

# Theoretische Mechanik

## Übungsblatt 7

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne

Übungen: Felix Matuschke, Daniel Andreas Schmitz, Jochen Szangolies, Dr. Matthias Kleinmann

Übungen: Freitags 8 Uhr

Abgabe: Di., 29. Nov. 2011

### 1. Pendel mit beweglicher Aufhängung (6 Punkte)

Der Aufhängungspunkt eines Fadenpendels (Länge  $\ell$ , Masse  $m$ ) habe die Masse  $M$  und sei horizontal frei beweglich.

- Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten, und stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art auf.
- Bestimmen Sie die zyklische Koordinate, und geben Sie die zugehörige Erhaltungsgröße  $X$  an.
- Zeigen Sie, dass sich für  $X = 0$  die Masse  $m$  auf dem Stück einer Ellipse bewegt.

### 2. Erhaltungsgröße (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass, falls  $f$  nicht explizit von  $x$  abhängt, die extremale Funktion  $y(x)$  des Funktionals  $\int f(x, y, y') dx$  der Gleichung

$$f - y' \frac{\delta f}{\delta y'} = \text{const.}$$

genügt.

### 3. Verallgemeinerte Lagrange-Gleichungen (3 Punkte)

Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Minimierung des Funktionals  $\int L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) dt$  her. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für  $L = -m\dot{q}^2/2 - kq^2/2$  auf.

### 4. Kettenlinie (6 Punkte)

Ein Seil der Länge  $\ell$  und Massendichte  $\mu$  ist zwischen zwei Punkten mit Abstand  $L$  gespannt. Die beiden Punkte befinden sich auf gleicher Höhe, ansonsten hängt das Seil frei im Schwerfeld. Zeigen Sie mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen, dass die Kurve des Seils durch  $y(x) = c_1 \cosh(c_2 x)$  gegeben ist ( $x = 0$  in der Mitte zwischen beiden Verankerungen). Was ändert sich, wenn die Verankerungen nicht auf gleicher Höhe sind?

*Hinweise:* Parametrisieren Sie die Kurve  $(x(s), y(s))$  entlang des Seils. Dann hat die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  des Seils eine einfache Form, da  $\mu$  nicht von  $s$  abhängt. Schreiben Sie nun z.B.  $ds = f(y') dx$  mit geeignetem  $f$  und finden Sie die Funktion  $y(x)$ , welche  $E_{\text{pot}}$  minimiert.