Theoretische Mechanik
Übungsblatt 2

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne

Übungen: Felix Matuschke, Daniel Andreas Schmitz, Jochen Szangolies, Dr. Matthias Kleinmann

Übungen: Freitags 8 Uhr

Abgabe: Di, 25. Oktober 2011

1. **Parabolische Zylinderkoordinaten** (5 Punkte)
   Ausgehend von den kartesischen Koordinaten (x, y, z) definieren wir die Transformation

   $$x = (u^2 - v^2)/2, \quad y = uv, \quad z \equiv z.$$

   (a) Zeigen Sie, dass jeder Punkt im Raum durch die Koordinaten (u, v, z) beschrieben werden kann.

   (b) Bestimmen Sie die drei Einheitsvektoren $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ und $\mathbf{e}_z$, gegeben durch

   $$\mathbf{e}_u = \frac{1}{c_u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \text{mit } c_u \text{ so, dass } \mathbf{e}_u^2 = 1, \text{ usw.},$$

   wobei $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

   (c) Berechnen Sie den Nabla-Operator ∇ in den neuen Koordinaten.

   (d) Wie lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen für ein massives, kräftefreies Teilchen in den neuen Koordinaten?

2. **Raketengleichung** (5 Punkte)
   Ein einfaches Modell für eine Rakete ist ein Objekt mit anfänglicher Masse $m(0) = m_0$ und Geschwindigkeit $v(0) = 0$, welches mit der Rate $\dot{m} = -\mu$ Materie ausstößt. Im Bezugssystem der Rakete ist die Geschwindigkeit v_g der ausströmenden Materie konstant.

   (a) Verwenden Sie die Gesamtimpulserhaltung um die Geschwindigkeit $v(t)$ der Rakete zu berechnen.

   (b) Skizzieren Sie das Verhältnis $E_{\text{kin}}/E_{\text{Motor}}$ der kinetischen Energie der Rakete E_{kin} und der vom Raketenmotor benötigten Energie $E_{\text{Motor}} = (\mu\, t) v_g^2/2$.

   (Ignorieren Sie relativistische Effekte, Reibung und Gravitation.)

3. **Sanduhr** (6 Punkte)
   Eine Sanduhr steht auf einer festen Unterlage. Zur Zeit $t = 0$ beginnt der Sand zu rieseln. Berechnen Sie die auf die Unterlage wirkende Kraft $F(t)$. Nehmen Sie hierzu an, dass der Sand gleichmäßig rieselt und die einzelnen Sandkörner sehr sehr klein sind (Kontinuums-Näherung). Weiterhin sollen die Sandkörner vollkommen inelastisch auf den Boden der Sanduhr auftreffen.

   Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Größe $\int_a^b F(t)dt$ für ein einzelnes Sandkorn, wobei das Zeitintervall $[a, b]$ den gesamten (inelastischen) „Lande“-Prozess des Sandkorns umfasst.

4. **Weißer Zwerg** (2 Punkte)
   Wir stellen uns einen Stern als eine Wolke aus vielen sich schnell bewegenden Gasteilchen vor, welche durch ihre eigene Gravitation zusammengehalten werden. Wenn nun ein solcher Stern keine innere Energiequelle mehr hat, so wird er durch die Abstrahlung von Licht stetig Energie verlieren. Wie ändert sich die kinetische Energie der Gasteilchen durch Verlust der Energiemenge δE?