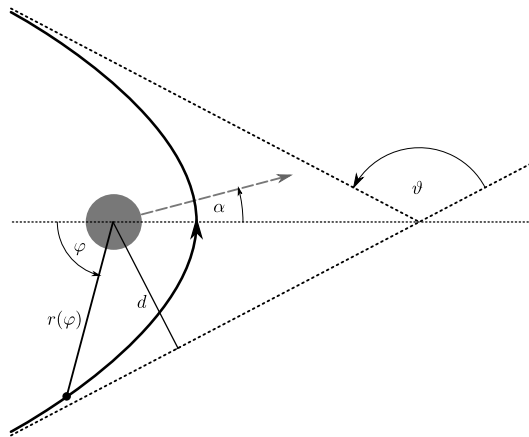
Zwei Massen M und m sind durch ein masseloses Seil verbunden. Die Masse m kann sich nur in der x - y -Ebene bewegen, $z \equiv 0$, während die Masse M sich nur in der z -Richtung bewegt, $x \equiv 0 \equiv y$. Das Seil ist durch ein Loch in der x - y -Ebene geführt; auf die Masse M wirkt die Gewichtskraft gM . (Nehmen Sie die Massen als punktförmig an und vernachlässigen Sie Reibung etc.)



- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Masse m in Zylinderkoordinaten auf. *Hinweis:* Beachten Sie, dass beide Massen Trägheit besitzen.
- (b) Überprüfen Sie, ob die auf die Masse m wirkende Kraft konservativ ist und geben Sie das effektive Potential V_{eff} an, so dass $m\ddot{r} = -d_r V_{\text{eff}}(r)$.
- (c) Überzeugen Sie sich, dass Kreisbahnen gültige Lösungen sind. Nehmen Sie nun an, die Kreisbahn wird geringfügig gestört. Zeigen Sie, dass dann die neue Bahn mit der Frequenz ω um die ursprüngliche Bahn schwankt. Bestimmen Sie ω .

3. **Swing-by-Manöver** (6 Punkte)

In der interplanetaren Raumfahrt verwendet man die Bewegungsenergie der Planeten um Raumsonden zu beschleunigen. Die Skizze rechts zeigt die Situation im Ruhesystem des Planeten, das Koordinatensystem wurde zudem so gelegt, dass Einfallswinkel und Ausfallswinkel der Sonde gleich sind. Der gestrichelte Pfeil weist in die Bewegungsrichtung des Planeten, welche mit der Symmetrieachse den Winkel α einschließt. Die durchgezogene dicke Linie soll die Bahn der Sonde beschreiben. Eingezeichnet ist nun der Ablenkwinkel ϑ , der Stoßparameter d , der Abstand der Sonde vom Planeten $r(\varphi)$ und der Winkel zwischen Sonde und Symmetrieachse φ .



- (a) Berechnen Sie im Bezugssystem der Sonne die Geschwindigkeit $|v_{\text{neu}}|$ nach dem Swing-by-Manöver als Funktion der ursprünglichen Geschwindigkeit $|v_{\text{alt}}|$, der Parameter ϑ und α und der Planetengeschwindigkeit $|v_{\text{Orbit}}|$.
- (b) Im Ruhesystem des Planeten folgt die Bahn der Sonde einer Hyperbel. Geben Sie die Hyperbelgleichung an. Welche Werte nimmt φ bei $r \rightarrow \infty$ an?
- (c) Nähern Sie die Geschwindigkeit $|v_{\text{neu}}|$ für den Fall $m_{\text{Planet}} \rightarrow \infty$.

Hinweis: Vernachlässigen Sie die Rückwirkung auf den Planeten.