Theoretische Mechanik
Übungsblatt 3

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Felix Matuschke, Daniel Andreas Schmitz, Jochen Szangolies, Dr. Matthias Kleinmann
Übungen: Freitags 8 Uhr
Abgabe: Mi, 2. November 2011, 10 Uhr (Raum B-110)

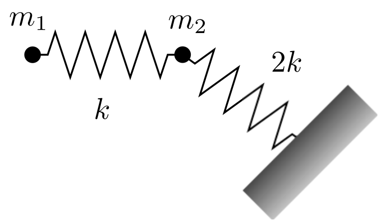
1. **Schwingungsdauer einer Schiffschaukel** (6 Punkte)
   Betrachten Sie ein Pendel im Schwerefeld. Nehmen Sie den Faden als starr aber masselos und die schwingende Masse als Punkt an.
   (a) Berechnen Sie formal die Schwingungsdauer für einen beliebigen maximalen Auslenkwinkel $\varphi_0 \in [0, \pi]$. Schreiben Sie das Ergebnis unter Verwendung des vollständigen elliptischen Integrals erster Art
   $$K(x) := \int_0^{\pi/2} d\vartheta / \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \vartheta}.$$
   (b) Entwickeln Sie nun den Integranden für kleine φ_0, so dass Sie den ersten nicht-konstanten Term für die Schwingungsdauer erhalten. Skizzieren Sie Ihre Näherung und den exakten Ausdruck für die Schwingungsdauer als Funktion von φ_0.
   Hinweis: Eine Tabelle mit Werten von $K(x)$ finden Sie z.B. im „Bronstein".

2. **Etwas lineare Algebra** (2 Punkte)
   Zeigen Sie, dass für eine symmetrische (reelle) $n \times n$-Matrix R folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) Es existiert eine invertierbare $n \times n$-Matrix A und ein r, so dass
   $$(A^T RA)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j < r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
   (b) R ist positiv semidefinit, d.h. für alle Vektoren $\vec{x}$ gilt $\vec{x}^T R\, \vec{x} \geq 0$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Hauptachsentransformation.

3. **Lösungen der DGL $M\ddot{\vec{x}} = -V\vec{x}$** (3 Punkte)
   In der DGL $M\ddot{\vec{x}} = -V\vec{x}$ sollen M und V symmetrische und positiv semidefinite Matrizen sein.
   (a) Erinnern Sie sich, warum genau dann ein Vektor $\vec{A}_0 \neq \vec{0}$ existiert mit $V\vec{A}_0 = \vec{0}$, wenn $\det[V - \omega^2 M]$ die Lösung $\omega = 0$ hat.
   (b) Wir betrachten den Fall von 2×2-Matrizen; $\det[V - \omega^2 M] = 0$ habe die Lösungen ${\omega_0}^2 = 0$ und ${\omega_1}^2 = k/m$. Wie lautet nun die allgemeine Lösung unserer DGL?

4. **Zweidimensionale Schwingung** (8 Punkte)
   Zwei Massen $m_1 = m$ und $m_2 = 2m$ sind mit einer Feder (Konstante: k) gekoppelt, die Masse m_2 ist zudem mit einer Feder der doppelten Stärke (Konstante: $2k$) an einer Wand befestigt. Behandeln Sie jede der Massen zweidimensional mit Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2).



   (a) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen ω_k des Systems.
   (b) Finden Sie einen vollständigen Satz linear unabhängiger Vektoren $\vec{A}_k$, so dass $\vec{x}_k(t) = \vec{A}_k \cos(\omega_k t)$ jeweils eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist.
   (c) Überprüfen Sie, dass die Vektoren $\vec{A}_k$ eine Basis bilden. Sind die Vektoren $\vec{A}_k$ wechselseitig orthogonal?
   (d) Zur Zeit $t = 0$ sei die Masse m_2 in ihrer Ruhelage und in Ruhe. Die Masse m_1 sei um $-a$ in x-Richtung ausgelenkt und habe die Geschwindigkeit $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)_{t=0} = (0, a\sqrt{k/m})$. Geben Sie explizit die Bahnkurven der beiden Teilchen an.