Theoretische Mechanik
Übungsblatt 9

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Felix Matuschke, Daniel Andreas Schmitz, Jochen Szangolies, Dr. Matthias Kleinmann
Übungen: Freitags 8 Uhr
Abgabe: 13. Dez. 2011

1. **Poisson-Klammern** (8 Punkte)

   (a) Seien f, g und h Phasenraumfunktionen und wir definieren $d_g\colon f \mapsto \{f, g\}$. Zeigen Sie, dass
   (i) $d_g(f + h) = (d_g f) + (d_g h)$,
   (ii) $d_g(fh) = f d_g h + (d_g f)h$ und
   (iii) $d_g(\phi(f)) = \phi'(f) d_g f$.

   (b) Beweisen Sie die Jacobi-Identität

   $$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

   (c) Betrachten Sie die Hamiltonfunktion $H = \vec{p}^2/2m + V(|\vec{r}|)$ in drei Dimensionen. Zeigen Sie unter Verwendung der Poisson-Klammer, dass dann Drehimpulserhaltung gilt.

   (d) Berechnen Sie $\{L_i, L_j\}$ für die Drehimpulskomponenten. Können zwei Drehimpulskomponenten als unabhängige kanonische Variablen gewählt werden? Kann L_x und L_y erhalten sein, ohne dass L_z erhalten ist?

2. **Legendre-Transformation** (3 Punkte)
   Nehmen Sie die (absurde) Lagrangefunktion $L = \mathrm{e}^{\dot{x}}$ an. Finden Sie formal die Hamiltonfunktion und lösen Sie ebenso formal die Lagrangeschen und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

3. **Kanonische Transformation** (6 Punkte)
   Wir betrachten die Hamiltonfunktion

   $$H = \frac{1}{2q^2} + \tfrac{1}{2} p^2 q^4.$$

   (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für q auf.

   (b) Finden Sie eine kanonische Transformation, welche H auf die Form eines harmonischen Oszillators bringt.

   (c) Zeigen Sie, dass die Lösungen der transformierten Koordinaten eine Lösung zu (a) sind.