

Maßgeschneiderte Spin-Spin-Kopplung  
und Quanten-Fouriertransformation  
mit gespeicherten  $\text{Yb}^+$ -Ionen  
in einem Magnetfeldgradienten

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

M.Sc. Christian Marcus Piltz  
geb. am 02.06.1982 in Siegen

eingereicht bei  
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
der Universität Siegen

Siegen 2016

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. C. Wunderlich  
Prof. Dr. C. Ospelkaus  
Gutachter der Disputation: Prof. Dr. C. Wunderlich  
Prof. Dr. C. Ospelkaus  
Prof. Dr. O. Gühne  
Prof. Dr. I. Fleck  
Datum der Disputation: 26.01.2017

Gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

## Zusammenfassung

Ein Quantencomputer, der die Konzepte der digitalen Datenverarbeitung und der Quantenphysik verknüpft, verspricht bestimmte Probleme der Informatik wesentlich effizienter als ein klassischer Computer zu lösen. Des Weiteren erlauben sogenannte Quantensimulatoren neue Einblicke in wissenschaftliche Fragestellungen aus den unterschiedlichsten Disziplinen, die über die Physik hinausgehen. Die heute am weitesten fortgeschrittene Möglichkeit, wie ein Quantencomputer realisiert werden kann, basiert auf in einer Paul-Falle gespeicherten Ionen, in deren atomaren Zuständen Information gespeichert wird. Mittels elektromagnetischer Strahlung können die Zustände manipuliert und die Information verarbeitet werden. Ein stationärer Magnetfeldgradient oder ein oszillierendes Magnetfeldes erlaubt für die Manipulation langwellige Mikrowellenstrahlung und beide Ansätze wurden in der Vergangenheit bereits erfolgreich erprobt.

Diese Arbeit knüpft an die ersten Machbarkeitsstudien bezüglich der Verwendung eines stationären Magnetfeldgradienten an. Es wurde mit drei gespeicherten Ionen in einem stationären Magnetfeldgradienten eine Quanten-Fouriertransformation als exemplarischer Algorithmus ausgeführt. Die Konstruktion des Algorithmus basiert dabei auf einem neuartigen Ansatz, der möglichst effektiv alle vorhandenen Spin-Spin-Kopplungen innerhalb des Systems ausnutzt und im Vergleich zu herkömmlichen Konstruktionen um den Faktor drei schneller ausgeführt werden kann. Ebenfalls wurden Quantensysteme mit maßgeschneiderten Spin-Spin-Kopplungen für mögliche Quantensimulationen realisiert und untersucht. Dabei wurden neuartige experimentelle Methoden entwickelt und erprobt, wie zum Beispiel eine Methode zur Detektion von Qubit-Zuständen, die auf der Zeitreihenanalyse von Fluoreszenz basiert. Ebenfalls wurde untersucht, wie mit Mikrowellenpulsen und einem stationären Magnetfeldgradienten bis zu acht Ionen (ein Quantenbyte) adressiert werden können. Hierbei wurde demonstriert, dass der resultierende Fehler aus Übersprechen von der Größenordnung  $10^{-5}$  ist. Ein solcher Fehler ist unterhalb der Schwelle, welche die effiziente Anwendung von Methoden der Quantenfehlerkorrekturen erlaubt. Zusätzlich wurde demonstriert, wie der Fehler durch die Wahl geeigneter experimenteller Parameter unterdrückt werden kann. Darüber hinaus wurden Sequenzen von dynamischen Entkopplungspulsen verwendet, um eine kohärente Mehr-Qubit-Dynamik gegenüber einer Dephasierung zu stabilisieren. Die Leistungsfähigkeit und Fehleranfälligkeit unterschiedlicher Pulssequenzen wurden verglichen und eine neuartige robuste Pulssequenz entwickelt. Die Stabilisierung der Quantendynamik über eine Dauer, die fast zwei Größenordnungen länger als die Kohärenzzeit des Systems ist, erlaubte die Erzeugung von verschränkten Zuständen mit einer Fidelity von 0,64(4).



## Abstract

A quantum computer that combines the concepts of digital information processing and quantum physics holds the promise to efficiently solve certain computational problems that are intractable by a classical computer. Furthermore, the so called quantum simulators allow new insights into scientific issues from different research fields that go beyond physics. Currently, one of the most advanced possibility of realizing a quantum computer is based on ions trapped in a Paul trap and using the internal atomic states to store information. By use of electromagnetic radiation the states can be manipulated and information is processed. The presence of a static magnetic field gradient or an oscillating magnetic field allows the use of long wavelength microwave radiation and both approaches have been tested successfully in the past.

This work follows up the first proof of principle experiments employing a static magnetic field gradient. Using three trapped ions a Quantum Fourier transform was performed as an exemplary algorithm. The construction of the algorithm was based on a novel approach that takes into account all present spin-spin couplings in the quantum system and yields a speed-up of a factor of three compared to the conventional construction. In addition, quantum systems with tailored spin-spin couplings intended for quantum simulations have been realized and investigated. In order to achieve this, novel experimental methods have been developed and tested. These include a method to detect qubit states based on time series analysis of fluorescence. Furthermore it was studied, how a static magnetic gradient allows for the addressability of up to eight ions (a quantum byte) by the use of microwave pulses. It was demonstrated that the resulting crosstalk error is of the order of  $10^{-5}$ , which is well below the conventionally accepted threshold for fault-tolerant quantum error correction. In addition, it was demonstrated how the crosstalk error can be suppressed by suitable experimental parameters. Also sequences of dynamical decoupling pulses have been used to protect coherent multi-qubit dynamics from dephasing. The performance and susceptibility to errors of different pulse sequences were compared and a novel and robust pulse sequence was deduced. Stabilizing the quantum dynamics during a period that is almost two orders of magnitude longer than the coherence time of the system allows for the creation of entanglement with a fidelity of 0,64(4).



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1. Quantenzustände . . . . .	7
2.1.1. Qubits . . . . .	7
2.1.2. Ein-Qubit-Gatter . . . . .	9
2.1.3. CNOT-Gatter . . . . .	10
2.1.4. Der Messprozess . . . . .	10
2.1.5. Verschränkung . . . . .	11
2.2. Ytterbium-Ionen . . . . .	12
2.3. Lineare Paul-Falle . . . . .	15
2.3.1. Geschichte der Paul-Falle . . . . .	15
2.3.2. Funktionsprinzip einer linearen Paul-Falle . . . . .	16
2.4. Mehrere Ionen in der Paul-Falle . . . . .	18
2.5. Gespeicherte Ionen in einem Magnetfeldgradienten . . . . .	20
2.5.1. Einfluss eines homogenen Magnetfeldes . . . . .	20
2.5.2. Adressierbarkeit in einem Magnetfeldgradienten . . . . .	22
2.5.3. Kopplung interner und externer Freiheitsgrade . . . . .	22
2.5.4. Spin-Spin-Kopplung . . . . .	25
2.6. Mikrowellenpulse . . . . .	28
2.6.1. Pulse und Drehungen . . . . .	28
2.6.2. Pulsfehler . . . . .	31
2.7. Mehr-Qubit-Gatter und Ising-Hamiltonian . . . . .	34
<b>3. Experimenteller Aufbau</b>	<b>36</b>
3.1. Fallenapparatur in der Vakuumkammer . . . . .	36
3.2. Magnetspulen . . . . .	39
3.3. Lasersysteme . . . . .	40
3.4. Mikrowellensystem . . . . .	41
3.5. Abbildungssystem . . . . .	42
3.6. Experimentsteuerung . . . . .	43

<b>4. Experimentelle Methoden</b>	<b>46</b>
4.1. Bereitstellen lasergekühlter Ionen . . . . .	46
4.1.1. Photoionisation . . . . .	47
4.1.2. Zustandspräparation . . . . .	48
4.1.3. Doppler-Kühlung . . . . .	48
4.1.4. Seitenbandkühlung . . . . .	50
4.2. Messsequenzen . . . . .	51
4.3. Zustandsdetektion . . . . .	53
4.3.1. Zustandsnachweis mit dem Photomultiplier . . . . .	54
4.3.2. Zustandsnachweis mit der EMCCD-Kamera . . . . .	54
4.4. Mikrowellen-optische Doppelresonanz-Spektroskopie . . . . .	57
4.5. Rabi-Oszillationen . . . . .	60
4.6. Ramsey-Experiment . . . . .	64
4.7. Messung von Zustandsgüten . . . . .	66
4.7.1. Ein-Qubit-Zustandsgüten . . . . .	67
4.7.2. Mehr-Qubit-Zustandsgüten . . . . .	69
4.8. Messung der J-Kopplung . . . . .	73
<b>5. Zeitaufgelöste Zustandsdetektion</b>	<b>76</b>
5.1. Fluoreszenzmodell . . . . .	77
5.2. Dynamik der Detektionsfluoreszenz . . . . .	79
5.3. Experimentelle Ergebnisse . . . . .	82
5.3.1. Überpumpraten und Zählraten . . . . .	83
5.3.2. Bestimmung der Photo-Detektionseffizienz . . . . .	85
5.3.3. Vergleich der Detektionsmethoden . . . . .	87
<b>6. Adressierung mit Mikrowellenstrahlung</b>	<b>91</b>
6.1. Adressierung mit Mikrowellen . . . . .	92
6.2. Nicht-resonante Anregung . . . . .	95
6.2.1. Effekt von weit verstimmtten Mikrowellenpulsen . . . . .	95
6.2.2. Benchmarking-Protokoll . . . . .	97
6.3. Experimentell simuliertes Übersprechen . . . . .	99
6.4. Gemessenes Übersprechen in einem Quantenbyte . . . . .	101
6.5. Optimierte Quantenregister . . . . .	106
6.6. Mikrowellen-Lichtverschiebung . . . . .	110
6.7. Zusammenfassung der Fehlerquellen und Ausblick . . . . .	115
6.8. Güte eines Ein-Qubit-Gatters . . . . .	118

<b>7. Dynamische Entkopplung von Quantensystemen</b>	<b>120</b>
7.1. Theoretische Grundlagen . . . . .	124
7.1.1. Dekohärenz . . . . .	124
7.1.2. Spin-Echo-Puls . . . . .	126
7.1.3. Sequenzen von dynamischen Entkopplungspulsen . . . . .	128
7.1.4. Verschiedene Pulssequenzen zur dynamischen Entkopplung . .	130
7.1.5. Dynamische Entkopplungspulse und J-Kopplungen . . . . .	134
7.2. Dynamische Entkopplung eines Einzelqubits . . . . .	140
7.2.1. Dynamische Entkopplung eines Ein-Qubit-Zustands . . . . .	140
7.2.2. Robustes dynamisches Entkoppeln eines Qubits . . . . .	145
7.2.3. Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse . . . . .	147
7.3. Dynamische Entkopplung eines Mehr-Qubit-Systems . . . . .	148
7.3.1. Dynamische Entkopplung von bedingter Zwei-Qubit-Dynamik	149
7.3.2. Robuste dynamische Entkopplung von bedingter Quantendynamik	151
7.3.3. Zwischenfazit der experimentellen Ergebnisse . . . . .	154
7.3.4. Realisierung eines CNOT-Gatters . . . . .	154
7.3.5. Dynamische Entkopplung in einem Drei-Qubit-System . . . .	160
<b>8. Gekoppelte Spinsysteme</b>	<b>170</b>
8.1. Theoretische Grundlagen . . . . .	171
8.1.1. Unterschiedliche Wechselwirkungen . . . . .	171
8.1.2. Änderung der Kopplung durch Basiswechsel . . . . .	172
8.2. Unterschiedliche Kopplungen in einem Drei-Spin-System . . . . .	174
8.2.1. Kopplungen unterschiedlicher Vorzeichen . . . . .	175
8.2.2. Entkopplung eines Einzelspins . . . . .	178
8.2.3. Entkopplung aller Spins . . . . .	183
8.2.4. Zusammenfassung und Ausblick der unterschiedlichen Spin-Sys- teme . . . . .	184
<b>9. Quanten-Fouriertransformation</b>	<b>188</b>
9.1. Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen . . . . .	189
9.2. Optimierte Realisierung . . . . .	192
9.2.1. Theoretischer Vorschlag . . . . .	193
9.2.2. Weitere Vereinfachungen . . . . .	197
9.2.3. Dynamik der QFT . . . . .	200
9.3. Ergebnisse der QFT . . . . .	202
9.3.1. Charakterisierung der Fidelity . . . . .	202
9.3.2. Diskussion der Fehlerquellen . . . . .	206
9.3.3. Simulation der Fehlerquellen . . . . .	208
9.3.4. Periodenbestimmung von Quantenzuständen . . . . .	211

9.3.5. Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse und Ausblick	215
<b>10. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>216</b>
<b>A. Publikationsliste</b>	<b>220</b>
<b>B. Geräteliste</b>	<b>221</b>
<b>C. Physikalische Größen</b>	<b>224</b>
<b>D. Laserspektren</b>	<b>225</b>
D.1. Laserspektrum des Rückpumpübergangs . . . . .	227
D.2. Laserspektrum des Kühlübergangs . . . . .	231
<b>E. Optimierung der Resonanzfluoreszenz</b>	<b>234</b>
E.1. Fluoreszenzmodell . . . . .	234
E.2. Einstellung der Laserpolarisationen . . . . .	235
E.3. Abhängigkeit von dem Magnetfeld . . . . .	238
<b>F. Benchmarking-Protokoll zum Messen nicht-resonanter Anregung</b>	<b>240</b>
<b>G. Drift der Adressierungsfrequenzen</b>	<b>244</b>
<b>H. Die Pauli-Matrizen</b>	<b>249</b>
H.1. Darstellungen der Pauli-Matrizen . . . . .	249
H.2. Eigenschaften der Pauli-Matrizen . . . . .	250
H.3. Nützliche Relationen . . . . .	250
<b>I. Berechnungen zur dynamischen Entkopplung</b>	<b>252</b>
I.1. Anwendung eines Spin-Echo-Pulses . . . . .	252
I.2. Dynamische Entkopplung eines Mehr-Qubit-Systems . . . . .	253
<b>J. Simulationen zur dynamischen Entkopplung</b>	<b>257</b>
J.1. Ergebnisse . . . . .	257
J.1.1. Pulse gleicher Phase . . . . .	258
J.1.2. Pulse mit alternierenden Phasen . . . . .	259
J.1.3. Robuste Pulse und selbtkorrigierende Sequenzen . . . . .	260
J.1.4. Komplexere Pulssequenzen . . . . .	261
J.1.5. Bedingte Zwei-Qubit-Dynamik . . . . .	263
J.2. Quellcodes . . . . .	264
J.2.1. Quellcode für Ein-Qubit-Zustand . . . . .	264

J.2.2. Quellcode für bedingte Zwei-Qubit-Dynamik . . . . .	267
<b>K. Filterfunktionen</b>	<b>270</b>
<b>L. Quellcode zu Simulationen der QFT</b>	<b>272</b>
<b>M. Parameter der EMCCD-Kamera</b>	<b>277</b>



# 1

## Einleitung

In unserer digitalisierten Alltagswelt wird Information in einer binären Logik durch elementare Informationsträger - den sogenannten Bits - dargestellt. Jedes Bit kann dabei nur einen von zwei möglichen Zuständen einnehmen. Diese werden als logisch 0 und logisch 1 bezeichnet. Bei elektronischen Geräten, so wie dem Computer, auf dem die vorliegende Dissertation geschrieben wird, werden diese Zustände durch Spannungspegel realisiert und unterschieden. Ein Spannungspegel dazwischen entspricht einem undefinierten Zustand, der nicht interpretiert werden kann.

Die digitale Datenverarbeitung ist in dem letzten halben Jahrhundert ein kennzeichnendes Merkmal der menschlichen Zivilisation geworden. Die Entwicklung wurde dabei von Fortschritten der Mikroelektronik angetrieben, die immer preisgünstigere Speicherbausteine, Prozessoren und Datenkommunikation ermöglichten [1]. Mit der klassischen Digitalelektronik ist es heute alltäglich, Information lokal zu speichern, zu verarbeiten und zwischen unterschiedlichen Datenverarbeitungsgeräten auszutauschen. Somit ist es möglich, eine elektronische Kopie des vorliegenden Textes weltweit auf unterschiedliche Computer zu kopieren, dort zu lesen oder zu bearbeiten. Eine globale Verfügbarkeit beliebig vieler Kopien von Information führt jedoch auch zu Bedenken hinsichtlich der Privatsphäre und dem Schutz der eigenen Daten.

Die Quanteninformationsverarbeitung beschäftigt sich als Wissenschaft mit der Verarbeitung von Information, die im Gegensatz zu den klassischen Bits in sogenannten Quantenbits (Qubits) als elementaren Informationsträgern kodiert wird. Das Verhalten der Qubits wird dabei von den Gesetzen der Quantenphysik beschrieben. Dieses hat

## 1. Einleitung

---

grundlegende Konsequenzen und führt zu Besonderheiten, die ein Qubit von einem klassischen Bit unterscheiden. In Analogie zu dem klassischen Bit kann sich der Zustand in einem der beiden Zustände quantenlogisch  $|0\rangle$  bzw. quantenlogisch  $|1\rangle$  befinden. Das Superpositionsprinzip der Quantenphysik erlaubt es jedoch auch, dass sich ein Qubit in einer Überlagerung aus diesen beiden Basiszuständen befindet. Im Gegensatz zur klassischen Informationsverarbeitung ist ein solcher Zustand jedoch eben nicht undefiniert. Darüber hinaus existieren für mehrere Qubits sogenannte verschränkte Zustände, die sich nicht in klassischer Analogie durch die Zustände der einzelnen Qubits beschreiben lassen. Somit ist eine komplexere und effizientere Logik möglich.

Als Geburtsstunde der Quanteninformationsverarbeitung gelten die Arbeiten aus dem Jahre 1982 von Benioff [2] und Feynman [3], in denen sie die Frage stellen, wie Quantensysteme klassische Informationsverarbeitung simulieren können bzw. wie umgekehrt klassische Informationsverarbeitung Quantensysteme simulieren kann [1]. Feynman prägte dabei den Begriff des Quantencomputers als einem Gerät, welches die Gesetze der Quantenphysik ausnutzt, um möglichst effektiv<sup>1</sup> das Verhalten von quantenmechanischen Vielteilchensystemen zu beschreiben. Der Beweis, dass ein Quantencomputer tatsächlich geeignet ist, jedes beliebige Quantensystem effektiver als jeder klassischer Computer zu simulieren, stammt von Bernstein und Vazirani [4] aus dem Jahre 1993.

Die Realisierung eines Quantencomputers ermöglicht somit die effektive Simulation von Quantensystemen. Dabei wird ein Quantensystem, das sich experimentell wohl kontrollieren lässt, dazu verwendet, die statischen oder dynamischen Eigenschaften eines anderen, experimentell unzugänglichen Systems zu untersuchen [3]. Mögliche Forschungsfelder reichen hierbei beispielsweise von Quantenfeldtheorien [5], der Dynamik von Molekülen [6] bis hin zur Kosmologie [7].

Neben der Simulation komplexer quantenmechanischer Vielteilchensysteme lassen sich auch andere Probleme mit einem Quantencomputer lösen. Hierfür werden Algorithmen entwickelt, die auf der Logik eines Quantencomputers basieren und effektiver<sup>2</sup> als klassische Algorithmen sein können. Die wahrscheinlich prominenteste Beispiele sind dabei die Primfaktorzerlegung großer Zahlen und damit das mögliche Überwinden klassischer Kryptographieverfahren mittels des sogenannten Shor-Algorithmus [8] sowie

---

<sup>1</sup>Der Begriff „effektiv“ bezieht sich in diesem Kontext auf die Menge an Information, die verarbeitet werden muss. Zur Simulation eines Systems von  $N$  Spin-1/2-Systemen muss ein klassischer Computer  $2^N$  komplexe Zahlen verarbeiten. Zur Simulation des gleichen Problems mit Hilfe eines Quantencomputer sind hingegen nur  $N$  Qubits notwendig.

<sup>2</sup>Bei Quantenalgorithmen bezieht sich der Begriff „effektiv“ auf die Anzahl an notwendigen Gatteroperation, um den Algorithmus auszuführen. Ein prominentes Beispiel ist dabei die Primfaktorzerlegung einer Zahl mit  $l$  Stellen. Die Anzahl der Gatteroperationen des besten bekannten klassischen Algorithmus wächst an wie  $\exp(c l^{1/3})(\log l)^{2/3}$ . Für einen Quantenalgorithmus hingegen wächst die Anzahl lediglich wie  $l^2 \log l \log \log l$ .

---

das Durchsuchen großer ungeordneter Datenbanken [9]. Weitere Quantenalgorithmen lösen algebraische Probleme [10; 11] oder Probleme der Datenanalyse [12].

Auch wenn ein Quantencomputer für die sogenannte Quantenkommunikation nicht unbedingt notwendig ist, so erleichtert er doch eine inhärent abhörsichere Kommunikation über lange Wegstrecken hinweg. Für das Versenden von abhörsicherer Quanteninformation eignen sich Polarisationszustände einzelner Photonen als mögliche fliegende Qubits, was im Jahr 1984 von Bennett als Kommunikationsprotokoll formuliert wurde [13]. In der Praxis basiert ein solches Kommunikationsnetzwerk auf Glasfaserkabeln als Lichtleitern. Aufgrund der möglichen Absorption von Photonen in der Glasfaser ist jedoch die praktisch erreichbare Wegstrecke, über die eine effiziente Quantenkommunikation möglich ist, begrenzt. Eine Möglichkeit diese lokale Begrenzung zu überwinden ist ein sogenannter Quanten-Repeater [14]. Hierbei handelt es sich um einen Quantencomputer, der ein Photon empfängt, den Zustand aufbereitet und ein neues Photon mit dem Zustand des Eingangsphotons aussendet<sup>3</sup>.

Bei der Realisierung eines Quantencomputers stellt sich die Frage, welches physikalische System hierfür prinzipiell beziehungsweise am besten geeignet ist. Eine Checkliste zur Entscheidungsfindung hierfür stammt von DiVincenzo [15] und lautet:

- Das System muss die Realisierung einzelner wohldefinierter Qubits erlauben und skalierbar sein.
- Die Qubits müssen sich, bevor weitere quantenlogische Operationen angewandt werden, in einem wohldefinierten Anfangszustand initialisieren lassen.
- Die Kohärenzzeit des Systems muss länger sein als die Dauer der quantenlogischen Operationen.
- Es muss sich ein universeller Satz an quantenlogischen Operationen realisieren lassen, aus denen sich jeder beliebige Quantenalgorithmus konstruieren lässt.
- Das Auslesen der einzelnen Qubitzustände muss möglich sein.

Soll der Quantencomputer zusätzlich Quanteninformation über sogenannte Quantenkanäle mit einem anderen Quantencomputer über lange Wegstrecken hinweg austauschen, so müssen zwei weitere Bedingungen erfüllt sein.

- Der Zustand eines stationären Qubits in einem Quantencomputer muss auf ein sogenanntes fliegendes Qubit übertragen werden können und umgekehrt.
- Fliegende Qubits müssen zwischen unterschiedlichen Quantencomputern übertragen werden können.

---

<sup>3</sup>Das Eingangsphoton wird dabei zerstört und sein Zustand bleibt unbekannt.

Die ersten Verwirklichungen des Prototypen eines Quantencomputers geschahen mittels Kernresonanzspektroskopie an makroskopischen Ensembles<sup>4</sup> von Molekülen einer flüssigen Lösung. Die Quanteninformation war dabei in den Freiheitsgraden des Ensembles von Kernspins kodiert. Eine Adressierbarkeit der Qubits ist in solchen Systemen aufgrund unterschiedlicher Resonanzfrequenzen der Kernspins gegeben und eine Manipulation der einzelnen Qubits geschieht mit Radiofrequenzpulsen. Zur Kopplung der Qubits dient eine J-Kopplung der Kernspins untereinander [1]. Auch wenn mit solchen Systemen die ersten experimentellen Untersuchungen zur Quanteninformationsverarbeitung, wie beispielsweise die Verwirklichung von Ein- und Zwei-Qubit-Gattern sowie der Shor-Algorithmus zur Primfaktorzerlegung durchgeführt werden konnten [16], gelten sie als wenig zukunftssträftig. Dieses liegt daran, dass die Information in einem statistischen Ensemble kodiert ist und die Architektur des Quantencomputers von der Molekülstruktur fest vorgegeben ist und nicht skalierbar ist [17].

Ein anderes physikalisches System, das hingegen als skalierbar gilt, basiert auf einzelnen elektrodynamisch gespeicherten atomaren Ionen. Hierbei werden einzelne atomare Ionen mittels elektrodynamischer Potenziale in einer Elektrodenstruktur isoliert. Der konkrete Vorschlag, wie mittels gespeicherter Ionen ein Quantencomputer realisiert werden könnte, stammt von Cirac und Zoller aus dem Jahre 1995 [18]. Die gespeicherten Ionen ordnen sich dabei innerhalb der Elektrodenstruktur, einer sogenannten Paul-Falle, linear zu einer Kette an. Mittels Laserlichtpulsen können interne Freiheitsgrade jedes einzelnen Ions kontrolliert werden, wodurch jedes Ion der Träger eines Qubits wird, dessen Zustand manipuliert werden kann. Eine Wechselwirkung der Ionen und somit eine Kopplung von Qubits geschieht über kollektive Schwingungsanregungen. Systeme, die auf gespeicherten atomaren Ionen basieren, haben die Untersuchung von Grundlagen der Quanteninformationsverarbeitung sowie das Ausführen von Quantenalgorithmen und Quantensimulationen erlaubt [19; 20] und gelten heute als am weitesten fortgeschritten auf dem Weg zu einem Quantencomputer.

Für die Realisierung eines zuverlässigen Quantencomputers ist es notwendig, dass die Fehler der einzelnen logischen Operationen klein sind, da sich dann Methoden der Quantenfehlerkorrektur [21; 22] anwenden lassen. Die Schwelle von  $10^{-4}$  gilt hierfür als konservative Abschätzung [22; 23]. Bei der Verwendung von Laserlichtpulsen zur Manipulation der Qubits gibt es jedoch technische Herausforderungen, welche die Güte der Operationen begrenzen. Für Laserlicht im sichtbaren Spektralbereich entspricht eine Kohärenzzeit auf der Skala von Sekunden einer relativen Frequenzstabilität von der Größenordnung  $10^{-15}$ . Dies ist zwar technisch möglich, jedoch experimentell sehr herausfordernd. Ein weiteres grundlegendes Problem besteht darin, dass die verwendeten Laserlichtpulse die Ionen zu Emission anregen können, welche den Zustand des Qubits zerstört. Aufgrund dieser Probleme war es bisher mittels Laserlichtpulsen nicht

---

<sup>4</sup>etwa  $10^{20}$  Moleküle

---

möglich, Quantengatter mit einer Qualität zu erreichen, die Fehlerkorrekturen erlauben würde.

Im Jahre 2001 wurde vorgeschlagen, Mikrowellenpulse zur Manipulation der atomaren Ionen und den in ihnen kodierten Qubits zu verwenden [24]. Bei der Verwendung von Mikrowellenpulsen kann man die beiden oben diskutierten Herausforderungen umgehen. Darüber hinaus sind aufgrund ihrer Verbreitung in der Telekommunikationstechnologie Mikrowellenquellen von einer hohen Güte kommerziell erhältlich. An einzelnen Qubits lassen sich heute somit Gatter mit einem Fehler unter  $10^{-4}$  demonstrieren [25; 26]. Bei der Anwendung von der im Vergleich zu Licht langwelliger elektromagnetischer Strahlung für die Quanteninformationsverarbeitung mit mehreren gespeicherten Ionen ergeben sich jedoch zwei Hindernisse. Erstens ist es nicht möglich, Mikrowellenstrahlung auf die Ruheposition einzelner ausgewählter Ionen zu fokussieren und diese somit zu adressieren. Zweitens haben Mikrowellenphotonen einen zu geringen Impuls um Schwingungsmoden anzuregen und somit Ionen miteinander wechselwirken zu lassen. Diese beiden nur scheinbaren Hindernisse lassen sich jedoch ausräumen, wenn sich die Ionen in einem Magnetfeldgradienten befinden und die Qubit-Zustände in magnetfeldabhängige Hyperfeinzustände kodiert werden. Der Magnetfeldgradient führt dann zum einen dazu, dass unterschiedliche Ionen auch unterschiedliche Zeeman-Aufspaltungen aufweisen und somit im Frequenzraum adressiert werden können. Zum anderen induziert der Gradient eine Kopplung zwischen den internen und externen Freiheitsgraden eines Ions und eine Kopplung zwischen mehreren Ionen untereinander. Daher verhält sich dann eine Kette gespeicherter atomarer Ionen wie ein einzelnes Molekül, an dem Kernspinresonanzspektroskopie durchgeführt werden kann. Anstatt die Quanteninformation in einem statistischen Ensemble identischer Moleküle zu verarbeiten geschieht dieses hierbei jedoch in einem wohlkontrollierten und reinen Quantensystem. Die Stärke der J-Kopplung lässt sich durch experimentelle Parameter variieren und somit wird ein solches System auch als maßgeschneidertes Spin-Molekül (designer spin molecule) bezeichnet.

Bisher wurde experimentell demonstriert, wie in einem Magnetfeldgradienten einzelne Ionen mit Radiofrequenzpulsen im Frequenzraum adressiert werden können [27; 28]. Darüber hinaus wurde ebenfalls an dem gleichen Experiment eine Spin-Phonon-Kopplung erstmalig nachgewiesen [28]. An einer Weiterentwicklung des experimentellen Aufbaus wurde dann eine J-Kopplung zwischen zwei und drei Ionen nachgewiesen und untersucht, wie sich die Kopplungsstärke durch die Stärke des Fallenpotenzials kontrollieren lässt [29]. An dem gleichen Aufbau wurde ebenfalls ein einzelnes Ion unter Ausnutzung der vom Gradienten induzierten Spin-Phonon-Wechselwirkung bis nahe an den Bewegungsgrundzustand gekühlt [30]. Eine Herausforderung, die sich aus der Verwendung magnetfeldabhängiger Zustände ergibt, ist die Rauschanfälligkeit, die zu einer schnellen Dekohärenz führen kann. Mittels Methoden der dynamischen Entkopplung ist es jedoch möglich, die Systeme von der Umgebung zu isolieren und somit

ihre Kohärenzzeit zu verlängern [31; 32]. Daher gelten heute Systeme, die auf gespeicherten atomaren Ionen basieren und mit Mikrowellenpulsen manipuliert werden, als aussichtsreiche Kandidaten für die Realisierung eines Quantencomputers und konkrete Vorschläge hierfür existieren bereits [33].

Die in der vorliegenden Dissertation beschriebenen experimentellen Arbeiten knüpfen an die vorherigen Untersuchungen an, wie in einem Magnetfeldgradienten gespeicherte atomare Ionen für die Quanteninformation verwendet werden können. Nach einer Zusammenfassung der für das Verständnis notwendigen theoretischen Grundlagen in Kapitel 2 wird der verwendete experimentelle Aufbau in dem Kapitel 3 beschrieben. Das Kapitel 4 enthält eine Beschreibung der verwendeten experimentellen Methoden. Danach werden die Ergebnisse dieser Dissertation beschrieben.

Das Kapitel 5 beschäftigt sich mit dem optimierten Zustandsnachweis eines einzelnen Qubits, der auf der Zeitreihenanalyse von Fluoreszenzphotonen beruht. In dem Kapitel 6 wird untersucht, wie in einer Kette von mehreren Ionen einzelne Qubits gezielt adressiert und manipuliert werden können. Das Übersprechen, also die unbeabsichtigte Manipulation der anderen Qubits, wird dabei mit einem neuartigen Protokoll präzise gemessen, wobei alle dominierenden Fehlerquellen berücksichtigt und diskutiert werden. Die Verlängerung der Kohärenzzeit des Systems mittels dynamischer Entkopplungspulsen wird in dem Kapitel 7 untersucht. Am Anfang steht dabei die Diskussion anhand eines einzelnen Qubits und es werden unterschiedliche Pulssequenzen hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit und Fehlertoleranz verglichen. Ein Ergebnis ist dabei eine neuartige Pulssequenz, die besonders robust gegenüber Pulsfehlern ist. Darauf aufbauend wird untersucht, wie mittels Pulssequenzen die Kohärenz eines Mehr-Qubit-Systems während der Dynamik eines bedingten Zwei-Qubit-Gatters stabilisiert werden kann und sich somit die Güte des Gatters verbessern lässt.

In den Kapiteln 8 und 9 werden die Resultate und Methoden aus den vorherigen Kapiteln verwendet, um den Prototypen eines Quantensimulators beziehungsweise Quantencomputers zu realisieren. Hierbei wird in dem Kapitel 8 ein System aus drei gekoppelten Spins vorgestellt, bei dem die Kopplung zwischen einzelnen Spins gezielt und flexibel kontrolliert werden kann. In dem Kapitel 9 wird ein System aus spingekoppelten Ionen dazu verwendet einen Quantenalgorithmus auszuführen. Als Beispiel wurde hierfür, aufgrund ihrer Bedeutung als Unterroutine für viele andere Quantenalgorithmen die Quanten-Fouriertransformation ausgewählt.

Der Anhang enthält unter anderem weitere Detailinformationen zu den verwendeten Geräten, den experimentellen Methoden und durchgeführten Berechnungen.

# 2

## Theoretische Grundlagen

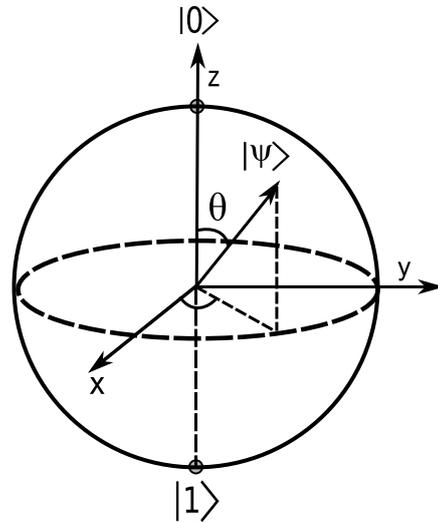
In diesem Kapitel wird die für das Verständnis der durchgeführten Experimente notwendige Theorie zusammengefasst. Angefangen wird dabei mit den Quantenbits, deren besondere Eigenschaften aus der Quantenmechanik folgen. Hieran schließt sich die Darstellung an, wie ein Quantenbit durch ein Ytterbium-Ion realisiert werden kann. Des Weiteren folgt die Diskussion, wie ein solches einzelnes Ion oder ein System von mehreren Ionen in einer linearen Ionenfalle gespeichert werden kann und somit experimentell zugänglich wird. Der Abschnitt 2.5 beschreibt die Besonderheiten, die sich aus dem Vorhandensein eines Magnetfeldgradienten ergeben. Dieser führt zu einer induzierten Kopplung, die einerseits interne und externe Freiheitsgrade eines einzelnen Ions koppelt und andererseits auch eine Spin-Spin-Wechselwirkung zwischen mehreren Ionen hervorruft. Die beiden letzten Abschnitte 2.6 und 2.7 beschreiben, wie Ein- und Mehr-Qubit-Gatter mittels Mikrowellenpulsen und Wartezeiten experimentell realisiert werden können.

### 2.1. Quantenzustände

#### 2.1.1. Qubits

Analog zu klassischer Informationsverarbeitung basiert die Quanteninformationsverarbeitung auf elementaren Trägern von Information, den sogenannten Quantenbits oder Qubits. Ein solches Qubit kann sich, im Gegensatz zu einem klassischen Bit, das jeweils nur den logischen Zustand „0“ oder „1“ einnehmen kann, allgemein auch in einen

**Abbildung 2.1:** Darstellung der Bloch-Kugel eines Qubits im reinen Superpositionszustand  $|\psi\rangle$ . Der Zustandsvektor zeigt vom Ursprung aus auf einen Punkt auf der Kugeloberfläche, der von dem Polarwinkel  $\vartheta$  und dem Azimutwinkel  $\phi$  beschrieben wird. Die Pole entsprechen den beiden Basiszuständen  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  des Qubits, die auch ein klassisches Bit einnehmen kann.



sogenannten Superpositionszustand

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (2.1.1)$$

befinden. Die Zustände  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  bezeichnen dabei zwei mögliche Basiszustände und  $a$  und  $b$  sind komplexe Zahlen, die durch die Normierungsbedingung

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (2.1.2)$$

miteinander verknüpft sind. Aufgrund dieser Verknüpfung kann ein beliebiger Zustand auch dargestellt werden als

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle, \quad (2.1.3)$$

wobei  $\vartheta$  und  $\phi$  reellen Werten entsprechen, die als Winkel in einem sphärischen Koordinatensystem interpretiert werden können. Dieses ist die sogenannte Bloch-Kugel [17], anhand welcher der Zustand und die Zustandsänderungen eines einzelnen Qubits anschaulich diskutiert werden können. Eine solche Darstellung des Zustands  $|\psi\rangle$  anhand der Blochkugel ist in der Abbildung 2.1 zu finden. Die beiden Basiszustände bilden jeweils die Pole der Kugel und der Zustand ist wegen seiner Normierung auf der Oberfläche zu finden. Der Winkel  $\vartheta$  ist dabei der Polarwinkel und  $\phi$  der Azimutwinkel.

Die Zustandsänderung eines Qubits kann, wie die zeitliche Änderung eines Quantensystems allgemein, durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (2.1.4)$$

beschrieben werden. Dabei entspricht  $H$  dem Hamilton-Operator des physikalischen Systems, welches das Qubit realisiert. Für einen zeitunabhängigen Hamilton-Operator  $H$  folgt die formale Lösung der Schrödinger-Gleichung in Form eines Zeitentwicklungsoperators

$$U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (2.1.5)$$

und lautet

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0) |\psi(t=0)\rangle. \quad (2.1.6)$$

Eine allgemeinere Darstellung des Zustands eines Einzelqubits bzw. eines Systems von mehreren Qubits ist die sogenannte Dichtematrix [17]

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.1.7)$$

wobei  $p_i$  den relativen Anteil des Zustands  $|\psi_i\rangle$  an dem Zustandsensemble bezeichnet. Mit dem Formalismus der Dichtematrix ist es möglich, auch sogenannte gemischte Zustände zu beschreiben, bei denen man nur die Wahrscheinlichkeiten weiss, mit denen sich das System in einem bestimmten Zustand befindet. In der Darstellung der Bloch-Kugel befindet sich ein gemischter Ein-Qubit-Zustand nicht länger auf der Oberfläche, sondern näher an dem Ursprung des Koordinatensystems. Die Zeitentwicklung einer Dichtematrix folgt aus dem Hamilton-Operator des Systems und wird durch die von-Neumann-Gleichung beschrieben.

### 2.1.2. Ein-Qubit-Gatter

Die Änderung des Zustands eines Qubits - also eines elementaren Informationsträgers - ist eine grundlegende Operation der Quanteninformationsverarbeitung. Eine solche Zustandsänderung kann als Drehung des Zustandsvektors mittels des Drehoperators

$$R_n(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \quad (2.1.8)$$

mit der Drehachse  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$  und dem Drehwinkel  $\theta$  beschrieben werden. Es ist hervorzuheben, dass sich aus Drehungen um die  $x$ - und  $y$ -Achse alle beliebigen Drehungen des Zustandsvektors eines Qubits realisieren lassen [34].

Ein Beispiel für ein Ein-Qubit-Gatter ist das sogenannte Hadamard-Gatter, das ein Qubit aus dem Zustand  $|0\rangle$  in den Superpositionszustand  $1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$  bringt. Im Bild der Bloch-Kugel wird der Zustandsvektor also vom Nordpol auf die  $x$ -Achse in der Äquatorebenen gedreht. Ein anderes Gatter ist das NOT-Gatter, welches die beiden Zustände  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  verknüpft und zu einem entsprechenden Zustandswechsel führt.

### 2.1.3. CNOT-Gatter

Neben der Zustandsänderung einzelner unabhängiger Qubits ist die bedingte Zustandsänderung eines Qubits eine weitere grundlegende Operation. Dabei ändert ein sogenanntes Ziel-Qubit seinen Zustand nur dann, wenn sich ein sogenanntes Kontroll-Qubit im Zustand  $|1\rangle$  befindet. Die Wahrheitstafel eines solchen kontrollierten NOT-Gatters (CNOT: controlled NOT) lautet

$$\begin{aligned} |0\rangle|0\rangle &\rightarrow |0\rangle|0\rangle \\ |0\rangle|1\rangle &\rightarrow |0\rangle|1\rangle \\ |1\rangle|0\rangle &\rightarrow |1\rangle|1\rangle \\ |1\rangle|1\rangle &\rightarrow |1\rangle|0\rangle, \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

wobei das erste Qubit das Kontroll-Qubit und das zweite das Ziel-Qubit ist. Neben dem CNOT-Gatter gibt es auch weitere Logikgatter, die auf mehr als zwei Qubits basieren. Jedoch ist es prinzipiell möglich aus beliebigen Ein-Qubit-Rotationen und einem CNOT-Gatter jede beliebige quantenlogische Verknüpfung zu konstruieren, was die Bedeutung dieses Sets von Gattern hervorhebt [17].

### 2.1.4. Der Messprozess

Bei der Messung von Qubitzuständen handelt es sich um eine Projektionsmessung, bei der ein Qubit jeweils entweder im Zustand  $|0\rangle$  oder  $|1\rangle$  nachgewiesen wird. Beschreiben lässt sich dieses durch Anwendung eines Messoperators  $M_m$  auf den Zustand  $|\psi\rangle$ , bei dem der Index  $m = 0,1$  den resultierenden Messwert bezeichnet [17]. Die beiden Messoperatoren lauten

$$M_0 = |0\rangle\langle 0| \text{ und} \tag{2.1.10}$$

$$M_1 = |1\rangle\langle 1|. \tag{2.1.11}$$

Die Wahrscheinlichkeit, für den beliebigen kohärenten Superpositionszustand aus (2.1.1) nach einer Projektionsmessung das Ergebnis 0 zu erhalten, ist dann

$$p(0) = \langle \psi | 0 \rangle \langle 0 | \psi \rangle = |a|^2. \tag{2.1.12}$$

Analog wird das Ergebnis 1 mit einer Wahrscheinlichkeit  $|b|^2$  vorgefunden. Durch die Normierungsbedingung (2.1.2) des Zustands sind diese beiden Wahrscheinlichkeiten miteinander verknüpft.

Für den Zustand  $|\psi'\rangle$  nach der Projektionsmessung gilt

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} \tag{2.1.13}$$

und es ist ersichtlich, dass dieser (bis auf einen irrelevanten Phasenfaktor) entweder der Zustand  $|0\rangle$  oder  $|1\rangle$  ist. Die Messung projiziert also einen beliebigen Zustand, in dem sich ein Qubit direkt vor der Messung befindet, auf einen der beiden Basiszustände.

### 2.1.5. Verschränkung

Der Zustandsraum eines zusammengesetzten Quantensystems entspricht dem Produkt-raum der einzelnen Quantensysteme. Bei der obigen Diskussion von Mehr-Qubit-Gattern wurde daher ein System aus zwei Qubits durch das Produkt von Einzelqubit-zuständen

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle \quad (2.1.14)$$

dargestellt. Eine Besonderheit der Quantenmechanik ist dabei, dass es Zustände gibt, die sich nicht als einfaches Produkt aus Einzelqubit-zuständen darstellen lassen. Solche Zustände werden verschränkte Zustände genannt und bilden eine Grundlage für Quanteninformationsverarbeitung. Ein solcher verschränkter Zwei-Qubit-Zustand ist beispielsweise einer der sogenannten Bell-Zustände [17]

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle). \quad (2.1.15)$$

Verschränkte Zustände zeichnen sich durch eine nicht-klassische Korrelation aus. Für den Zustand  $|\Phi^+\rangle$  soll diese Korrelation exemplarisch erläutert werden. Misst man das erste Qubit, so findet man es mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/2$  jeweils in dem Zustand  $|0\rangle$  oder  $|1\rangle$ . Nach dieser Messung befindet sich das System in dem Zustand  $|0\rangle|0\rangle$  bzw.  $|1\rangle|1\rangle$  und die Messung an dem zweiten Qubit ist vollständig korreliert mit dem Ergebnis der Messung an dem ersten Qubit. Diese Korrelation ist klassisch und kann auch durch einen gemischten Zustand in Form der Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle\langle 0|\langle 0| + |1\rangle|1\rangle\langle 1|\langle 1|) \quad (2.1.16)$$

beschrieben werden. Die Verschränkung zeigt sich erst in dem nicht-klassischen Charakter der Korrelationen, die auch bei der Messung in weiteren unterschiedlichen Basen<sup>1</sup> zu finden sind.

Erzeugen lässt sich ein solcher Bell-Zustand  $|\Phi^+\rangle$  mittels eines Hadamard- und eines CNOT-Gatters. Dabei wird zuerst das Kontroll-Qubit in einen Superpositionszustand gebracht.

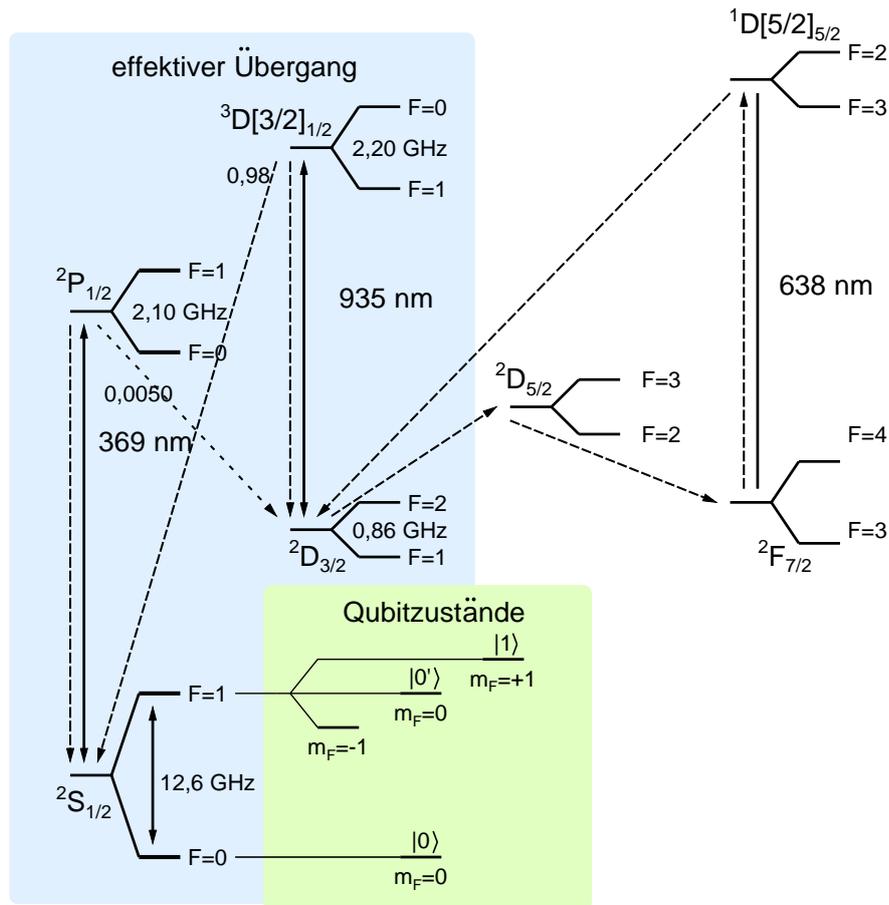
$$|0\rangle|0\rangle \xrightarrow{\text{Hadamard}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \quad (2.1.17)$$

<sup>1</sup>Beispielsweise entlang der x- bzw. y- anstatt der z-Achse.

und das folgende CNOT-Gatter führt schließlich zu dem Bell-Zustand.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \quad (2.1.18)$$

## 2.2. Ytterbium-Ionen



**Abbildung 2.2.:** Für die Arbeit relevantes Termschema von  $^{171}\text{Yb}^+$ . Wichtige Übergänge sind als durchgezogene Linien angedeutet. Bedeutende Zerfälle sind hingegen getrichelt dargestellt. In der Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands können Qubits realisiert werden (grün hinterlegt). Ein effektiver Kühlübergang bei 369 nm wird mit Hilfe eines Rückpumpübergangs bei 935 nm geschlossen (blau hinterlegt).

Alle in dieser Arbeit präsentierten Experimente wurden mit einfach positiv geladenen Ytterbium-Ionen des Isotops  $^{171}\text{Yb}$  durchgeführt. Zwar findet in dem experimentellen

Aufbau auch das Isotop  $^{172}\text{Yb}$  Verwendung, jedoch beschränkt sich diese auf das Einrichten der Ionenfalle, der Lasersysteme und der Detektionsoptik. Der Grund für die Wahl von Ytterbium zur Quanteninformationsverarbeitung mit gespeicherten Ionen liegt in dem Termschema begründet, das in Abbildung 2.2 für  $^{171}\text{Yb}^+$  dargestellt ist. Dieses Ion besitzt einen Kernspin von  $\frac{1}{2}\hbar$  und der Grundzustand  $^2S_{1/2}$  erfährt somit eine Hyperfeinaufspaltung in die Zustände  $^2S_{1/2}, F = 0$  und  $^2S_{1/2}, F = 1$ . Mit einem externen Magnetfeld kann die Entartung der Niveaus  $^2S_{1/2}, F = 1$  in die Zeeman-Niveaus mit  $m_F = \pm 1$  und  $m_F = 0$  aufgehoben werden. Für die typischen Magnetfelder von einigen Gauß beträgt die Zeeman-Aufspaltung zwischen den Zuständen mit  $m_F = \pm 1$  und dem mit  $m_F = 0$  einige Megahertz. In den vier Hyperfeinniveaus des Grundzustands lassen sich mögliche Qubits realisieren. Eine Wahl sind die Zustände

$$|^2S_{1/2}, F = 0\rangle \equiv |0\rangle \text{ und } |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = \pm 1\rangle \equiv |1\rangle. \quad (2.2.1)$$

Ein anderes Qubit lässt sich mit den Zuständen

$$|0\rangle \text{ und } |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle \equiv |0'\rangle \quad (2.2.2)$$

realisieren. Die Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands beträgt für die verwendeten Magnetfelder etwa 12,6 GHz [35] und somit können die Qubits mittels Mikrowellenstrahlung manipuliert werden. Die Hyperfeinzustände  $^2S_{1/2}, F = 1$  unterliegen keiner longitudinalen Dekohärenz und ihre Lebensdauer wird somit lediglich von der unbeabsichtigten Streuung von Photonen nahe 369 nm begrenzt.

Für die Quanteninformationsverarbeitung haben die Qubits des magnetischen  $\pi$ -Übergangs ( $\Delta m_F = 0$ ) bzw. des magnetischen  $\sigma^\pm$ -Übergangs ( $\Delta m_F = \pm 1$ ) verschiedene Eigenschaften und Vorzüge. Der in erster Ordnung magnetfeldabhängige  $\sigma$ -Übergang erlaubt eine Kopplung von unterschiedlichen Qubits (siehe Abschnitt 2.5.4) und die individuelle Adressierung mittels Mikrowellenstrahlung (siehe Abschnitt 2.5). Die Magnetfeldabhängigkeit führt jedoch dazu, dass Magnetfeldrauschen zu einer Dephasierung und somit zur Dekohärenz der Qubits führen kann.

Der Übergang  $|0\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$  ist hingegen in erster Ordnung magnetfeldunabhängig und wird daher von Magnetfeldrauschen kaum beeinflusst. Aus diesem Grund weisen Qubits in diesem sogenannten Uhren-Übergang eine lange Kohärenzzeit auf [36]. Die Magnetfeldunabhängigkeit unterdrückt jedoch ebenfalls die Kopplung an andere Qubits und verhindert die individuelle Adressierbarkeit mit Mikrowellenstrahlung. Im Kontext von Quanteninformationsverarbeitung erlaubt die Kodierung von Information in diesem Übergang die Isolierung von Qubits und somit die Realisierung von Quantenspeichern mit einer langen Kohärenzzeit (vgl. auch Kapitel 8).

Neben den Hyperfeinübergängen des Grundzustands ist der Übergang  $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$  nahe 369 nm für die beschriebenen Experimente von großer Bedeutung. Der Kernspin von  $\frac{1}{2}\hbar$  führt zu einer Hyperfeinaufspaltung des angeregten Zustands  $^2P_{1/2}$  in

## 2. Theoretische Grundlagen

---

${}^2P_{1/2}, F = 0$  und  ${}^2P_{1/2}, F = 1$  von etwa 2,1 GHz [37]. Seine natürliche Lebensdauer beträgt 8,07 ns, was einer natürlichen Linienbreite von  $\gamma = 2\pi \times 19,6$  MHz entspricht [38; 39]. Aus diesem Grund ist es möglich, die unterschiedlichen Hyperfeinübergänge des Übergangs mit Laserlicht nahe 369 nm aufzulösen beziehungsweise gezielt zu treiben. Welche Hyperfeinübergänge hierbei möglich sind, wird durch die Auswahlregeln für Dipolübergänge bestimmt. Eine Beschreibung des verwendeten Lasersystems findet sich in Abschnitt 3.3.

Der Übergang  ${}^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow {}^2P_{1/2}, F = 0$  dient der Doppler-Kühlung sowie dem Zustandsnachweis und mittels des Übergangs  ${}^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow {}^2P_{1/2}, F = 1$  erfolgt die Zustandspräparation (vgl. die Abschnitte 4.1 und 4.3). Die genaue Prozedur ist den entsprechenden Abschnitten zu entnehmen und an dieser Stelle soll sich die Darstellung auf die Eigenschaften des Termschemas beschränken.

Der Zustand  ${}^2P_{1/2}$  hat ein Verzweigungsverhältnis von 0,005 in den Zustand  ${}^2D_{3/2}$  [36]. Die Lebensdauer dieses Niveaus beträgt 52,7 ms [40], was deutlich länger als die des Zustands  ${}^2P_{1/2}$  ist und somit ist der Übergang bei 369 nm unterbrochen. Durch den Rückpumpübergang  ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^3D[3/2]_{1/2}$  nahe 935 nm ist es jedoch möglich, diesen effektiv wieder zu schließen. Der Zustand  ${}^3D[3/2]_{1/2}$  hat eine Lebensdauer von 38 ns [41] und zerfällt mit einem Verzweigungsverhältnis von 0,982 bevorzugt zurück in den Zustand  ${}^2S_{1/2}$  [42]. Der andere Zerfallskanal ist der zurück in den Zustand  ${}^2D_{3/2}$ . Für die vorhandene Hyperfeinstruktur der hierbei beteiligten Zustände (siehe [36] für Details) verkompliziert sich dieser Rückpumpmechanismus jedoch. Bevorzugt wird der Zustand  ${}^2D_{3/2}, F = 1$  besetzt, der über den Zustand  ${}^3D[3/2]_{1/2}, F = 0$  aufgrund der Auswahlregeln nur zurück nach  ${}^2S_{1/2}, F = 1$  zerfallen kann. Durch eine nicht-resonante Anregung  ${}^2S_{1/2}, F = 1$  nach  ${}^2P_{1/2}, F = 1$  kann jedoch ebenfalls der Zustand  ${}^3D_{3/2}, F = 2$  bevölkert werden [43]. Diese Besetzung kann durch eine Anregung nach  ${}^3D[3/2]_{1/2}, F = 1$  wieder zurück nach  ${}^2S_{1/2}$  zerfallen, wobei die beiden Hyperfeinzustände  $F = 1$  und  $F = 0$  besetzt werden können. Somit ist es für ein effizientes Rückpumpen vorteilhaft die beiden Rückpumpübergänge zu treiben.

Durch weitere Prozesse, wie beispielsweise Stöße mit Restgas, ist es möglich den Zustand  ${}^2F_{7/2}$  zu besetzen [44; 45]. Dieser weist eine lange Lebensdauer von etwa 6 Jahren auf [46]. Um die Besetzung zurück in den Übergang nahe 369 nm zu überführen, kann der Übergang  ${}^2F_{7/2} \rightarrow {}^1D[5/2]_{5/2}$  mittels Laserlicht bei 638 nm getrieben werden. Der Zustand  ${}^1D[5/2]_{5/2}$  zerfällt zurück nach  ${}^2D_{3/2}$  und von dort durch den Rückpumpübergang bei 935 nm zurück in den Kühlübergang nahe 369 nm. Die Hyperfeinstruktur führt auch hier zu mehreren möglichen Zuständen, die besetzt werden können, und daher auch zu zwei notwendigen Rückpumpübergängen.

## 2.3. Lineare Paul-Falle

Als Träger von Quanteninformation dienen in dieser Arbeit die internen Freiheitsgrade von  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen. Um die Quantenzustände einzelner Ionen gezielt manipulieren und auslesen zu können, ist es unabdingbar auch ihre externen Bewegungsfreiheitsgrade zu kontrollieren. Die Kontrolle beschränkt sich dabei darauf, sie an bestimmten Positionen scharf lokalisiert zu fixieren und ihre Bewegung um Gleichgewichtspositionen zu dämpfen. Diese Dämpfung geschieht im experimentellen Aufbau mittels Laserkühlung (vgl. den Abschnitt 4.1). Um die Ionen an bestimmten Ruhelagen zu fixieren, bietet es sich an, ihre elektrische Ladung auszunutzen. Sowohl elektrische als auch magnetische Felder koppeln an diese an und erlauben es, gezielt Kräfte auf ein einzelnes Ion auszuüben. So gibt es unterschiedliche Ansätze um Ionen zu speichern.

Eine mögliche Ionenfalle ist die sogenannte Penning-Falle oder Penning-Pierce-Falle [47]. Sie basiert auf rein statischen elektrischen und magnetischen Feldern, die geladene Teilchen einschließen können. Einem anderen Ansatz folgt die Paul-Falle [48], die auf rein elektrischen Feldern beruht. Nach dem Earnshaw-Theorem ist es nicht möglich ein geladenes Teilchen mit rein statischen elektrischen Feldern zu fangen. Die Paul-Falle basiert aus diesem Grund auf statischen und dynamischen elektrischen Feldern.

### 2.3.1. Geschichte der Paul-Falle

Historisch entwickelte sich die Paul-Falle aus dem Quadrupol-Massenfilter und fand zuerst auf dem Gebiet der Massenspektrometrie Verwendung [48]. Erste Anwendungen auf dem Gebiet von Spektroskopie an Ionen und geladenen Molekülen folgten in den 1960er-Jahren [49]. In den 1970er-Jahren folgte hochauflösende Mikrowellenspektroskopie an Ionen, die Frequenzstandards für neuartige Atomuhren begründen sollte [50]. Im Jahr 1979 schließlich gelang die erste Beobachtung eines einzelnen Ions in einer Paul-Falle [51]. Von diesem Zeitpunkt an entwickelte sich das Forschungsfeld auch durch die Entwicklung der Lasertechnologie rasant weiter. Es gelang die Laserkühlung in den quantenmechanischen Grundzustand [52] und die Realisierung eines bedingten Logik-Gatters basierend auf der Kopplung von internen und externen Freiheitsgraden eines einzelnen Ions [53].

Diese Kontrolle über ein mikroskopisches System ist der Grund, weshalb Systeme von gespeicherten Ionen heute intensiv für Experimente auf dem Gebiet der Quanteninformationsverarbeitung [18; 19] und zur Simulation von anderen Quantensystemen [5; 54] untersucht und genutzt werden.

### 2.3.2. Funktionsprinzip einer linearen Paul-Falle

Nach der Einordnung in den historischen Kontext soll nun die im Rahmen dieser Arbeit verwendete lineare Paul-Falle näher beschrieben werden. Ihr ursprüngliches Design stammt aus der Arbeitsgruppe von Prof. Rainer Blatt in Innsbruck [55] und wurde dahingehend modifiziert, dass Permanentmagnete in den Fallenaufbau eingefügt werden können [56]. Diese Permanentmagnete erlauben die gezielte Erzeugung eines Magnetfeldgradienten, wodurch neuartige Schemata zur Quanteninformationsverarbeitung mit gespeicherten Ionen möglich sind [57; 58; 28; 27; 29; 56].

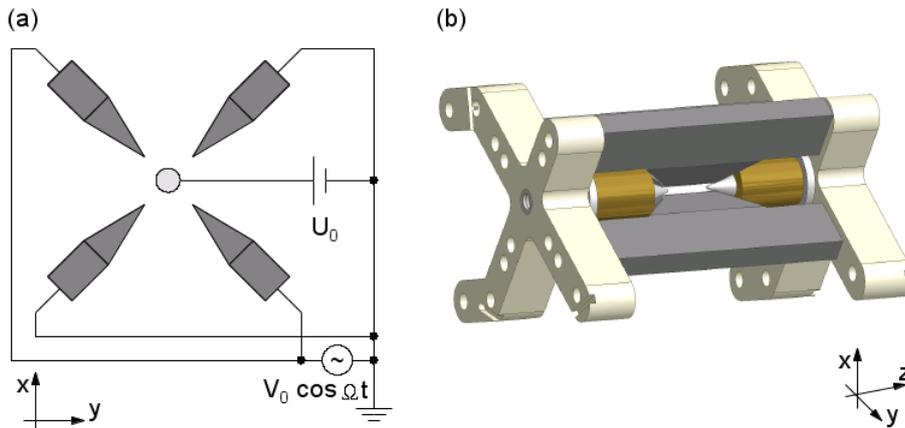
Im Folgenden soll kurz die Funktionsweise einer solchen Falle am Beispiel eines einzelnen Ions der Masse  $M$  und der positiven elektrischen Ladung  $Q$  präsentiert werden. Danach wird im nächsten Abschnitt die Situation von mehreren in der Falle gespeicherten Ionen diskutiert. Eine knappe Beschreibung des Fallenaufbaus und der typischen Betriebsparameter findet sich im Abschnitt 3.1 und eine genauere Beschreibung ist [56] zu entnehmen.

Eine lineare Paul-Falle besteht aus vier Klingen-Elektroden, die ein zweidimensionales Quadrupolfeld erzeugen (siehe Abbildung 2.3). Hierfür wird an den Klingen eine elektrische Wechselspannung  $V_0 \cos \Omega t$  angelegt. Diagonal gegenüberliegende Klingen haben dabei die gleiche und benachbarte eine entgegengesetzte Polarität. Wie im Folgenden diskutiert wird, kann das resultierende Potenzial zu einem Einschluss des Ions in der  $xy$ -Ebenen führen. Um es auch entlang der Fallenachse zu speichern, gibt es zwei Endkappen-Elektroden, an denen eine positive Gleichspannung  $U_0$  anliegt. Diese führt zu einem schwächeren nahezu parabolischen Potenzial entlang der Fallenachse.

Da die Fallenachse wesentlich länger als die Abstände zwischen gegenüberliegenden Klingenpaaren ist, kann das resultierende Potenzial der Elektroden nahe der Fallenachse ( $x, y \ll R$ ) zu

$$\Phi(x, y, t) = \frac{x^2 - y^2}{2R^2} (U_0 + V_0 \cos \Omega t) \quad (2.3.1)$$

genähert werden [59]. Der Abstand  $R$  entspricht hierbei dem Abstand zwischen Fallenachse und den Klingen-Elektroden. Die aus diesem Potenzial resultierenden Bewegungsgleichungen in der  $xy$ -Ebenen lassen sich als Mathieu-Gleichungen formulieren [59]. Ihre analytischen Lösungen ergeben sich als Fourier-Reihen aus dem Floquet-Theorem [60]. Unter den allgemeinen Lösungen gibt es welche, die instabil sind und zu keinem Einschluss des Ions führen können. Ob es also zu einem stabilen Einschluss kommt, hängt von den Betriebsparametern bzw. den sogenannten Stabilitätsparametern ab. Eine genauere Diskussion ist beispielsweise in [60] zu finden und die typischen verwendeten Betriebsparameter sind in Abschnitt 3.1 und [56] beschrieben.



**Abbildung 2.3.:** Schematische Darstellungen der verwendeten linearen Paul-Falle. Abbildung (a) zeigt die Beschaltung der Elektroden. Zwei der Klingen-Elektroden sind hierbei mit der Erde, statt mit einer Wechselspannung verbunden, was die Funktionsweise jedoch nicht ändert. In (b) ist die Konstruktion des Fallenaufbaus als Modell dargestellt [56].

Für einen stabilen Einschluss können die Lösungen der Bewegungsgleichungen als

$$x(t) = x_0 \cos(\nu_x t + \phi_x) \left( 1 + \frac{q_x}{2} \cos(\Omega t) \right), \quad (2.3.2)$$

$$y(t) = y_0 \cos(\nu_y t + \phi_y) \left( 1 + \frac{q_y}{2} \cos(\Omega t) \right) \quad (2.3.3)$$

angenähert werden [60]. Dabei ergeben sich die Amplituden  $x_0$  und  $y_0$  bzw. die Phasen  $\phi_x$  und  $\phi_y$  aus den Anfangsbedingungen der Bewegung. Die sogenannten Säkularfrequenzen sind

$$\nu_x = \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{q_x^2}{2} + a}, \quad (2.3.4)$$

$$\nu_y = \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{q_y^2}{2} - a} \quad (2.3.5)$$

mit den Stabilitätsparametern

$$a = \frac{4QU_0}{M\Omega^2 R^2}, \quad (2.3.6)$$

$$q = \frac{2QV_0}{m\Omega^2 R^2}. \quad (2.3.7)$$

Die Bewegung in der  $xy$ -Ebenen (siehe die Gleichungen (2.3.2) und (2.3.3)) besteht somit aus zwei Anteilen. Zum einen besteht sie aus einer langsamen Schwingung, der

Säkularbewegung mit den Frequenzen  $\nu_{x,y}$  und zum anderen aus einer schnellen Modulation der Amplitude mit der Frequenz des Fallenantriebs  $\Omega$ . Dieser Anteil wird Mikrobewegung genannt. Rein qualitativ lässt sich diese Bewegung als eine sich abwechselnde Anziehung und Abstoßung des Ions von den Elektroden beschreiben. Da das Ion zu träge ist, um im Falle einer Anziehung die Elektrode vor der Umpolung zu erreichen, bleibt es im zeitlichen Mittel in der Falle gespeichert.

Die Bewegung entlang der Fallachse wird durch die positive Gleichspannung an den Endkappen-Elektroden bestimmt. Diese erzeugt ein Potenzial, das zu einem Einschluss entlang der Fallachse führt. Die resultierende Bewegung ist eine harmonische Schwingung mit der Frequenz [59]

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{2QU_0k}{mz_0^2}}, \quad (2.3.8)$$

wobei  $z_0$  dem Abstand zwischen dem Fallzentrum und den Endkappen-Elektroden entspricht. Der geometrische Faktor  $k$  beschreibt phänomenologisch welchen Einfluss das Vorhandensein von Leitern innerhalb des Fallenaufbaus (vor allem die Klingenelektroden) auf das von den Endkappen erzeugte Feld hat [59].

Zur qualitativen Beschreibung der Bewegung eines oder mehrerer Ionen in dem Fallpotenzial eignet sich das sogenannte Pseudopotenzial. Dieses ergibt sich aus der Mittelung der kinetischen Energie der Ionen über eine Periode der schnellen Mikrobewegung, deren Amplitude geringer als die der Säkularbewegung ist [60]. Für eine lineare Paul-Falle ist es allgemein anisotrop und lautet [59]

$$\Psi = \frac{M}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (2.3.9)$$

Es sei angemerkt, dass in einer linearen Ionenfalle das von den Wechselfeldern erzeugte Quadrupolfeld entlang der Symmetrieachse verschwindet. Somit ist es möglich mehrere Ionen zu speichern, ohne dass diese sich durch Mikrobewegung aufheizen. Im folgenden Abschnitt wird die Anordnung von mehreren Ionen in dem Pseudopotenzial diskutiert.

### 2.4. Mehrere Ionen in der Paul-Falle

In dem vorherigen Abschnitt wurden die Bewegung eines einzelnen Ions in einer linearen Paul-Falle diskutiert. Im Folgenden wird nun ein System aus mehreren identischen Ionen mit gleicher Masse und gleicher elektrischer Ladung im Pseudopotenzial betrachtet. Hierbei wird angenommen, dass das Potenzial entlang der Fallachse schwächer bindet als das Potenzial in radialer Richtung ist ( $\nu_1 < \nu_{x,y}$ ). Die Bewegung und Anordnung der

Ionen wird somit auf die z-Richtung beschränkt. Für alle durchgeführten Experimente ist eine solche reduzierte Betrachtung gültig<sup>2</sup>.

Als Erstes sollen nun die Gleichgewichtspositionen der Ionen in dem effektiven Fallenpotenzial diskutiert werden. Die potenzielle Energie eines Systems aus mehreren Ionen setzt sich aus dem effektiven Fallenpotenzial und der elektrostatischen Wechselwirkung der Ionen untereinander zusammen. Die Gravitation kann dabei vernachlässigt werden. Für hinreichend gekühlte Ionen ergibt sich für jedes Ion eine Ruhelage, welche durch ein lokales Minimum der potenziellen Energie gekennzeichnet ist. Die Bestimmung dieser Gleichgewichtspositionen ist für zwei und drei Ionen noch analytisch möglich, für größere Systemen erfolgt sie numerisch [62]. Für eine harmonische Speicherung gilt, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Ionen im Zentrum der Kette am geringsten ist. Ursache hierfür ist, dass die äußeren Ionen von einer stark anisotropen Ladungsverteilung abgestoßen werden, wo hingegen die inneren Ionen zusammengedrückt werden. Die genaue Angabe der Gleichgewichtspositionen  $z_n^{(0)}$  erfolgt üblicherweise in dimensionslosen Koordinaten  $u_n = z_n^{(0)}/l$  mittels einer Längenskala [62]

$$l = \sqrt[3]{\frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 M \nu_1^2}}. \quad (2.4.1)$$

Hierbei entspricht  $Ze = Q$  der Ladung ( $Z$  ist der Ionisationsgrad und  $e$  die Elementarladung) und  $M$  der Masse eines Ions.  $\epsilon_0$  bezeichnet die elektrische Feldkonstante und  $\nu_1$  die axiale Fallenfrequenz und charakterisiert somit die Stärke dieses Fallenpotenzials. Aus der Definition der Längenskala ist ersichtlich, dass die Ionen für ein stärkeres Fallenpotenzial immer enger zusammengedrückt werden.

Die Experimente, die in dieser Arbeit diskutiert werden, basieren überwiegend auf Systemen von zwei, drei oder acht Ionen. Bei zwei bzw. drei Ionen betragen die Nächstnachbarabstände [62]

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{Z^2 e^2}{2\pi\epsilon_0 M \nu_2^2}} \quad \text{bzw.} \quad d_3 = \sqrt[3]{\frac{5}{16} \frac{Z^2 e^2}{\pi\epsilon_0 M \nu_2^2}}. \quad (2.4.2)$$

Für  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen in einem Potenzial mit einer axialen Fallenfrequenz von  $2\pi \times 124$  kHz ergeben sich somit Abstände von  $13,9 \mu\text{m}$  bzw.  $11,8 \mu\text{m}$ . Für ein System von acht Ionen beträgt der Abstand in den dimensionslosen Koordinaten zwischen den beiden mittleren Ionen  $0,62164$  und zwischen den beiden äußersten Nachbarn  $0,8137$  [62].

<sup>2</sup>Es sei jedoch angemerkt, dass für eine bestimmte Anzahl von Ionen und ein gewisses Verhältnis von radialem zu axialem Fallenpotenzial die radiale Bewegung relevant wird und lineare Coulomb-Kristalle eine sogenannte Zick-Zack-Konfiguration einnehmen [61]. Ein solches Verhalten wird auch an dem beschriebenen Aufbau beobachtet, kann aber durch einen starken radialen Einschluss unterdrückt werden.

Bei den obigen typischen experimentellen Parametern beträgt die Längenskala  $l = 1,10 \times 10^{-5}$  m und es folgen Abstände von 6,8  $\mu\text{m}$  bzw. 9,0  $\mu\text{m}$ .

Nach der Diskussion der Ruhelagen folgt nun die Betrachtung der Dynamik des Systems. Prinzipiell wechselwirken alle Ionen durch ihre elektrostatischen Potenziale miteinander. Diese Coulomb-Wechselwirkung ist anharmonisch, jedoch lässt sie sich für Auslenkungen, die kleiner als die Abstände der Ionen sind, als harmonisch nähern. In der Konsequenz kann die Dynamik dann als System gekoppelter harmonischer Oszillatoren beschrieben werden. Die Eigenfrequenzen und Schwingungsmoden des Systems lassen sich für zwei und drei Ionen noch algebraisch finden und für größere Systeme erfolgt die Lösung numerisch [62]. Für eine Kette von  $N$  Ionen gilt dann unter Vernachlässigung der radialen Schwingungsmoden, dass es auch  $N$  axiale Schwingungsmoden mit jeweils einer Eigenfrequenz gibt. In dem Fall von zwei Ionen sind das die Schwerpunktsmode mit der axialen Fallenfrequenz  $\nu_1$  als Eigenfrequenz und die Streckmode (Kontraktion und Expansion der Kette) mit  $\nu_2 = \sqrt{3}\nu_1$  als Eigenfrequenz.

## 2.5. Gespeicherte Ionen in einem Magnetfeldgradienten

In diesem Abschnitt wird diskutiert, welchen Einfluss ein Magnetfeldgradient auf die Zustände von gespeicherten Ytterbium-Ionen hat. Dabei wird zuerst allgemein der Einfluss eines Magnetfeldes beschrieben, bevor die Besonderheiten eines inhomogenen Magnetfeldes erörtert werden. Dabei handelt es sich um eine induzierte Spin-Phonon-Kopplung von einzelnen Ionen sowie um eine Spin-Spin-Kopplung zwischen mehreren Ionen.

### 2.5.1. Einfluss eines homogenen Magnetfeldes

Von besonderem Interesse ist der Einfluss eines Magnetfeldes auf den Grundzustand  $^2S_{1/2}$  eines  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ions, da sich in diesem Qubits realisieren lassen (vgl. Abschnitt 2.2). Die innere Energie  $E$  eines magnetischen Moments  $\boldsymbol{\mu}$ , das mit dem Drehimpuls einer Ladung verknüpft ist, lautet, falls es sich in einem externen Magnetfeld  $\mathbf{B}$  befindet,  $E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ . Ein Spin-1/2 wird somit durch den Hamilton-Operator

$$H_I = -\frac{\hbar}{2}\omega\sigma_z \quad (2.5.1)$$

beschrieben, wobei das Magnetfeld als entlang der  $z$ -Achse angenommen wird. Des Weiteren bezeichnet  $\hbar$  das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum,  $\omega$  die Larmorfrequenz und  $\sigma_z$  eine Pauli-Matrix. Eine genauere Beschreibung aller Pauli-Matrizen, ihrer

Darstellung in geeigneten Basen und ihrer wesentlichen Eigenschaften findet sich im Anhang H.

Die Aufspaltung der Hyperfeinniveaus eines  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ions  $\Delta E_B$  aufgrund der magnetischen Induktion  $B$  wird durch die Breit-Rabi-Formel [63] beschrieben. Für den Grundzustand  $^2S_{1/2}$ , in dem die Qubits kodiert sind, vereinfacht sich diese zu

$$\Delta E_B = -\frac{A h}{4} - m_F g_J \mu_K B \pm \frac{A h}{2} \sqrt{1 + 2m_F X + X^2} \quad (2.5.2)$$

mit

$$X = \frac{g_J \mu_B - g_I \mu_K}{A h} B. \quad (2.5.3)$$

Die Größe  $A$  bezeichnet die Hyperfeinstrukturkonstante des Grundzustands und  $g_I$  bzw.  $g_J$  den g-Faktor des Kerns bzw. der Hülle. Des Weiteren symbolisieren  $\mu_K$  bzw.  $\mu_B$  das Kernmagneton bzw. das Bohrsche Magneton<sup>3</sup>. Die Größe  $m_F = \{0, \pm 1\}$  bezeichnet die Magnetquantenzahl des Zustands  $^2S_{1/2}$ ,  $F = 1$  und das Vorzeichen vor der Wurzel hängt von der gekoppelten Drehimpulsquantenzahl  $F$  ab. Diese setzt sich zu  $F = I \pm J$  aus dem Kernspin  $I$  und dem Drehimpuls der Hülle  $J$  zusammen. Für den Grundzustand  $^2S_{1/2}$  ( $I = 1/2, J = 1/2$ ) gibt es entweder  $F = 0$  oder  $F = 1$ . Für den Zustand mit  $F = 0$  gilt das negative und für den mit  $F = 1$  das positive Vorzeichen in der Gleichung (2.5.2). Für alle in dem experimentellen Aufbau vorhandene Magnetfelder  $B$  gilt, dass ihre hervorgerufene Energieverschiebung klein gegenüber der Hyperfeinstrukturkonstanten  $A$  ist und es folgt somit  $X \ll 1$ . Daher lässt sich die Gleichung (2.5.2) weiter nähern und es folgt für die Resonanzfrequenz  $\omega_\pi$  des magnetischen  $\pi$ -Übergangs ( $\Delta m_F = 0$ ) zwischen den Zuständen  $^2S_{1/2}, F = 0$  und  $^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  in guter Näherung

$$\hbar\omega_\pi = A \left( 1 + \frac{X^2}{2} \right). \quad (2.5.4)$$

Für die Resonanzfrequenz  $\omega_{\sigma^\pm}$  des magnetischen  $\sigma^\pm$  Übergangs ( $\Delta m_F = \pm 1$ ) zwischen den beiden Zuständen  $^2S_{1/2}, F = 0$  und  $^2S_{1/2}, F = 1, m_F = \pm 1$  gilt dann die Näherung

$$\hbar\omega_{\sigma^\pm} = A \pm g_I \mu_K B \pm \frac{A}{2} X. \quad (2.5.5)$$

Für alle weiteren praktischen Abschätzungen der Übergangsfrequenzen soll in dieser Arbeit der lineare Zeeman-Effekt

$$\hbar\omega_\pi \approx A \quad \text{und} \quad \hbar\omega_{\sigma^\pm} \approx A \pm g_F \mu_B B \quad (2.5.6)$$

dienen, wobei  $g_F$  dem gyromagnetischen Faktor entspricht. Für die wirkenden Magnetfelder von einigen Gauß ist die relative Abweichung zwischen (2.5.2) und (2.5.6) von der Größenordnung  $10^{-3}$ .

<sup>3</sup>Zahlenwerte dieser physikalischen Konstanten sind in Anhang C zu finden.

### 2.5.2. Adressierbarkeit in einem Magnetfeldgradienten

Nach der Beschreibung, wie ein homogenes Magnetfeld auf die Hyperfeinzustände des Grundzustands  $^2S_{1/2}$  eines  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ions wirkt, sollen im Weiteren die Konsequenzen eines Magnetfeldgradienten auf eine Kette von gespeicherten Ionen diskutiert werden. Das Magnetfeld zeigt dabei entlang der Fallachse und weist einen homogenen Gradienten auf. Es ist also ortsabhängig und wird beschrieben durch

$$B(z) = B_0 + bz, \quad (2.5.7)$$

wobei  $B_0$  ein statisches Magnetfeld,  $b = \frac{dB}{dz}$  den Gradienten und  $z$  die axiale Position in der Falle beschreibt. Aufgrund des linearen Zeeman-Effekts (2.5.6) hängt nun die Resonanzfrequenz des  $\sigma^\pm$ -Übergangs eines Ions von seiner Position im Magnetfeldgradienten ab. Die Frequenzaufspaltung  $\Delta\omega$  zwischen zwei Ionen mit dem Abstand  $\delta z$  ist dann

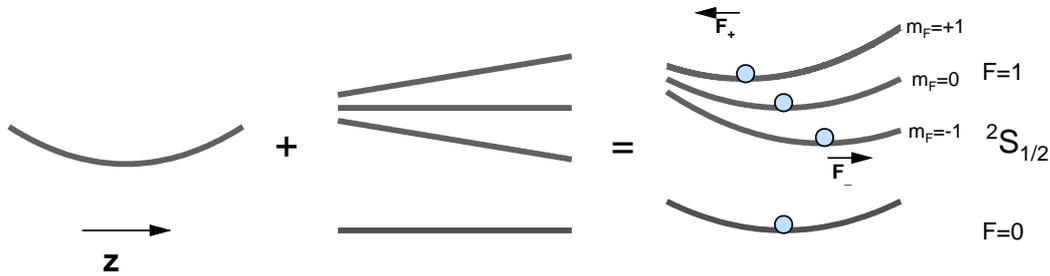
$$\Delta\omega = g_F \mu_B \Delta m_F \delta z b. \quad (2.5.8)$$

Mit den typischen Abständen von  $10 \mu\text{m}$  und einem Gradienten von  $b = 19 \text{ Tm}^{-1}$  ergibt sich eine typische Frequenzaufspaltung der Ionen von  $2\pi \times 2,7 \text{ MHz}$ . Für die magnetischen  $\pi$ -Übergänge verschwindet der lineare Zeeman-Effekt, jedoch folgt aus der Breit-Rabi Formel (2.5.2) in diesem Fall ein Frequenzunterschied von  $1,28 \text{ kHz}$ , der aber bei vielen Experimenten vernachlässigt werden kann.

### 2.5.3. Kopplung interner und externer Freiheitsgrade

Für den Fall eines Magnetfeldgradienten entlang der Symmetrieachse der Ionenfalle hängt die innere Energie eines Ions von seiner axialen Position ab (vgl. auch die Gleichung (2.5.8)). Eine Ortsabhängigkeit der inneren Energie führt immer zu einer Kraft, deren Richtung in diesem Fall von dem Zustand des Qubits abhängt [24; 57; 64]. In der Abbildung 2.4 ist dieses für ein Einzelion illustriert. Das Fallenpotenzial führt zu einem harmonischen Potenzial, in dem das Ion um eine Gleichgewichtsposition herum gespeichert ist. In der Illustration wird dieses Potenzial durch eine Parabel dargestellt. Der Einfluss des Magnetfeldgradienten wird in guter Näherung durch den linearen Zeeman-Effekt (2.5.6) beschrieben, der zu einer Ortsabhängigkeit der Zeeman-Zustände  $^2S_{1/2}, F = 1, m_F = \pm 1$  führt. Die Zustände  $^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  und  $^2S_{1/2}, F = 0$  hingegen sind in guter Näherung nicht magnetfeld- und damit auch nicht positionsabhängig. In der Illustration ist dieses durch die ortsabhängige Zeeman-Aufspaltung der Zustände dargestellt. Die Überlagerung dieser Potenziale führt zu unterschiedlichen Ruhelagen eines Ions, je nachdem in welchem Zustand es sich befindet.

Wird ein Ion somit beispielsweise aus dem Grundzustand  $^2S_{1/2}, F = 0$  nach  $^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1$  angeregt, so ändert sich seine Ruhelage und es oszilliert um die neue



**Abbildung 2.4.:** Qualitative Beschreibung der zustandsabhängigen Kraft. Das Fallenpotenzial bestimmt ein harmonisches Potenzial (dargestellt durch eine Parabel), in dem ein Ion gespeichert wird. Der Magnetfeldgradient führt zu einer ortsabhängigen internen Energie der beiden Hyperfeinzerstufen  $^2S_{1/2}$ ,  $F = 1$ ,  $m_F = \pm 1$ . Diese führt zu einer Kraft (schwarzer Pfeil), deren Vorzeichen von der Magnetquantenzahl  $m_F$  abhängt. Somit resultiert je nach Zustand des Ions ein unterschiedliches Potenzial mit unterschiedlicher Gleichgewichtslage (blau dargestellt). Ändert das Ion seinen Zustand so, dass dieses mit einem Wechsel der Gleichgewichtsposition einhergeht, können externe Freiheitsgrade angeregt werden.

Gleichgewichtsposition. Auf diese Weise können effektiv externe Bewegungsfreiheitsgrade angeregt werden, auch wenn der Impuls von Mikrowellenphotonen zu gering ist.

In dem Folgenden wird dieser Effekt quantitativ diskutiert. Die Stärke einer Spin-Phonon-Kopplung wird allgemein durch einen Lamb-Dicke-Parameter (LDP) beschrieben. Für die Verwendung von Mikrowellenstrahlung ist der LDP  $\eta = \Delta z_1 / \lambda$  jedoch vernachlässigbar klein, weil Photonen im Mikrowellenbereich, im Gegensatz zu optischen Photonen, kaum einen Impuls übertragen. So beträgt die Wellenlänge  $\lambda_{\mu w}$  der verwendeten Mikrowellenstrahlung etwa 2 cm und die Ausdehnung der Grundzustandswellenfunktion  $\Delta z_1$  ist für die typischen experimentellen Parameter von der Größenordnung 10 nm. Hieraus resultiert ein LDP von lediglich  $\eta_{\mu w} = 5 \times 10^{-7}$ . Der LDP für Laserlicht einer Wellenlänge bei 369 nm hingegen beträgt  $\eta_{\text{optisch}} = 3 \times 10^{-2}$ .

Der statische Magnetfeldgradient induziert jedoch eine Spin-Phonon-Kopplung, die durch einen *effektiven* LDP beschrieben werden kann [57]:

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{\Delta z \partial_z \omega}{\nu_1}. \quad (2.5.9)$$

Dieser wurde in einem vergleichbaren Vorgängeraufbau zum ersten Mal experimentell nachgewiesen [28]. Für die typischen experimentellen Parameter dieser Arbeit beträgt

## 2. Theoretische Grundlagen

---

er an dem beschriebenen Aufbau  $\eta_{\text{eff}} = 3,4 \times 10^{-2}$  [56; 30] und ist somit vergleichbar mit einem LDP, wie er sich bei der Verwendung von Laserlicht ergibt.

Der Hamilton-Operator, der die Wechselwirkung eines in einem Magnetfeldgradienten gespeicherten Ions mit elektromagnetischer Strahlung der Frequenz  $\omega_{\mu w}$ , der Phase  $\varphi$  und der Amplitude  $\Omega$  beschreibt, ist in einem geeigneten Bezugssystem und nach Anwendung der Drehwellennäherung der Form [57]

$$\tilde{H}_{\mu w} = \frac{\hbar}{2}\Omega[\sigma^+ e^{i\eta_{\text{eff}}(a^\dagger(t)+a(t))} e^{-i(\Delta t-\varphi)} + \sigma^- e^{-i\eta_{\text{eff}}(a^\dagger(t)+a(t))} e^{i(\Delta t-\varphi)}] \quad (2.5.10)$$

mit den zeitabhängigen Erzeuger- und Vernichter-Operatoren  $a^\dagger(t) = a^\dagger e^{i\nu_1 t}$  bzw.  $a(t) = a e^{-i\nu_1 t}$  und der Verstimmung der Mikrowellenstrahlung  $\Delta = \omega - \omega_{\mu w}$ . Im sogenannten Lamb-Dicke-Regime ( $\eta_{\text{eff}} \ll 1$ ) können durch die Wahl geeigneter Mikrowellenfrequenzen unterschiedliche Prozesse angeregt werden, wie es im Folgenden dargelegt wird.

### Resonanzfall

Für den Resonanzfall  $\Delta = 0$  ist der Hamilton-Operator im geeigneten Bezugssystem

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\mu w}^T &= \frac{\hbar}{2}\Omega_{n,n}[\sigma^+ e^{i\varphi} + \sigma^- e^{-i\varphi}], \\ &= \frac{\hbar}{2}\Omega_{n,n}[\sigma_x \cos \varphi - \sigma_y \sin \varphi] \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

und eine Anregung erfolgt auf dem Träger ohne Änderung der Besetzungszahl  $n$  der Schwingungsmode. Die Rabi-Frequenz des Trägers

$$\Omega_{n,n} = (1 - \eta_{\text{eff}}^2 n)\Omega \quad (2.5.12)$$

ist abhängig von dem effektiven LDP und der Phononenbesetzung der Schwerpunktsmode. Das resonante Antreiben des Trägerübergangs bildet die Grundlage für die gezielte Manipulation einzelner Qubits, wie sie weiter im Abschnitt 2.6 beschrieben wird.

### Blaues Seitenband

Für den Fall, dass das antreibende Feld gerade um die Fallenfrequenz  $\nu_1$  blau verstimmt ist ( $\Delta = -\nu_1$ ), kann ein blaues Seitenband (BSB) mit der Rabi-Frequenz

$$\Omega_{n,n+1} = \eta_{\text{eff}}\sqrt{n+1}\Omega \quad (2.5.13)$$

getrieben werden und der Hamilton-Operator lautet

$$\tilde{H}_{\mu w}^{\text{BSB}} = \frac{\hbar}{2}\Omega_{n,n+1}\eta_{\text{eff}}[\sigma^+ a^\dagger e^{i\varphi} + \sigma^- a e^{-i\varphi}]. \quad (2.5.14)$$

## Rotes Seitenband

Ist das Feld hingegen rotverstimmt ( $\Delta = \nu_1$ ), so kann die Anregung auf einem roten Seitenband (RSB) erfolgen und der Hamilton-Operator lautet nun

$$\tilde{H}_{\mu w}^{\text{RSB}} = \frac{\hbar}{2} \Omega_{n,n-1} \eta_{\text{eff}} [\sigma^+ a e^{i\varphi} + \sigma^- a^\dagger e^{-i\varphi}]. \quad (2.5.15)$$

Die Rabi-Frequenz, mit welcher das rote Seitenband angetrieben wird ist

$$\Omega_{n,n-1} = \eta_{\text{eff}} \sqrt{n} \Omega. \quad (2.5.16)$$

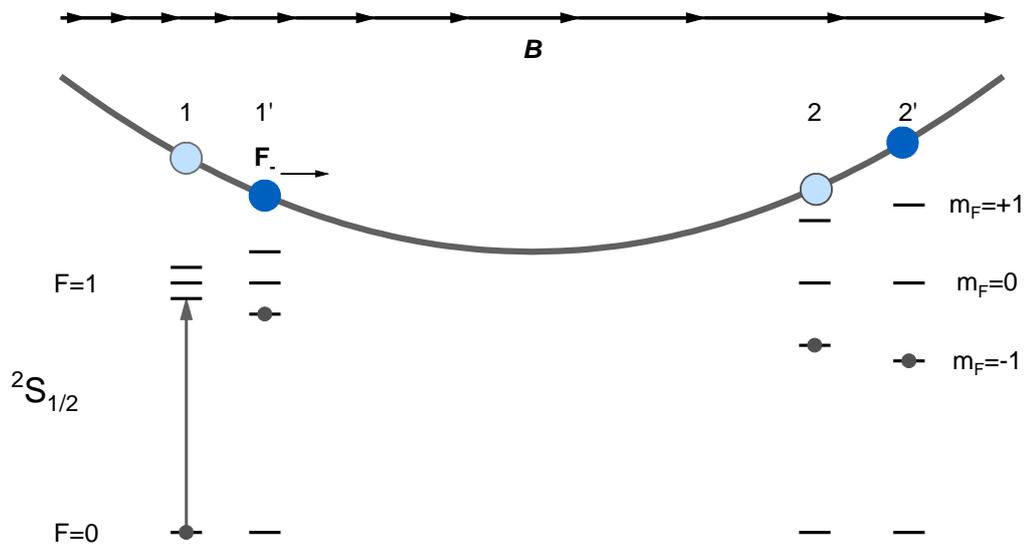
Die gezielte Anregung des roten Seitenbands geht mit der Vernichtung eines Phonons einher und bildet somit zusammen mit einem geeigneten dissipativen Prozess die Grundlage für Seitenbandkühlung im Mikrowellenregime [57; 65; 30; 66], welche bei einigen der Experimente verwendet wurde (vgl. Abschnitt 4.1).

### 2.5.4. Spin-Spin-Kopplung

Für eine Kette von mehreren gespeicherten Ionen führt die Ortsabhängigkeit der internen Energie zu einer effektiven Spin-Spin-Wechselwirkung, die von der Coulomb-Wechselwirkung vermittelt wird. Der grundlegende Mechanismus ist für zwei Ionen in der Abbildung 2.5 qualitativ dargestellt. Am Anfang befindet sich das erste Ion in dem Grundzustand  ${}^2S_{1/2}, F = 0$  und das zweite in dem Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1$ . Die Gleichgewichtspositionen der beiden Ionen sind dann durch 1 und 2 gekennzeichnet. Wird nun das erste Ion auch in den Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1$  angeregt, wirkt zusätzlich die zustandsabhängige Kraft  $F_-$ . Die Ruhelage ändert sich von 1 nach 1' und das Ion verschiebt sich entsprechend. Aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Ionen ändert sich ebenfalls die Ruhelage des zweiten Ions von 2 nach 2'. Die ortsabhängige Zeeman-Aufspaltung führt nun dazu, dass sich die innere Energie des zweiten Ions verringert. Auf diese Weise hängt die innere Energie des zweiten Ions von dem Zustand des ersten Ions ab. Dieser Effekt kann durch eine effektive Spin-Spin-Kopplung beschrieben werden kann [57]. Die Energieverschiebung wird dabei durch die zustandsabhängige Kraft  $F$  und die Ortsverschiebung der Gleichgewichtsposition  $d$  beschrieben [54]:

$$\hbar J = -F d. \quad (2.5.17)$$

Für den Fall, dass die zustandsabhängige Kraft ein anderes Vorzeichen hat, ändert sich auch die Energieverschiebung entsprechend. In diesem Fall hat die Kopplungskonstante  $J$  ein anderes Vorzeichen. Diskutieren lässt sich dieses anhand der Situation,



**Abbildung 2.5.:** Von der Coulomb-Wechselwirkung vermittelte effektive Spin-Spin-Kopplung. Zwei Ionen befinden sich harmonisch im Fallenpotenzial gebunden (Parabel). Der Magnetfeldgradient (schwarze Pfeile) führt zu einer zustandsabhängigen Kraft, die zusätzlich zu dem Fallenpotenzial und der Coulomb-Wechselwirkung die Ruhelage der beiden Ionen bestimmt. Für den Fall, dass das erste Ion von dem Grundzustand  ${}^2S_{1/2}, F = 0$  nach  ${}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1$  angeregt wird (grauer Pfeil), führt die nun zusätzlich wirkende Kraft  $F_-$  dazu, dass sich die Ruhelage von 1 (hellblau) nach 1' (dunkelblau) ändert. Durch die gegenseitige Coulomb-Wechselwirkung, wird nun auch das zweite Ion von 2 (hellblau) nach 2' (dunkelblau) verschoben. Die ortsabhängige Zeeman-Aufspaltung führt dazu, dass die Energie des zweiten Ions im Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1$  verringert wird.

in welcher das zweite Ion sich in dem Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = +1$  befindet (nicht dargestellt). Nun führt die Änderung der Ruheposition von 2 nach 2' dazu, dass sich die Energie erhöht statt sich zu verringern. Beschrieben wird dieses durch eine Spin-Spin-Kopplung mit einem negativen Vorzeichen.

Die effektive Kopplung kann für die Verwendung von unterschiedlichen Zuständen unterdrückt werden. Wird beispielsweise das erste Ion statt nach  ${}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1$  nach  ${}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  angeregt, ändert sich seine Ruhelage und somit auch die des zweiten Ions nicht. In der Folge ist in dieser Situation die Energie des zweiten Ions unabhängig davon, ob sich das erste in dem Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 0$  oder  ${}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  befindet und die Kopplungskonstante  $J$  ist in guter Näherung null.

Neben der obigen semi-klassischen Beschreibung ergibt eine Betrachtung der quantisierten Bewegung einer Kette von  $N$  Ionen in einem geeigneten Bezugssystem den Hamilton-Operator [57]

$$\tilde{H}_{\text{sys}} = -\frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i \sigma_z^{(i)} + \hbar \sum_{n=1}^N \nu_n a_n^\dagger a_n - \frac{\hbar}{2} \sum_{i<j}^N J_{ij} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(j)}. \quad (2.5.18)$$

Der erste Term beschreibt hierbei die innere Energie aller einzelnen Ionen, die von ihrer Position abhängt. Der zweite Term beschreibt die Energie aller Schwingungsmoden, wobei  $a_n^\dagger$  dem Erzeugungs- und  $a_n$  dem Vernichtungs-Operator der Schwingungsmode  $n$  entspricht. Der dritte Term beschreibt schließlich die gegenseitige Spin-Spin-Kopplung der Ionen. Diese J-Kopplung ist

$$J_{ij} = \sum_n^N \nu_n \epsilon_{in} \epsilon_{jn}, \quad (2.5.19)$$

wobei die dimensionslose Konstante

$$\epsilon_{in} \equiv \partial_z \omega_i \frac{\Delta z_n}{\nu_n} S_{in}. \quad (2.5.20)$$

beschreibt, wie stark Ion  $i$  an die Mode  $n$  koppelt.  $\nu_n$  entspricht hierbei der Eigenfrequenz und der  $\Delta z_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\nu_n}}$  der Ausdehnung der Grundzustandswellenfunktion der Mode  $n$ . Die dimensionslose Größe  $S_{in}$  beschreibt die normierte Auslenkung des Ions  $i$  bei Anregung der Mode  $n$ .

Da die partielle Ableitung der inneren Energie der Ionen immer paarweise in der J-Kopplung zwischen zwei Spins auftritt (vgl.  $(\partial_z \omega_i) \times (\partial_z \omega_j)$  in Gleichung (2.5.19) und  $\partial_z \omega = g_F \mu_B \Delta m_F b$  aus Gleichung (2.5.8)), ist es möglich, das Vorzeichen der Kopplung zu beeinflussen. Falls beide Spins ihren angeregten Zustand in Hyperfeinzuständen  $^2S_{1/2}$ ,  $F = 1$ ,  $m_F = \pm 1$  mit unterschiedlichen Magnetquantenzahlen haben, wird die J-Kopplung negativ. Sind die Magnetquantenzahlen hingegen gleich, ist die Kopplung immer positiv. Ist der angeregte Zustand hingegen der (in erster Ordnung) magnetfeld-unabhängige Zustand  $^2S_{1/2}$ ,  $F = 1$ ,  $m_F = 0$  verschwindet die partielle Ortsableitung und ebenso die Kopplung.

Für den Fall von zwei Ionen in einem Gradienten von  $19 \text{ Tm}^{-1}$  und einer Fallenfrequenz von  $\nu_1 = 2\pi \times 124 \text{ kHz}$  ergibt sich eine Kopplung von  $J_{12} = 2\pi \times 50 \text{ Hz}$ , die an dem vorhandenen Aufbau zum ersten Mal nachgewiesen worden ist [29; 56].

## 2.6. Mikrowellenpulse

### 2.6.1. Pulse und Drehungen

In dem vorherigen Abschnitt 2.5.3 ist der Hamilton-Operator eines gespeicherten Ions in einem Magnetfeldgradienten unter Einwirkung eines zusätzlichen antreibenden Feldes diskutiert worden (siehe Gleichung (2.5.11)). Führt der Magnetfeldgradient zu einer Zeeman-Aufspaltung der einzelnen Ionen, die wesentlich größer als die Rabi-Frequenz des antreibenden Feldes ist, so wechselwirkt in guter Näherung immer nur eines der Ionen mit dem Feld und für die anderen ist dieses zu weit verstimmt. Aus diesem Grund können die wesentlichen Erkenntnisse aus dem vorherigen Abschnitt auch auf eine Kette von mehreren in einer linearen Paul-Falle gespeicherten Ionen angewandt werden. Im Folgenden wird nun genau von dieser Situation ausgegangen und die gezielte Wechselwirkung eines Ions mit dem Feld diskutiert. Diese Wechselwirkung ist die Grundlage für die Realisierung beliebiger Ein-Qubit-Logikgatter. Die unbeabsichtigte Wechselwirkung der anderen Ionen wird im Abschnitt 2.6.2 beschrieben und im Kapitel 6 experimentell untersucht.

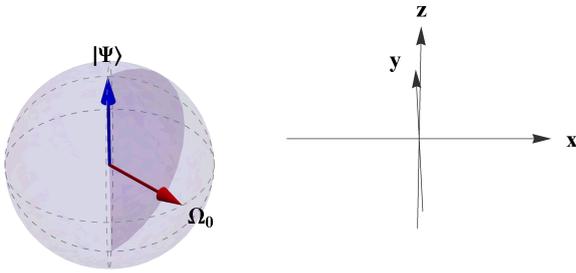
Hier wird nun weiter davon ausgegangen, dass die Bewegungsseitenbänder deutlich aufgelöst sind. Experimentell lässt sich das dadurch erreichen, dass die Rabi-Frequenz des den Träger antreibenden Feldes kleiner als die axiale Fallenfrequenz ist. Für den Fall, dass die Anregung nahe dem Träger erfolgt, können die Seitenbänder somit ebenfalls vernachlässigt werden. Die Zeitentwicklung der Wechselwirkung (vgl. Gleichung (2.5.11)) lässt sich mit Hilfe eines Bezugssystems beschreiben, das mit der Winkelgeschwindigkeit des antreibenden Feldes  $\omega_{\mu w}$  um die  $z$ -Achse rotiert. Der Hamilton-Operator lautet dann [34]

$$H^{\text{rot}} = -\hbar(\omega_0 - \omega_{\mu w})\sigma_z/2 - \hbar\Omega(\sigma_x \cos \varphi - \sigma_y \sin \varphi)/2. \quad (2.6.1)$$

Für den Fall, dass das antreibende Feld resonant ist ( $\omega_{\mu w} = \omega_0$ ) verschwindet der erste Term des Hamilton-Operators und die Zeitentwicklung  $U = e^{-iH^{\text{rot}}t/\hbar}$  des Qubits wird durch den zweiten Term beschrieben. Vergleicht man diese Zeitentwicklung

$$U_{\mu w}(t, \varphi) = \exp\left(i\frac{\Omega t}{2}(\sigma_x \cos \varphi - \sigma_y \sin \varphi)\right) \quad (2.6.2)$$

mit dem Operator einer Drehung um den Winkel  $\theta$  um die Drehachse  $\vec{n}$  (vgl. Gleichung (2.1.8)), so erkennt man, dass der Bloch-Vektor des Qubits um einen Winkel  $\Omega t$  gedreht wird. Die Rotationsachse liegt für den Resonanzfall in der  $xy$ -Ebenen und ist durch die Wahl der Phase  $\varphi$  bestimmt. Für eine Phase  $\varphi = \pi/2$  erfolgt die Drehung beispielsweise um die  $y$ -Achse und für  $\varphi = \pi$  um die  $x$ -Achse. Bei dieser Bewegung handelt es sich jeweils um eine Nutation.



**Abbildung 2.6:** Dynamik eines resonanten  $\pi$ -Pulses, der den Anfangszustand  $|1\rangle$  nach  $|\psi\rangle = |0\rangle$  dreht. Die Drehachse  $\Omega_0$  liegt dabei in der  $xy$ -Ebenen und die Phase des Pulses ist  $7\pi/4$ .

Die obige Zeitentwicklung für eine resonante Anregung des Trägers (vgl. Gleichung (2.6.2)) ist die Grundlage für beliebige Ein-Qubit-Gatter, wie sie im Folgenden weiter beschrieben werden. Die Realisierung erfolgt dabei mittels Mikrowellenpulsen der Pulsdauer  $\tau$ , der Phase  $\varphi$  und der Rabi-Frequenz  $\Omega$ . Zur besseren Anschauung wird die Zeitentwicklung weiter vereinfacht zu

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(\tau, \varphi) &= \mathbb{1} \cos \frac{\Omega\tau}{2} + i\sigma_x \sin \frac{\Omega\tau}{2} \cos \varphi - i\sigma_y \sin \frac{\Omega\tau}{2} \sin \varphi \\ &= \cos \frac{\Omega\tau}{2} \mathbb{1} + \sin \frac{\Omega\tau}{2} (ie^{i\varphi}|0\rangle\langle 1| + \sin \frac{\Omega\tau}{2} (ie^{-i\varphi}|1\rangle\langle 0|). \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

### $\pi$ -Puls

Ein bedeutender Puls ist zum Beispiel der  $\pi$ -Puls, für den gilt  $\Omega\tau = \pi$ . Seine Zeitentwicklung ist

$$\begin{aligned} U_{\pi}(\varphi) &= i \cos \varphi \sigma_x - i \sin \varphi \sigma_y \\ &= ie^{i\varphi}|0\rangle\langle 1| + ie^{-i\varphi}|1\rangle\langle 0|. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Dieser Puls ändert also den Zustand  $|1\rangle$  nach  $|0\rangle$  und umgekehrt und entspricht (bis auf einen Phasenfaktor) einem logischen NOT-Gatter. Die Dynamik des Pulses ist in der Abbildung 2.6 dargestellt.

Die Nacheinanderausführung von zwei  $\pi$ -Pulsen gleicher Phase ergibt als effektive Zeitentwicklung

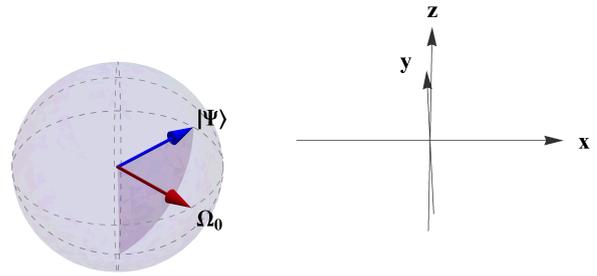
$$\begin{aligned} U_{\pi}(\varphi)^2 &= (i \cos \varphi \sigma_x - i \sin \varphi \sigma_y)^2 \\ &= -\mathbb{1} \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

die Identität mit einem irrelevanten globalen Vorzeichen.

Sind die Phasen der beiden  $\pi$ -Pulse unterschiedlich, so ist die effektive Zeitentwicklung eine Drehung  $Z$  um die  $z$ -Achse.

$$\begin{aligned} U_{\pi}(\varphi_2)U_{\pi}(\varphi_1) &= (i \cos \varphi_2 \sigma_x - i \sin \varphi_2 \sigma_y)(i \cos \varphi_1 \sigma_x - i \sin \varphi_1 \sigma_y) \\ &= -Z(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

**Abbildung 2.7:** Dynamik eines resonanten  $\pi/2$ -Pulses. Die Drehachse  $\Omega_0$  liegt in der  $xy$ -Ebenen und der Anfangszustand  $|1\rangle$  wird in einen gleichmäßigen Superpositionszustand  $|\psi\rangle$  in der Äquatorebene der Bloch-Kugel überführt.



### $\pi/2$ -Puls

Ein weiterer oft verwendeter Puls ist der  $\pi/2$ -Puls, der wegen  $\Omega\tau = \pi/2$  durch die Zeitentwicklung

$$U_{\pi/2}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} + ie^{i\varphi}|0\rangle\langle 1| + ie^{-i\varphi}|1\rangle\langle 0|) \quad (2.6.7)$$

beschrieben wird.

In der Abbildung 2.7 ist die Dynamik eines  $\pi/2$ -Pulses dargestellt. Dieser dreht den Anfangszustand  $|1\rangle$  in einen gleichmäßigen Superpositionszustand. Die Phase des Pulses ist  $7\pi/4$ . Wird ein solcher Puls hingegen mit der Phase 0 auf den Zustand  $|0\rangle$  angewandt, so erzeugt er den kohärenten Superpositionszustand  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ .

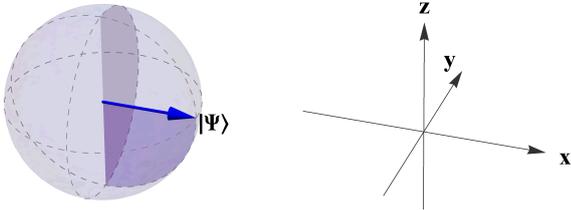
### Hadamard-Gatter

Aus Drehungen um die  $x$ - bzw. die  $y$ -Achse ist es möglich, jedes beliebige Ein-Qubit-Gatter zu realisieren [34]. Ein solches ist das Hadamard-Gatter, welches durch die Wahrheitstabelle

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |1\rangle &\rightarrow 1/\sqrt{2}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

$$(2.6.9)$$

definiert ist [17]. Eine mögliche experimentelle Realisierung dieses Gatters ist die Nacheinanderausführung zweier Pulse bzw. Drehungen. Die erste ist dabei eine Drehung von  $\pi$  um die negative  $x$ -Achse. Darauf folgt eine Drehung von  $\pi/2$  diesmal um die negative  $y$ -Achse. Die Abbildung 2.8 illustriert diese Dynamik für den Anfangszustand  $|0\rangle$ .



**Abbildung 2.8:** Dynamik eines Hadamard-Gatters, das aus zwei Pulsen zusammengesetzt ist. Der Anfangszustand  $|0\rangle$  wird von dem ersten  $\pi$ -Puls, um die negative  $x$ -Achse nach  $|1\rangle$  gedreht. Der folgende  $\pi/2$ -Puls dreht den Zustand schließlich um die negative  $y$ -Achse nach  $|\psi\rangle = |+\rangle$ .

### 2.6.2. Pulsfehler

In dem vorherigen Abschnitt wurde dargelegt, wie beliebige Ein-Qubit-Operationen mit Hilfe von Mikrowellenpulsen realisiert werden können. Die Diskussion beruhte auf der Annahme, dass die Parameter der Pulse perfekt kontrolliert werden können. In einer realistischen Umgebung sind diese Annahmen jedoch nicht zwangsläufig erfüllt, was im Allgemeinen zu Pulsfehlern führt [67; 68]. Aus diesem Grund werden in dem folgenden Abschnitt die möglichen Quellen dieser Pulsfehler aufgezeigt und auch die Konsequenzen veranschaulicht.

### Verstimmung

Der bedeutendste Fehler an dem verwendeten Aufbau beruht auf einer möglichen Verstimmung  $\Delta = \omega - \omega_{\mu w}$  der Mikrowellenpulse mit der Frequenz  $\omega_{\mu w}$  relativ zur Hyperfeinaufspaltung der Ionen  $\omega$ . Bei dem verwendeten experimentellen Aufbau ist der dominierende Faktor, der eine Verstimmung hervorruft, jedoch nicht eine Instabilität der Mikrowellenkette zum Erzeugen der Pulse, sondern eine zeitliche Drift der Qubit-Übergänge (vgl. Anhang G). Bei solch einer Verstimmung ist die Resonanzbedingung nicht erfüllt und der Hamilton-Operator (2.6.1) lässt sich nicht wie zuvor weiter vereinfachen. Die Zeitentwicklung

$$U_{\mu w}(\tau, \varphi) = \cos(\Omega_R \tau / 2) \mathbb{1} - i \sin(\Omega_R \tau / 2) [n_{\perp} (\sigma_x \cos \varphi - \sigma_y \sin \varphi) + n_z \sigma_z] \quad (2.6.10)$$

entspricht nun einer Präzession um eine Drehachse, welche um den Winkel

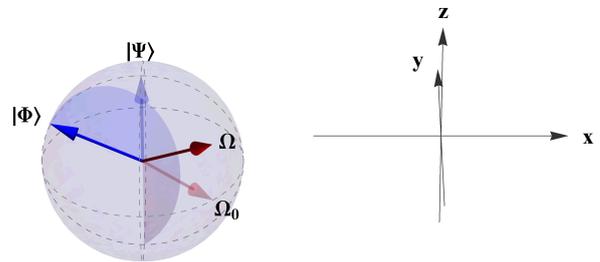
$$\alpha = \arctan(\Omega / \Delta) \quad (2.6.11)$$

von der  $z$ -Achse verkippt ist [34]. Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ist

$$\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} \quad (2.6.12)$$

und wird verallgemeinerte Rabi-Frequenz genannt.

**Abbildung 2.9:** Dynamik eines verstimmenen  $\pi$ -Pulses. Die Drehachse  $\Omega$  liegt nicht länger in der  $xy$ -Ebenen wie die ideale Drehachse  $\Omega_0$  für den Resonanzfall. Darüber hinaus erfolgt die Drehung mit der schnelleren verallgemeinerten Rabi-Frequenz und somit endet der Zustand nicht wie beabsichtigt in  $|\psi\rangle = |0\rangle$ , sondern in  $|\phi\rangle$ .

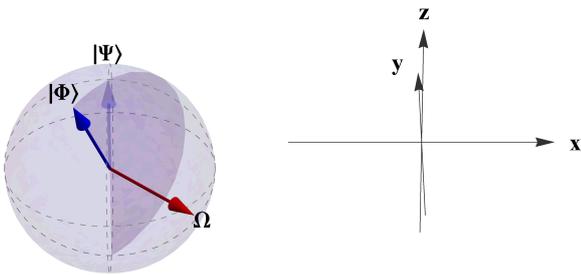


Für die  $z$ -Komponente der Drehachse gilt  $n_z = \Delta/\Omega_R$  und die Komponente in der  $xy$ -Ebenen ist  $n_\perp = \Omega/\Omega_R$ . Die Orientierung dieser Komponente ist weiterhin durch die Phase  $\varphi$  des Pulses bestimmt. Eine Verstimmung führt also dazu, dass die Drehung des Bloch-Vektors nicht länger um die gewünschte Drehachse erfolgt und darüber hinaus schneller ist als im Resonanzfall. In der Abbildung 2.9 ist die resultierende Dynamik dargestellt. Der Anfangszustand  $|1\rangle$  wird von dem beabsichtigten  $\pi$ -Puls, der jedoch um  $0,65\Omega_0$  verstimmt ist nicht in den idealen Zustand  $|0\rangle$  gedreht. Die Ursache ist, dass die Drehachse nicht länger in der  $xy$ -Ebenen liegt. Man erkennt ebenfalls wie der Zustand nicht um den Winkel  $\pi$ , sondern wegen der verallgemeinerten Rabi-Frequenz um einen größeren Winkel gedreht wird.

Ist die Verstimmung wesentlich größer als die Rabi-Frequenz, so entspricht die verallgemeinerte Rabi-Frequenz in guter Näherung der Verstimmung und die schnelle Rotation erfolgt nahezu parallel zur  $z$ -Achse. Aus der obigen Diskussion ist ebenfalls ersichtlich, dass der Pulsfehler bei einer gegebenen Verstimmung  $\Delta$  für eine größere Rabi-Frequenz  $\Omega$  kleiner wird.

### Pulsflächenfehler

Ein anderer Pulsfehler, der an dem vorhandenen Aufbau auftreten kann, ist ein Pulsflächenfehler. Hierbei entspricht für einen Rechteckpuls das Produkt aus Rabi-Frequenz und Pulsdauer nicht der gewünschten Pulshöhe. Dieses kann daran liegen, dass die Pulsdauer nicht exakt kontrolliert werden kann. Die vorhandene Mikrowellenkette erlaubt jedoch eine Kontrolle der Pulslängen mit einer Auflösung von 5 ns (vgl. das Kapitel 3 und [69]). Diese Länge ist vernachlässigbar klein gegenüber den typischen Pulsdauern von 10  $\mu$ s. Eine andere mögliche Ursache wäre eine zeitliche Änderung des Ausgangspegels der Mikrowellenkette. Solches konnte an dem vorhandenen Aufbau jedoch nicht beobachtet werden. Die Ursache für Pulsflächenfehler an dem verwendeten experimentellen Aufbau ist vielmehr, dass die Rabi-Frequenz nur mit einem statistischen Fehler von etwa 100 Hz gemessen werden kann. Aufgrund der vorhandenen Drift der Qubit-



**Abbildung 2.10:** Dynamik eines beabsichtigten  $\pi$ -Pulses mit einem Pulsflächenfehler. Die Drehachse  $\Omega$  liegt zwar in der  $xy$ -Ebenen, jedoch ist die Rotation schneller als beabsichtigt. Der Anfangszustand  $|1\rangle$  endet daher in  $|\phi\rangle$  statt in  $|\psi\rangle = |0\rangle$ .

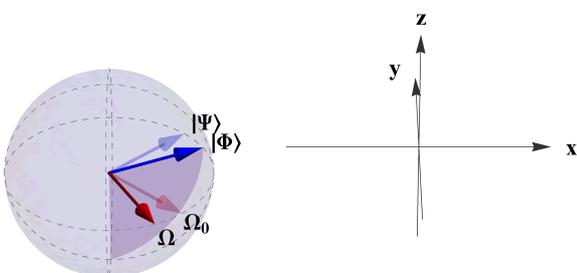
Übergänge ändert sich während der Bestimmung der Rabi-Frequenz kontinuierlich die verallgemeinerte Rabi-Frequenz, wodurch eine genauere Messung verhindert wird.

Ein Pulslängenfehler führt dazu, dass der Bloch-Vektor des Qubits nicht um den gewünschten Winkel, sondern um einen kleineren bzw. größeren gedreht wird. Ist die Resonanzbedingung erfüllt und der Pulslängenfehler der einzige Pulsfehler, so erfolgt die Drehung jedoch weiterhin um die gewünschte Drehachse in der  $xy$ -Ebenen. In der Abbildung 2.10 ist dieses für einen beabsichtigten  $\pi$ -Puls mit einem relativen Pulsflächenfehler von 0,15 illustriert. Der Drehwinkel ist zu groß und der Zustand endet nicht in  $|\psi\rangle = |0\rangle$ , sondern in  $|\phi\rangle$ .

## Phasenfehler

Ein dritter Pulsfehler betrifft die Phase des Pulses. Kann diese nicht exakt kontrolliert werden, so erfolgt die Drehung um eine in der  $xy$ -Ebenen leicht verdrehten Achse. In dem vorhandenen experimentellen Aufbau kann dieser Fehler jedoch vernachlässigt werden, denn die verwendete Mikrowellenkette erlaubt eine Kontrolle der Phase mit einer Genauigkeit von besser als 0,1 mrad [69].

In der Abbildung 2.11 ist ein solcher fehlerhafter  $\pi$ -Puls illustriert. Der Puls ist resonant und daher liegt die Drehachse  $\Omega$  in der  $xy$ -Ebenen, jedoch aufgrund eines Phasenfehlers von  $\pi/10$  anders ausgerichtet als die beabsichtigte Drehachse  $\Omega_0$ . Der Superpositionszustand  $|\phi\rangle$ , der aus dem Anfangszustand  $|1\rangle$  erzeugt wird, stimmt somit nicht mit dem beabsichtigten Zustand  $|\psi\rangle$  überein.



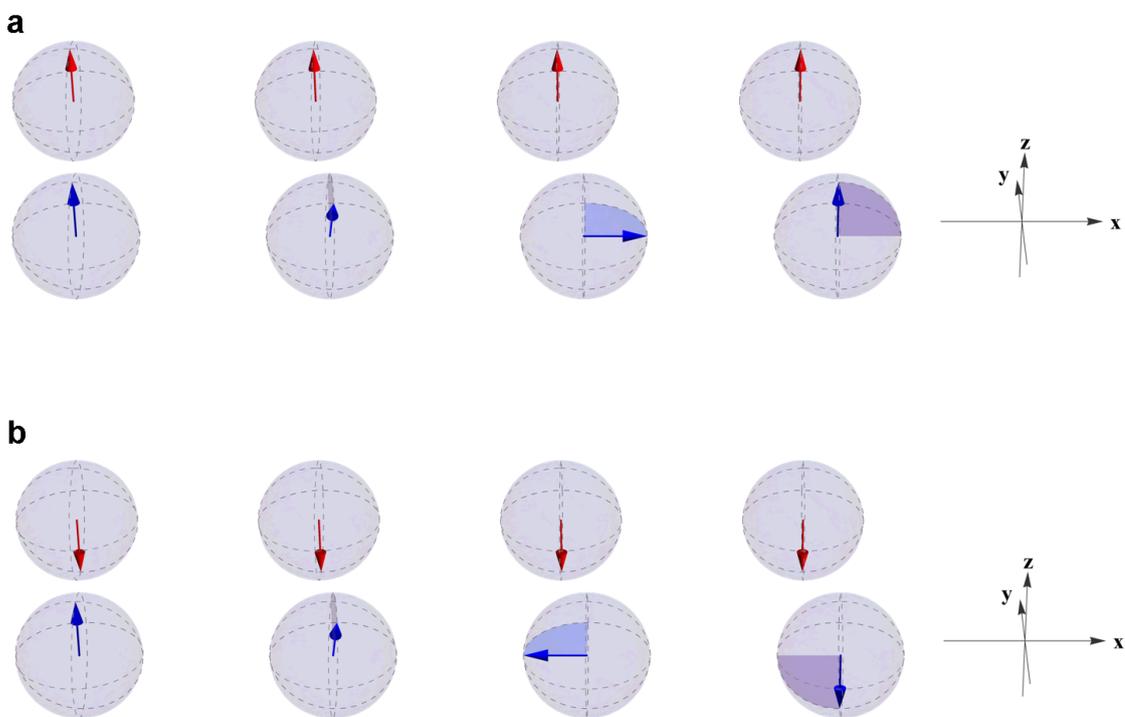
**Abbildung 2.11:** Dynamik eines  $\pi/2$ -Pulses mit einem Phasenfehler von  $\pi/10$ . Die Drehachse  $\Omega$  liegt zwar wie die beabsichtigte Drehachse  $\Omega_0$  in der  $xy$ -Ebenen, ist jedoch fehlerhaft ausgerichtet. Daher wird der Zustand  $|1\rangle$  nicht nach  $|\psi\rangle$ , sondern nach  $|\phi\rangle$  gedreht.

## 2.7. Mehr-Qubit-Gatter und Ising-Hamiltonian

Die Spin-Spin-Wechselwirkung

$$H_{\text{Ising}} = -\frac{\hbar}{2} \sum_{i < j}^N J_{ij} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(j)} \quad (2.7.1)$$

aus dem Ising-Hamiltonian (2.5.18), der eine Kette von gespeicherten Ionen in einem Magnetfeldgradienten beschreibt, erlaubt die Realisierung von Zwei- und Mehr-Qubit-Gattern. Diese besetzen aus Einzelqubitrotationen, wie sie in dem vorherigen Abschnitt diskutiert wurden, und Wartezeiten, in denen sich das gekoppelte System entsprechend dem obigen Hamilton-Operators entwickelt (siehe auch [34]).



**Abbildung 2.12.:** Dynamik eines bedingten Zwei-Qubit-Gatters. Das Gatter besteht aus Einzelqubitrotationen des Ziel-Qubits (blau) und einer Wartezeit, in der es sich abhängig vom Zustand des Kontroll-Qubits (rot) entwickelt. Das System ist dabei entweder in  $|0\rangle|0\rangle$  (a) bzw. in  $|1\rangle|0\rangle$  (b) initialisiert. Siehe Text für weitere Diskussion.

An dieser Stelle wird diskutiert, wie damit ein bedingtes Zwei-Qubit-Gatter bzw. ein CNOT-Gatter (siehe den Abschnitt 2.1.3) realisiert werden kann. Der einfachste

Spezialfall besteht hierbei darin, dass beide Qubits anfangs in den Basiszuständen  $|0\rangle$  bzw.  $|1\rangle$  präpariert worden sind. Für diese Fälle wird das Zwei-Qubit-System jederzeit durch ein Produkt aus Einzelqubitzuständen beschrieben und kann daher durch zwei Bloch-Kugeln dargestellt werden. Für den Fall, dass sowohl das Kontroll- als auch das Ziel-Qubit in  $|0\rangle$  präpariert worden sind, findet sich die Dynamik des Gatters in der Abbildung 2.12 (a) dargestellt. Nach der Initialisierung wird das Ziel-Qubit (blau) mittels eines  $\pi/2$ -Pulses der Phase  $\varphi = 0$  in einem Superpositionszustand gebracht. Der Zustandsvektor zeigt dabei parallel zur  $y$ -Achse. Danach folgt eine freie Entwicklung. Die Zeitentwicklung des Ziel-Qubits entspricht dabei der Rotation entgegen der  $z$ -Achse und die Wartedauer ist so gewählt, dass der Drehwinkel  $\pi/2$  resultiert. Danach folgt eine Drehung des Ziel-Qubits mittels eines  $\pi/2$ -Pulses der Phase  $\varphi = 3\pi/2$  und der Zustand wird zurück nach  $|0\rangle$  gebracht. Die Logik dieser Operation lautet somit (bis auf einen Phasenfaktor)

$$|0\rangle|0\rangle \rightarrow |0\rangle|0\rangle. \quad (2.7.2)$$

Für den Fall, dass das Kontroll-Qubit hingegen in  $|1\rangle$  initialisiert worden ist, findet sich die Dynamik in der Abbildung 2.12 (b) dargestellt. Nach der Präparation und dem ersten  $\pi/2$ -Puls entspricht die Zeitentwicklung des Ziel-Qubits nun einer Drehung um die  $z$ -Achse. Der zweite  $\pi/2$ -Pulse bringt das Qubit nun in den Zustand  $|1\rangle$  und die Logik ist

$$|1\rangle|0\rangle \rightarrow |1\rangle|1\rangle. \quad (2.7.3)$$

Für die anderen Anfangszustände  $|0\rangle|1\rangle$  und  $|1\rangle|1\rangle$  folgt analog, dass das Ziel-Qubit nur dann seinen Zustand ändert, falls das Kontroll-Qubit sich in  $|1\rangle$  befindet (vgl. die Wahrheitstafel des CNOT-Gatters (2.1.9)).

Experimentelle Realisierungen dieses bedingten Zwei-Qubit-Gatters sind in dem Kapitel 7 oder in [56; 70] weiter diskutiert.

# 3

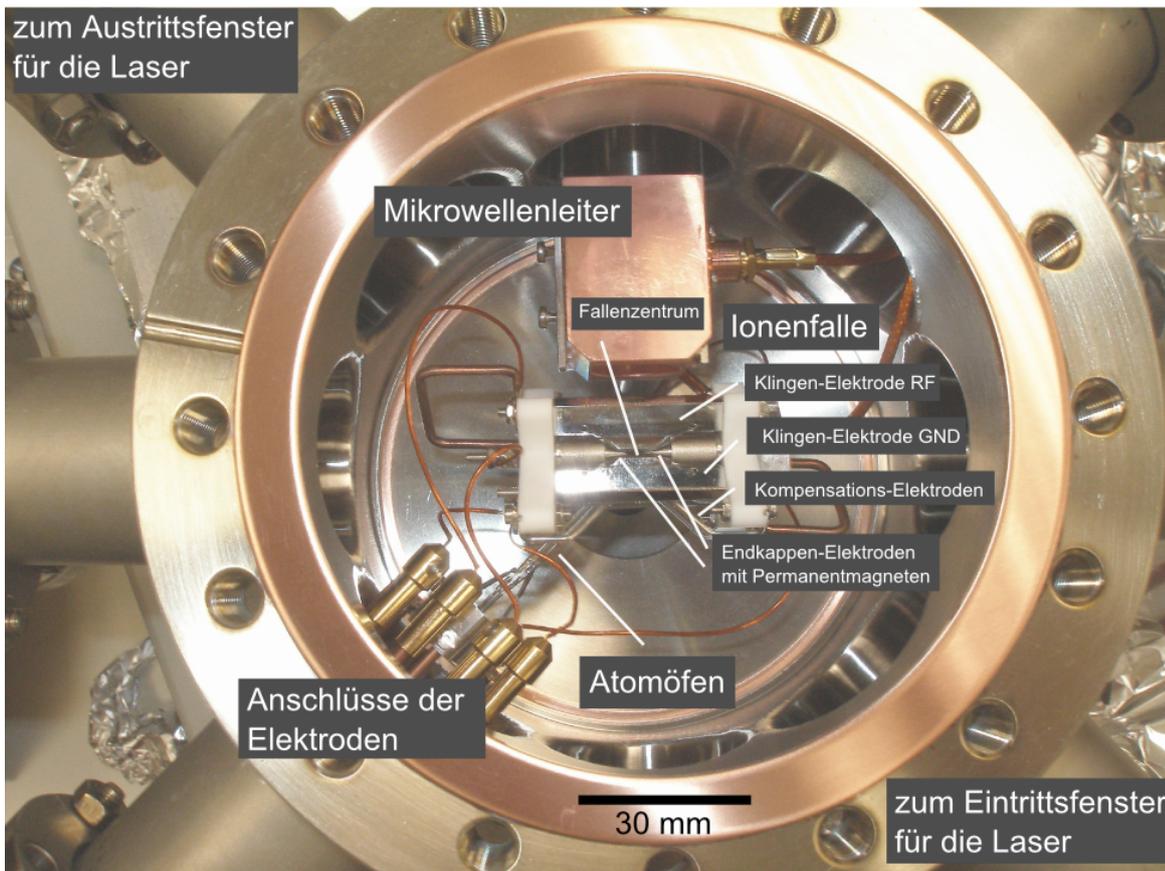
## Experimenteller Aufbau

Nachdem in dem vorherigen Kapitel die theoretischen Grundlagen der Quanteninformationsverarbeitung mit gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen erläutert worden sind, folgt nun die Beschreibung des experimentellen Aufbaus, der im Rahmen dieser Dissertation durchgeführten Experimente. Eine umfangreichere Beschreibung ist vorherigen Arbeiten an dem gleichen Aufbau zu entnehmen [56; 30]. An dieser Stelle werden diese Beschreibungen auf das Wesentliche zusammengefasst und ggf. Änderungen an dem experimentellen Aufbau diskutiert. In dem nächsten Kapitel 4 wird dann erläutert, wie der Aufbau für die Durchführung der Experimente verwendet wird.

### 3.1. Fallenapparatur in der Vakuumkammer

Die lineare Ionenfalle zum Speichern der Ionen befindet sich in einem Ultrahochvakuum innerhalb eines Vakuumrezipienten (siehe dazu die Abbildung 3.1), um unbeabsichtigte Stöße der Ionen mit Restgasatomen zu minimieren. Die Falle basiert auf Arbeiten aus der Gruppe von Prof. R. Blatt in Innsbruck [55] und wurde dahingehend modifiziert, dass Permanentmagnete zum Erzeugen eines statischen Magnetfeldgradienten in das Design der Falle eingefügt wurden [56]. Konstruktionszeichnungen sind daher [55] zu entnehmen und eine detailliertere Beschreibung der Modifikationen und der verwendeten Magnete ist in [56] zu finden.

Zur Erzeugung des radialen Einschlusses wird, an zwei der Klingen eine Wechselspannungen mit einer Frequenz von etwa 18,9 MHz und einer Amplitude von 600 V angelegt und die anderen beiden Klingen mit der Masse verbunden. Die Endkappenelektroden,



**Abbildung 3.1.:** Die geöffnete Vakuumkammer vor der Versiegelung mit dem Beobachtungsfenster. Siehe den Text für Erläuterungen.

die den axialen Einschluss garantieren, sind mit Batterien verbunden und es liegt eine typische positive Gleichspannung von 24 V an. Für diese typischen Betriebsparameter folgen radiale bzw. axiale Fallenfrequenzen von etwa  $2\pi \times 500$  kHz bzw.  $2\pi \times 124$  kHz [56]. Weitere charakteristische Parameter sind [56] zu entnehmen. Zusätzlich zu den RF- und Endkappen-Elektroden der Falle gibt es drei Kompensationselektroden. Diese dienen dazu, unbeabsichtigte Störpotenziale zu kompensieren und die Mikrobewegung der Ionen zu minimieren. Zwei Atomöfen zum Laden der Falle (siehe auch Abschnitt 4.1) befinden sich ebenfalls nahe der Fallenstruktur.

Die Mikrowellensignale zur Manipulation der Ionen werden von einem Wellenleiter innerhalb der Vakuumkammer und nahe der Falle abgestrahlt. Innerhalb des Wellenleiters befinden sich zwei Antennen, die senkrecht zueinander angeordnet sind. Eine ist hierbei parallel zur Fallenachse und die andere senkrecht dazu ausgerichtet. Das Platzieren der Antennen nahe der Falle ermöglicht stärkere Mikrowellensignale im Fal-

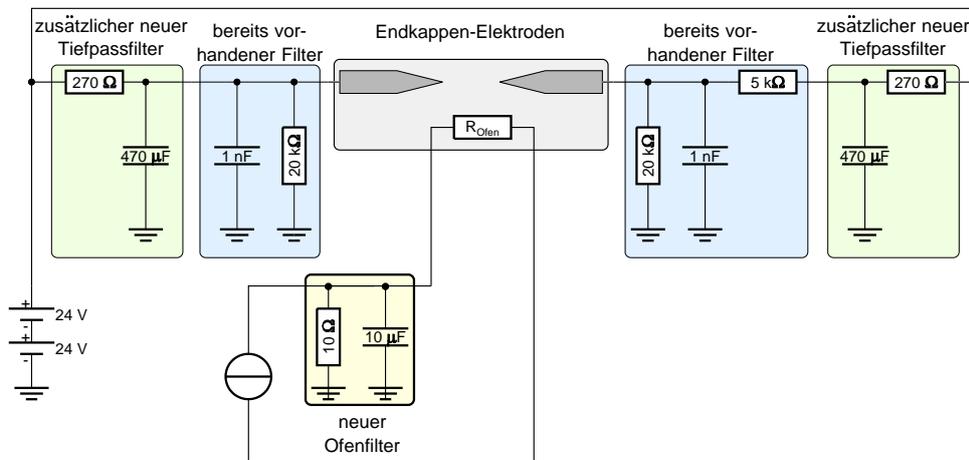
lenzentrum als dieses mit einer Hornantenne außerhalb des Rezipienten möglich wäre. Somit können die Ionen durch ein stärkeres Signal schneller, d. h. mit einer höheren Rabi-Frequenz manipuliert werden. Es wurden zwei Antennen gewählt, um die die Polarisationsrichtung der Mikrowellenstrahlung beliebig kontrollieren zu können. Es stellte sich jedoch heraus, dass nur eine der Antennen dazu geeignet ist die Ionen mit einer hohen Rabi-Frequenz von etwa  $2\pi \times 50$  kHz zu manipulieren. Das Signal der anderen Antenne führt zu Rabi-Frequenzen aller drei möglichen Hyperfeinübergänge von nur wenigen Kilohertz. Höchstwahrscheinlich ist dieses auf Abschirmeffekte der Fallengeometrie zurückzuführen.

Zum Eintritt von Laserlicht sind am Vakuumrezipienten spezielle antireflexbeschichtete Ein- und Austrittsfenster angebracht. Für die Messungen dieser Arbeit wird das Laserlicht von schräg unten eingestrahlt. Dieses erlaubt eine Laserkühlung (siehe Abschnitt 4.1) der radialen und axialen Bewegungsmoden. Darüber hinaus kann die lineare Polarisation des Laserlichts so eingestellt werden, dass alle Hyperfeinübergänge gleich stark getrieben werden. Die Beobachtung von Fluoreszenzlicht erfolgt durch ein Beobachtungsfenster, das in der Abbildung 3.1 der geöffneten Vakuumkammer noch nicht montiert ist. Zum Erzeugen des Ultrahochvakuums wird eine Ionengetterpumpe verwendet, die in der Abbildung ebenfalls nicht zu sehen ist.

### **Optimierung der Tiefpassfilter**

Um eine unkontrollierte Beeinflussung der Ionen durch elektrische Störpotenziale zu verhindern, ist es notwendig, potenzielle Rauschkomponenten zu unterdrücken. Hierfür gibt es Filterboxen, die sich nicht innerhalb des Vakuumrezipienten befinden, sondern außerhalb, um eine flexible Anpassung und gegebenenfalls einen Wechsel der Filter zu ermöglichen. Im Vergleich zu dem vorherigen Aufbau [30] wurden einige Änderungen vorgenommen, um das elektrische Rauschen innerhalb der Falle weiter zu reduzieren. So wurden in einem ersten Schritt die Atomöfen mit dem Massepotenzial verbunden (vgl. Abb. 3.2). Darüber hinaus wurden für die Versorgung der Endkappenelektroden Filter mit einer oberen Grenzfrequenz von 1,25 Hz hinzugefügt.

Zum Vergleich der Filtereigenschaften kann die Heizrate der Ionen herangezogen werden. Grundlage hierfür ist, dass elektrisches Rauschen innerhalb der Falle zu einer zufälligen Bewegung der Ionen und somit zu einem Aufheizen der Bewegungsmoden führen. Durch die oben beschriebenen Maßnahmen konnte die Heizrate von  $1,4(3)$  Phononen  $\text{ms}^{-1}$  über  $0,37(12)$  Phononen  $\text{ms}^{-1}$  (nach Verbinden der Atomöfen mit der Masse) auf schließlich  $0,14(7)$  Phononen  $\text{ms}^{-1}$  (nach Hinzufügen der Tiefpassfilter) reduziert werden [66]. Für eine vergleichbare Falle, die zum Speichern von Calcium dient, werden Heizraten von  $0,014$  Phononen  $\text{ms}^{-1}$  berichtet [71]. In dieser Falle beträgt die axiale Fallenfrequenz jedoch auch 1 MHz und ist somit fast zehn Mal höher als bei dem



**Abbildung 3.2.:** Änderungen der Filter an der Vakuumkammer. Die bestehenden Filter (blau) an den beiden Endkappen-Elektroden wurden um zusätzliche passive Tiefpass-Filter 1. Ordnung (grün) ergänzt. Ihre Grenzfrequenz beträgt 1,25 Hz. Zusätzlich ist der Atomofen durch einen Widerstand und eine Kapazität (gelb) mit einem definierten Potenzial verbunden. Die Filter befinden sich außerhalb der Vakuumkammer (grau), um eine flexible Anpassung zu ermöglichen.

hier beschriebenen Aufbau. Die Heizrate, ausgedrückt in Energie der Phononen  $\hbar\nu_1$  pro Zeit, ist somit vergleichbar.

## 3.2. Magnetspulen

Zum Einstellen einer beliebigen Quantisierungsachse sind drei Helmholtz-Spulenpaare um die Vakuumkammer herum angeordnet. Jedes Paar erlaubt in diesem Spulensystem die Erzeugung eines homogenen Magnetfeldes entlang einer der drei Raumrichtungen [30]. Mit den typischen Spulenströmen von etwa einem Ampere lassen sich Magnetfelder von einigen Gauß erzeugen. Mit Hilfe dieses Spulensystems werden somit störende Magnetfelder wie das Erdmagnetfeld und vor allem das Feld von der Ionen-Getterpumpe kompensiert. Das resultierende Magnetfeld zeigt dann typischerweise entlang der Symmetrieachse der Ionenfalle.

### 3.3. Lasersysteme

In den durchgeführten Experimenten ist es notwendig, bestimmte atomare Übergänge in  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen und  $^{171}\text{Yb}$ -Neutralatomen mittels Laserlicht zu treiben. Ein Niveauschema hierzu ist in der Abbildung 2.2 dargestellt.

Bei den verwendeten Lasern mit Emissionswellenlängen nahe 369 nm, 399 nm, 638 nm und 935 nm handelt es sich um Diodenlasersysteme mit externem Resonator. Der externe Resonator wird dabei durch ein optisches Gitter in der sogenannten Littrow-Konfiguration realisiert [72]. Eine genauere Konstruktionsbeschreibung und Dokumentation findet sich in [73]. Der Laser mit einer Emissionswellenlänge bei 369 nm stellt hierbei eine Besonderheit dar. Weil kommerziell keine Laserdioden bei einer solchen Emissionswellenlänge erhältlich sind, wird eine Laserdiode mit einer Emissionswellenlänge nahe 372 nm verwendet<sup>1</sup>. Die gewünschte Emissionswellenlänge wird durch ein Kühlen der Diode auf bis zu  $-7^\circ\text{C}$  erreicht [74; 75; 76]. Zum Kühlen wird hierbei ein Peltier-Element verwendet. Um Kondensation an der gekühlten Diode zu vermeiden, befindet sich diese in einem hermetisch abgeschlossenen Gehäuse, in dessen Inneren die Luft mittels eines Molekularsiebs getrocknet worden ist.

Eine Frequenzstabilisierung aller Lasersysteme erfolgt mittels Flankenstabilisierung auf Referenzresonatoren [72; 73; 76]. Bei den verwendeten Resonatoren handelt es sich um temperaturstabilisierte Fabry-Pérot-Interferometer. Piezo-Aktoren, die in die Spiegelhalterungen der Resonatoren eingebaut sind, erlauben mittels Gleichspannungssignalen eine gezielte Änderung der Resonatorlänge und somit eine Frequenzänderung des von dem stabilisierten Lasers emittierten Lichts.

Um die Intensität und die Frequenz des Laserlichts bei 369 nm und 935 nm zu kontrollieren, werden akustooptische Modulatoren (AOMs) verwendet. Diese bestehen aus einem Medium, in dem das Laserlicht an Ultraschallwellen gebeugt werden kann [77]. Das gebeugte Licht erhält eine Frequenzverschiebung abhängig von der Frequenz der Ultraschallwelle und die optische Leistung des gebeugten Strahls hängt von der Amplitude der Ultraschallwelle ab. Somit ist es möglich, die Frequenz und die Intensität des Laserlichts zu kontrollieren.

Von besonderer Bedeutung ist die Erzeugung des Laserlichts, das zur Zustandspräparation mittels Treiben des Übergangs  $^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow ^2P_{1/2}, F = 1$  verwendet wird. Dieses Licht muss eine 2,1 GHz höhere Frequenz aufweisen als das Licht, das den Kühl-Übergang  $^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow ^2P_{1/2}, F = 0$  treibt (vgl. Abschnitt 4.1). Realisiert wird dieses mittels zweier AOMs. Einer dient der Kontrolle des Laserlichts, das den Übergang  $^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow ^2P_{1/2}, F = 0$  treibt und der andere verschiebt einen Teil des Laserlichts relativ dazu um 2,1 GHz [76]. Die Frequenz und die Intensität dieser beiden Lichtfelder kann somit unabhängig voneinander kontrolliert werden. Die Modulationsbandbreite be-

---

<sup>1</sup>Die Typenbezeichnungen der in diesem Kapitel genannten Geräte sind dem Anhang B zu entnehmen.

trägt hierbei 35(1) MHz bzw. 143(1) MHz [76]. Die Schaltzeiten der AOMs, in der diese das Licht ein bzw. ausschalten, sind weniger als 100 ns [76]. Darüber hinaus ist es jedoch auch möglich, die optische Leistung des Laserlichts kontinuierlich zu regeln.

Für das effizientere Rückpumpen aus dem Zustand  $^2D_{3/2}$  werden zwei unterschiedliche Übergänge bei 935 nm getrieben. Diese liegen etwa 3,07 GHz (vgl. Abschnitt 2.2) auseinander. Die Erzeugung des hierfür notwendigen Laserlichts geschieht mit einem elektrooptischen Modulator (EOM) [77]. In diesem wird der Brechungsindex eines geeigneten Mediums mittels elektrischer Felder moduliert, was zur Erzeugung von Seitenbändern führt. Der Träger des Signals treibt den einen Rückpumpübergang  $^2D_{3/2}, F = 1 \rightarrow ^3D[3/2]_{1/2}, F = 0$  und das rote Seitenband den anderen Übergang  $^2D_{3/2}, F = 2 \rightarrow ^3D[3/2]_{1/2}, F = 1$  [30].

Alle Lasersysteme sind jeweils modular auf einer Lochrasterplatte aufgebaut. Die Polarisation des Laserlichts wird mittels Verzögerungsplatten und Polarisatoren eingestellt, bevor die einzelnen Laserstrahlen überlagert werden. Die Strahlprofile entsprechen in guter Näherung einer gaußschen TEM<sub>00</sub>-Mode mit einem Durchmesser von 174(2)  $\mu\text{m}$  für den Laser mit einer Emissionswellenlänge nahe 369 nm bzw. 160(2)  $\mu\text{m}$  für den Rückpumplaser bei 935 nm [30]. Die typischen optischen Leistungen dieser Laser betragen 50  $\mu\text{W}$  bzw. 1 mW. Anschließend wird es in den Vakuumrezipienten gesandt und dort fokussiert. Hierzu dienen Spiegel und ein achromatisches Objektiv mit einer Brennweite von 200 mm.

### 3.4. Mikrowellensystem

Die Manipulation der Qubits geschieht mittels Mikrowellenpulsen (vgl. Abschnitt 2.6). Darüber hinaus ist Mikrowellenstrahlung notwendig, um beispielsweise eine effiziente Laserkühlung von gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen zu gewährleisten (vgl. Abschnitt 4.1). Eine ausführlichere Darstellung der verwendeten Mikrowellenkette findet sich in [56] und an dieser Stelle soll nur eine Zusammenfassung vermittelt werden.

Die Erzeugung des Signals basiert auf dem Mischen eines kontrollierbaren Nutzsignals mit einem Trägersignal. Ein Mischer erzeugt dabei ein oberes und ein unteres Seitenband, deren Abstand von dem Trägersignal gerade der Frequenz des Nutzsignals entspricht. Der Pegel der Seitenbänder ist hierbei von dem Pegel des Nutzsignals abhängig und die Phasen der Seitenbänder hängen von der des Nutzsignals ab. Bei dem Mischer handelt es sich um einen Ringmischer (double balanced mixer), dessen Besonderheit darin besteht, dass sowohl das Nutzsignal als auch das Trägersignal an dem Ausgang unterdrückt werden und vornehmlich die erzeugten Seitenbänder das Ausgangssignal bilden.

Das Trägersignal stammt von einem Mikrowellenoszillator, der mit einer Frequenz von 12,568 GHz schwingt. Für die Erzeugung des Nutzsignals dient ein Frequenzgene-

rator (VFG) mit einem möglichen Frequenzbereich von 1 MHz bis 150 MHz, der eine phasenkohärente Frequenzumschaltung erlaubt [69; 78]. Beide Quellen sind auf eine Atomuhr stabilisiert. Das Ausgangssignal des Mischers wird durch zwei Verstärkerstufen auf eine Leistung von bis zu 2,5 W verstärkt [56]. Schließlich wird das Signal zu einer Antenne im Wellenleiter in der Vakuumkammer gesandt.

In den Experimenten mit gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen werden Mikrowellensignale in einem Frequenzbereich von 12,62 GHz bis 12,66 GHz benötigt, was sich durch die Nutzung des oberen Seitenbandes erzielen lässt. Das untere Seitenband ist von den relevanten Hyperfeinübergängen typischerweise um mehr als 100 MHz verstimmt und für die gegebene Leistung kann sein Effekt somit vernachlässigt werden.

## 3.5. Abbildungssystem

Die Detektion von Resonanzfluoreszenz ist der Zugang zur Beobachtung gespeicherter Ionen, der in den durchgeführten Experimenten verwendet wird. Daher ist das optische System zum Aufsammeln der Fluoreszenz ein zentraler Bestandteil des Experiments und wird in diesem Abschnitt zusammengefasst.

Das erste optische Element in dem Abbildungssystem ist das Fenster des Vakuumrezipienten, das bei der Entwicklung des Abbildungsobjektivs explizit berücksichtigt wurde [79]. Das verwendete Objektiv ist dahingehend entwickelt worden, dass es eine numerische Apertur von  $NA = 0,4$  aufweist und somit etwa 4% des Raumwinkels abdeckt. Darüber hinaus erlaubt es über den Bildbereich einer typischen Ionenkette eine beugungsbegrenzte Abbildung und somit eine Auflösung von weniger als  $1\ \mu\text{m}$ . Des Weiteren wurde eine gute Transmission bei einer Wellenlänge nahe 369 nm gewählt, um möglichst viel Licht der gespeicherten Ionen aufsammeln zu können. Der Vergrößerungsfaktor des Objektivs beträgt 25 und der Arbeitsabstand ist groß genug, dass das Objektiv außerhalb des Vakuumrezipienten platziert werden kann.

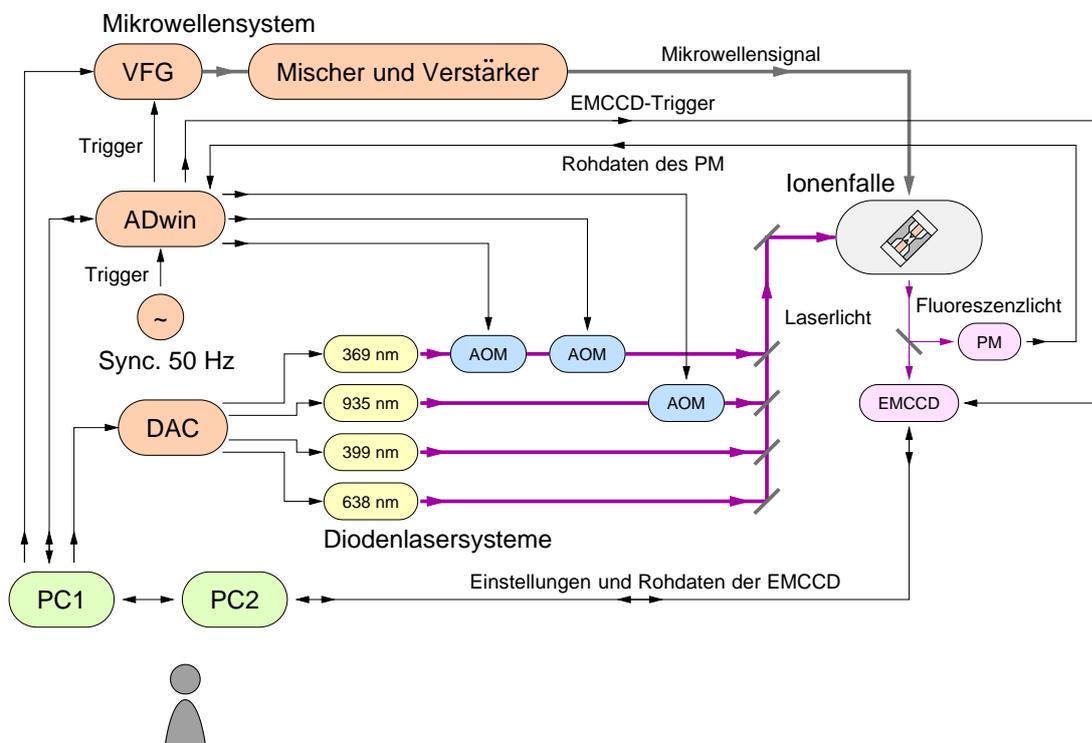
Mittels eines mechanischen Aufbaus kann das Objektiv verfahren werden, um auf die gespeicherten Ionen zu fokussieren. Der gesamte sich anschließende Aufbau ist lichtdicht, damit kein Raumlicht die Photodetektoren erreichen und somit die Ergebnisse beeinträchtigen kann [30]. Zur weiteren Unterdrückung von Licht, das nicht von den gespeicherten Ionen, sondern von Streuung des Laserlichts an der Falle stammt, gibt es zwei beidseits telezentrische Objektive mit einem Raumfilter [80]. Zusätzlich befindet sich ein optischer Bandpassfilter in dem Strahlengang, der bevorzugt Licht bei einer Wellenlänge von 369 nm transmittiert.

Das Fluoreszenzsignal der gespeicherten Ionen kann anschließend entweder mit einem Photomultiplier (PM) und bzw. oder einer EMCCD-Kamera (EMCCD) detektiert werden (vgl. Abschnitt 4.3). Hierfür gibt es die Möglichkeit das Licht mit einem Spiegel in

den PM zu reflektieren, auf den CCD-Chip fallen zu lassen, oder mit einem Strahlteiler auf die beiden Detektoren gleichmäßig aufzuteilen [30].

### 3.6. Experimentsteuerung

In dem Folgenden wird anhand der Abbildung 3.3 kurz die Steuerung des in dieser Arbeit verwendeten experimentellen Aufbaus beschrieben.



**Abbildung 3.3.:** Schematische Darstellung der Steuerung des Experiments. Schwarze Linien symbolisieren einen möglichen Fluss an Steuerbefehlen, Daten und elektrischen Signalen, wobei die Pfeile die Flussrichtung kennzeichnen. Die violetten Linien bezeichnen schematisch den Gang des Laserlichts und der Fluoreszenz. Siehe Text für ausführlichere Erläuterungen.

Das gesamte Experiment lässt sich von einer einzelnen Person, welche die beiden Computer (PC1 und PC2) bedient, steuern. Bei der hierfür verwendeten Software handelt es sich im Wesentlichen um das Programmiersystem LabVIEW des Unternehmens

### 3. Experimenteller Aufbau

---

National Instruments, das auf PC1 installiert ist und für das umfangreiche Software entwickelt worden ist [76; 56; 30]. Auf PC2 ist das Programm Solis des Unternehmens Andor für die Steuerung der EMCCD-Kamera installiert.

Der Computer PC1 ist mit einem Digital-Analog-Wandler (DAC) verbunden, dessen Spannungsbereich 0 V bis +10 V mit einer Auflösung von 16 Bit beträgt. Somit kann er die Referenzresonatoren der einzelnen stabilisierten Lasersysteme beeinflussen und dadurch die Emissionswellenlängen der Diodenlasersysteme regeln.

Zur genauen Steuerung von Laserlichtpulsen dient ein Echtzeitprozessor ADwin Pro der Firma Jäger (ADwin) mit angeschlossenen Digital- und Analogausgängen. Das Licht der beiden Lasersysteme mit Emissionswellenlängen bei 369 nm und 935 nm kann mittels akustooptischer Modulatoren (AOM) in Intensität und Frequenz kontrolliert werden. Der AOM des Rückpump lasers dient dem möglichen Ein- und Ausschalten des Rückpumplichts und die AOMs des Lasers mit einer Emissionswellenlänge bei 369 nm dienen dem Schalten des Präparations- bzw. Kühllaserlichts. Für die Detektion kann die Frequenz des Kühllaserlichts ebenfalls geändert werden und die Detektion nahezu resonant erfolgen. Das Licht der Diodenlasersysteme wird mittels dichroitischer Spiegel überlagert und in die Ionenfalle gestrahlt.

Die Radiofrequenzsignale, aus denen die Mikrowellenpulse gemischt werden, stammen von einem Frequenzgenerator (VFG). Eine Wahl der Frequenz, Amplitude und Phase geschieht ebenfalls von PC1 aus.

Für die Realisierung von Messesequenzen (vgl. Abschnitt 4.2) können die Laserlicht- und Mikrowellenpulse als Sequenzen von PC1 erzeugt und an das ADwin-System und den VFG übermittelt werden. Die Zeitauflösung der Sequenzen beträgt hierbei 25 ns bzw. 5 ns. Eine große Störquelle der Experimente stellt das Netzspannungssignal bei 50 Hz dar. Um das Experiment gegenüber dieser Störquelle unempfindlicher zu machen, sind die Messesequenzen mit den 50 Hz der Netzspannung synchronisiert. Hierfür wartet das ADwin-System auf einen passenden Trigger. Die Synchronisation des VFGs mit dem ADwin erfolgt durch ein Triggersignal, das zu Beginn der ADwin-Sequenz übermittelt wird, und auf welches nachfolgend die Sequenz des VFGs startet.

Das Fluoreszenzlicht aus dem Inneren der Ionenfalle kann von einem Photomultiplier (PM) oder einer EMCCD-Kamera (EMCCD) registriert werden. Erfolgt die Datennahme mit dem Photomultiplier, so werden die registrierten Zählereignisse an eine Zähl elektronik innerhalb des ADwins übermittelt und von dort zur Laufzeit an PC1 übermittelt. Für den Fall, dass die Datennahme hingegen mit der EMCCD-Kamera erfolgt, werden vor Beginn der Sequenz notwendige Parameter wie zum Beispiel die Belichtungsdauer und die gewünschte Anzahl an Bildern von PC1 an den Kamera-Rechner (PC2) über das lokale Netzwerk übermittelt. Die Synchronisation der Datennahme erfolgt dann mittels Trigger-Signalen ausgehend vom ADwin-System. Hierbei wird jede Belichtung mit einem Trigger gestartet. Die Bilder der EMCCD-Kamera werden zur Laufzeit der

Messesequenz an den PC2 übermittelt. Für die Auswertung der Rohdaten ist auf beiden Computern das Programm MATLAB des Unternehmens The MathWorks installiert. Selbstentwickelte Zusatzskripte erlauben dann die Datenauswertung (siehe hierzu auch [56] und [30]).

#### **Anpassung der Experimentsteuerung**

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, wie sich die vorherige Architektur [56; 30] von dem oben beschriebenen Aufbau unterscheidet. Vorher war der DAC nicht vorhanden und die Gleichspannung an den Referenzresonatoren der Diodenlasersysteme wurden von dem ADwin-System geregelt. Während dem Ausführen einer Messesequenz ist ein Zugriff auf das ADwin oder den VFG nicht möglich. Aus diesem Grund konnte die Emissionswellenlängen der Laser während dem Ausführen einer Messesequenz nicht geändert werden, um gegebenenfalls eine Drift zu korrigieren. Mit dem DAC, dessen Ansteuerung von den vorprogrammierten Sequenzen unabhängig erfolgen kann, ist dieses nun jederzeit möglich.

# 4

## Experimentelle Methoden

In dem vorliegenden Kapitel werden die am häufigsten verwendeten experimentellen Methoden für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente erläutert. Angefangen wird hierbei mit den Grundlagen, wie dem Bereitstellen von lasergekühlten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen in dem definierten Anfangszustand  $^2S_{1/2}, F = 0$  und dem Auslesen von Qubit-Zuständen mittels Resonanzfluoreszenz. Hieran anschließend werden komplexere Methoden, die im experimentellen Ablauf häufig benötigt werden, vorgestellt. Dabei handelt es sich um die Durchführung von Spektroskopie und die Beobachtung von Rabi-Oszillationen bzw. von Ramsey-Interferenzstreifen. Den Abschluss bilden die Beschreibungen, wie die Fidelity von Quantenzuständen experimentell gemessen und die wie die J-Kopplung zwischen Ionen experimentell bestimmt wird.

### 4.1. Bereitstellen lasergekühlter Ionen

In dem folgenden Abschnitt wird erläutert, wie einzelne gespeicherte lasergekühlte  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen in ihrem Grundzustand  $^2S_{1/2}, F = 0$  zur Quanteninformationsverarbeitung bereitgestellt werden. Die hier beschriebenen experimentellen Prozeduren bilden somit die Grundlage der meisten im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente. Die Realisierung basiert dabei auf Mikrowellen- und Laserlichtpulsen. Für eine Beschreibung der notwendigen Gerätschaften soll auf das Kapitel 3 verwiesen werden.

### 4.1.1. Photoionisation

Wie in dem Abschnitt 2.4 diskutiert wurde, erlaubt das Pseudopotenzial, welches von der linearen Paul-Falle im Fallenzentrum (vgl. Abbildung 3.1) erzeugt wird, ein Speichern von Ionen. Eine praktische Frage ist dabei, wie Ionen in das Fallenpotenzial gelangen können. Hat ein Ion hinreichend kinetische Energie, um in das Potenzial von außen hin einzudringen, so ist diese Energie auch ausreichend, um es wieder verlassen zu können. Eine Lösung besteht darin, die Ionen innerhalb des Pseudopotenzials zu erzeugen. Zu diesem Zweck wird zuerst ein Strahl von Neutralatomen auf das Fallenzentrum gerichtet. Die Neutralatome haben keine effektive elektrische Ladung, über welche sie mit dem Fallenpotenzial wechselwirken können und somit bleibt ihre Bewegung nahezu unbeeinflusst. Innerhalb des Pseudo-Potenzials werden die Atome schließlich ionisiert. Auf diese Weise ist es möglich, dass einige Ionen innerhalb des Pseudopotenzials eine kinetische Energie besitzen, die geringer als die Höhe des Potenzialwalls ist und sie somit in der Falle gespeichert werden können. Dieses wird zudem von der Laserkühlung begünstigt, welche die Bewegung der Ionen verlangsamt und dadurch ihre kinetische Energie verringert.

Experimentell wird mittels Widerstandsheizern ein geringer Teil von festem Ytterbium in den Atomöfen (vgl. Abschnitt 3.1) verdampft. Dieses führt zu einem Fluss an Neutralatomen in die Falle hinein. Der anschließende Ionisationsvorgang von Ytterbium geschieht durch Photoionisation in zwei Schritten [81; 27; 82]. In einem ersten Schritt wird der Übergang  $^1S_0 \leftrightarrow ^1P_1$  in neutralem Ytterbium mit Laserlicht nahe 399 nm getrieben. Als Laserlichtquelle steht dafür ein Diodenlasersystem zur Verfügung (vgl. Abschnitt 3.3). Die Ionisationsenergie eines angeregten Ytterbium-Atoms entspricht einer Wellenlänge kleiner als 394 nm und in dem experimentellen Aufbau wird hierfür der Kühl- und Detektionslaser bei 369 nm genutzt.

Für die verwendeten optischen Leistungen von etwa  $100 \mu\text{W}$  hat der Übergang  $^1S_0 \leftrightarrow ^1P_1$  in neutralem Ytterbium an dem experimentellen Aufbau eine Breite von etwa  $2\pi \times 60 \text{ MHz}$  [56]. Diese ist wesentlich breiter als die natürliche Linienbreite von  $2\pi \times 28 \text{ MHz}$  [82]. Die beobachtete Verbreiterung beruht hierbei auf einer Sättigungsverbreiterung und einer Doppler-Verbreiterung aufgrund der Bewegung der Neutralatome. Die Resonanzfrequenz des atomaren Übergangs  $^1S_0 \leftrightarrow ^1P_1$  ist isotonenabhängig, wobei die Isotonenverschiebung einige 100 MHz beträgt. Somit ist es möglich, isotonenselektiv zu photoionisieren und zu laden. Die ungeraden Isotope haben jedoch eine Hyperfeinaufspaltung von ebenfalls einigen 100 MHz und somit liegen für eine Ytterbiumquelle mit der natürlichen Isotonenzusammensetzung einige Übergänge unterschiedlicher Isotope nahe beieinander. Aus diesem Grund wird bei dem verwendeten Aufbau isotonenangereichertes Ytterbium verwendet. Durch eine Unterbrechung des Laserstrahls bei 399 nm ist es möglich, den Ladevorgang zu beenden und somit eine gewünschte Anzahl an Ionen deterministisch zu laden.

### 4.1.2. Zustandspräparation

Vor der gezielten Manipulation von Qubits ist es notwendig, diese in einem wohldefinierten Zustand zu initialisieren. Dieses geschieht mittels optischen Pumpens in den Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 0$ . Die Grundlage hierfür bildet das Treiben des Übergangs  ${}^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow {}^2P_{1/2}, F = 1$  (vgl. Abbildung 4.1 (c)). Der Zustand  ${}^2P_{1/2}, F = 1$  kann zum einen zurück nach  ${}^2S_{1/2}, F = 1$  zerfallen, wodurch eine erneute Anregung stattfinden kann. Darüber hinaus ist aber ebenso der Zerfall in den Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 0$  möglich. Dieser ist 12,6 GHz von dem Präparationsübergang entfernt und eine Anregung aus diesem Zustand heraus ist wegen der deutlich geringeren natürlichen Linienbreite des Übergangs von etwa 20 MHz unterdrückt. Somit sind mit 100% verträgliche Präparationseffizienzen möglich [83; 43]. In diesem experimentellen Aufbau lässt sich eine untere Grenze für die Präparationseffizienzen von 0,9975 abschätzen (vgl. Abschnitt 5.3.3 für eine Diskussion). Da der Zustand  ${}^2P_{1/2}$  in den Zustand  ${}^2D_{3/2}$  zerfallen kann und somit der Präparationsprozess für dessen Lebensdauer von etwa 53 ms [40] unterbrochen ist, ist es notwendig neben dem Präparationslaserlicht auch das Rückpumpulaserlicht bei 935 nm einzustrahlen (siehe auch den Abschnitt 2.2).

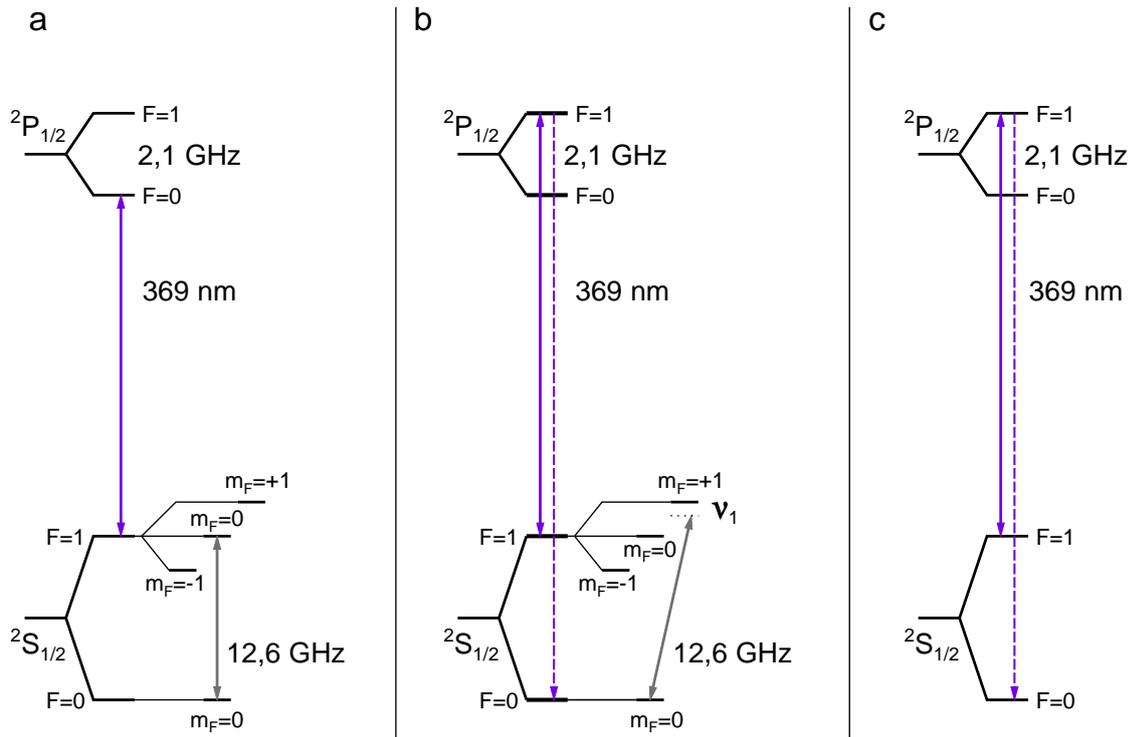
Der verwendete Präparationsübergang  ${}^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow {}^2P_{1/2}, F = 1$  ist von dem Kühl- und Detektionsübergang  ${}^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow {}^2P_{1/2}, F = 0$  um 2,1 GHz verschoben. Erzeugt wird das Präparationslaserlicht durch akustooptische Modulation des Detektionslaserlicht (vgl. Abschnitt 3.3).

### 4.1.3. Doppler-Kühlung

Sind die Ionen in die Falle geladen, führt die Laserkühlung dazu, dass sie zu einer Kette kristallisieren. Hierbei nehmen die Ionen die durch das Fallenpotenzial und ihre wechselseitigen Coulomb-Potenziale definierten Gleichgewichtspositionen ein (vgl. Abschnitt 2.4). Zur Doppler-Kühlung dient der Übergang  ${}^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow {}^2P_{1/2}, F = 0$ , der mittels Laserstrahlung bei 369 nm getrieben wird (siehe Abbildung 4.1 (a)). Das Ion kann hierbei nicht-resonant in den Zustands  ${}^2P_{1/2}, F = 1$  angeregt werden, von dem aus es nach  ${}^2S_{1/2}, F = 0$  zerfallen und somit den Kühlübergang verlassen kann. Aus diesem Grund wird der Hyperfeinübergang  $F = 0$  nach  $F = 1$  des Grundzustands  ${}^2S_{1/2}$  mit der Mikrowellen bei 12,6 GHz getrieben und die Besetzung zurück in den Kühlübergang überführt. Das eingestrahlte Laserlicht ist etwa 20 MHz von dem Kühlübergang rotverstimmt und somit kann die Doppler-Temperatur [84]

$$T_D = \frac{\hbar\gamma}{2k_B} = \frac{\langle n_D \rangle \hbar\nu_1}{k_B} \quad (4.1.1)$$

erreicht werden, wobei  $\gamma$  der natürlichen Linienbreite des Kühlübergangs entspricht. Für die typische axiale Fallenfrequenz von  $\nu_1 = 2\pi \times 124$  kHz ergibt dieses einen thermischen



**Abbildung 4.1.:** Die zum Kühlen und Präparieren eines Ions relevanten Übergänge in dem Termschema von  $^{171}\text{Yb}^+$ . (a) Der optische Übergang  $^2\text{S}_{1/2}, F=1 \leftrightarrow ^2\text{P}_{1/2}, F=0$  dient zusammen mit dem Mikrowellenübergang der Doppler-Kühlung. (b) Zum Seitenbandkühlen wird die Frequenz des Mikrowellensignals um den Betrag der axialen Fallenfrequenz rotverstimmt und der Präparationsübergang (in c) mit dem Laser getrieben. Durchgezogene Linien kennzeichnen getriebenen Übergängen und getrichelte Linien symbolisieren mögliche bedeutende Zerfallskanäle. Während all dieser Prozesse wird der Übergang  $^2\text{S}_{1/2} \leftrightarrow ^2\text{P}_{1/2}$  durch den Rückpumplaser nahe 935 nm effektiv geschlossen.

Zustand, der durch eine mittleren Phononenbesetzung von  $\langle n_D \rangle = 81$  gekennzeichnet ist. An dem vorhandenen Aufbau konnten mittels Doppler-Kühlung thermische Zustände mit einer mittleren Phononenbesetzung von  $\langle n \rangle = 171(40)$  nachgewiesen werden [56]. Die Abweichung wird zum einen durch Instabilitäten der Laser erklärt. Die Doppler-Temperatur kann nur für einen Laser, der schmalbandig im Vergleich zur natürlichen Linienbreite des Übergangs ist, und für eine präzise Rotverstimmung erreicht werden. Beides kann an dem vorhandenen System nur mit endlicher Genauigkeit erreicht werden. Zum anderen führen aber auch Fluktuationen der Fallenelektroden zu zusätzlichen

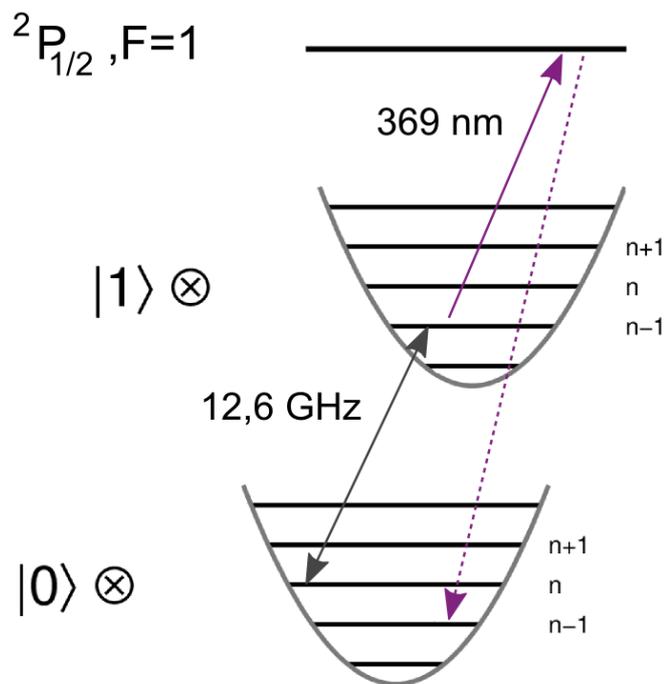
Heizraten, welche der Doppler-Kühlung entgegenwirken. Siehe auch [56] für eine detailliertere Diskussion.

#### 4.1.4. Seitenbandkühlung

Ist es erforderlich, die Ionen nahe oder gar in den Bewegungsgrundzustand  $\langle n \rangle = 0$  zu kühlen, so ist dieses mittels Seitenbandkühlung im Mikrowellenregime möglich [30; 66].

Als Trägerübergang dient hierfür der Hyperfeinübergang  $^2S_{1/2}, F = 0$  nach  $^2S_{1/2}, F = 1, m_F = +1$ . Der Magnetfeldgradient führt zu einem effektiven Lamb-Dicke-Parameter, der die Wechselwirkung zwischen dem internen elektronischen Zustand und dem externen Bewegungszustand beschreibt (vgl. Abschnitt 2.5.3). In der Konsequenz gibt es Bewegungsseitenbänder, die jeweils Vielfache der axialen Fallenfrequenz von dem sogenannten Trägerübergang entfernt sind. Im sogenannten Lamb-Dicke-Regime können diese Bewegungsseitenbänder dann spektral aufgelöst werden [30; 56]. Die typische axiale Fallenfrequenz beträgt 124 kHz und ist somit größer als die typischen Rabi-Fre-

**Abbildung 4.2:** Übergänge des Seitenbandkühlens. Die rotverstimmte Mikrowelle bei 12,6 GHz treibt den Übergang zwischen dem Grundzustand  $|0\rangle \otimes |n\rangle$  und dem angeregten Zustand  $|1\rangle \otimes |n-1\rangle$  (durchgezogener grauer Pfeil). Laserlicht bei 369 nm koppelt den angeregten Zustand an das kurzlebige Niveau  $^2P_{1/2}, F = 1$  (durchgezogener violetter Pfeil). Beim spontanen Zerfall zurück in den Grundzustand (gestrichelter violetter Pfeil) bleibt die Schwingungsquantenzahl  $n-1$  bevorzugt erhalten. Somit wird die Besetzung der Schwingungsmode pro Kühlzyklus im Mittel um ein Phonon reduziert, bis der Bewegungsgrundzustand  $n = 0$  erreicht ist.



sequenzen der Träger-Übergänge von 50 kHz. Für diese Parameter können daher die Seitenbänder aufgelöst und das rote gezielt angeregt werden.

Zur Seitenbandkühlung wird das erste rote Seitenband verwendet. Dafür wird die Mikrowellenstrahlung gerade um die axiale Fallenfrequenz rotverstimmt (siehe Abbildung 4.1 (b)). In der Konsequenz wird der Übergang  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle \otimes |n\rangle \leftrightarrow |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = +1\rangle \otimes |n - 1\rangle$  kohärent getrieben (vgl. den Abschnitt 2.5.3).

Der spontane Zerfall zwischen den beiden Hyperfeinzuständen ist vernachlässigbar gering und somit ist ein zusätzlicher dissipativer Prozess zum Kühlen notwendig, der den angeregten Zustand an einen kurzlebigen koppelt [65]. Dieser Prozess ist das Treiben des Übergangs  $^2S_{1/2}, F = 1$  nach  $^2P_{1/2}, F = 1$  und der anschließende schnelle Zerfall nach  $^2S_{1/2}, F = 0$ . Durch das simultane Einstrahlen der Mikrowelle und des Laserlichts<sup>1</sup> wird effektiv der Übergang  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle \otimes |n\rangle \rightarrow |^2S_{1/2}, F = 0\rangle \otimes |n - 1\rangle$  inkohärent getrieben, bis schließlich der Bewegungsgrundzustand  $|n = 0\rangle$  erreicht ist. Siehe hierzu auch die Abbildung 4.2. Die am experimentellen Aufbau beobachteten Heizraten erlauben, zusammen mit den erreichbaren Kühlraten, die Präparation eines Ions in einem thermischen Bewegungszustand mit  $\langle n \rangle = 0,3(3)$  nach einer Kühldauer von 250 ms [66]. Für Systeme von drei Ionen konnten nach Kühlpulsen von 10 ms Länge thermische Bewegungszustände mit einer mittleren Besetzung von  $\langle n \rangle = 8(3)$  erreicht werden. Da für die durchgeführten Experimente eine Kühlung bis in den Grundzustand nicht notwendig war, wurde auf eine tiefere und somit längere Kühlung verzichtet.

## 4.2. Messesequenzen

Nach der Beschreibung, wie einzelne lasergekühlte Ionen zur Quanteninformationsverarbeitung bereitgestellt werden, wird in diesem Abschnitt eine exemplarische Messesequenz der im Magnetfeldgradienten gespeicherten Ionen erläutert. In der Abbildung 4.3 ist das Schema einer solchen Messesequenz dargestellt. Es wird davon ausgegangen, dass bereits ein oder mehrere  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen in der linearen Falle gespeichert sind, diese mittels Doppler-Kühlung hinreichend gekühlt wurden und ihre Gleichgewichtspositionen eingenommen haben.

Für den Fall, dass die Ionen tiefer als die Doppler-Temperatur gekühlt werden sollen, erfolgt in einem ersten Schritt die Seitenbandkühlung. Zur Vereinfachung wird hierbei eines der Ionen gekühlt und die Kühlung der anderen erfolgt sympathetisch über die gegenseitige Coulomb-Wechselwirkung [85]. Während des Seitenbandkühlens werden von dem Mikrowellen- und dem Lasersystem bei 369 nm Pulse eingestrahlt. Danach geschieht die Initialisierung der Ionen ausschließlich mittels des Präparationslaserlichts

<sup>1</sup>Die optische Leistung des Laserlichts muss hierbei vorsichtig abgestimmt werden. Ist sie zu groß, führt dieses zu einer Verbreiterung des effektiven Übergangs und die Seitenbänder können ggf. nicht länger aufgelöst werden. Siehe auch [30; 66] für nähere Angaben und Diskussionen.

#### 4. Experimentelle Methoden



**Abbildung 4.3.:** Schematische Darstellung einer Messsequenz. Jede Sequenz wird zu Beginn mit den 50 Hz der Netzspannung synchronisiert. Eine farbige Füllung der Rechtecke symbolisiert eine Aktivität des entsprechenden Gerätes während des entsprechenden Schrittes in der Messsequenz. Siehe den Text für weitere Erläuterungen.

in dem jeweiligen Grundzustand  $^2S_{1/2}, F = 0$ . Nun kann eine gezielte Manipulation von Qubits erfolgen. Aufgrund des Magnetfeldgradienten haben diese unterschiedliche Resonanzfrequenzen und sind somit im Frequenzraum adressierbar (vgl. Abschnitt 2.5). Während der beliebigen Manipulation, die aus Mikrowellenpulsen und freien Entwicklungsdauern bestehen kann, ist alles Laserlicht nahe 369 nm unterdrückt, um Streuung zu verhindern, die zu einer Dekohärenz des Systems führen würde. Das Laserlicht bei 935 nm hingegen hat keinen Einfluss auf die Qubits und wird kontinuierlich eingestrahlt<sup>2</sup>. Nach der Manipulation erfolgt das Auslesen der Qubit-Zustände. Hierfür werden die Ionen mit Detektionslaserlicht bestrahlt und die zustandsabhängige Resonanzfluoreszenz mit einem geeigneten Detektor registriert (siehe Abschnitt 4.3). Die Frequenz des Detektionslichts ist hierbei um 10 MHz rotverstimmt. Aufgrund der Natur des Messprozesses, bei dem jeweils ein Ion entweder als dunkel oder hell detektiert wird, ist es notwendig die Messsequenzen zu wiederholen, um Wahrscheinlichkeitsaussagen machen zu können und gegebenenfalls den Zustand nach der Manipulation zu rekonstruieren. Nach jeder Detektion erfolgt eine Doppler-Kühlung mittels des Kühllaserlichts, um die Ionen wieder auf die Doppler-Temperatur abzukühlen. Die Fluoreszenz wird da-

<sup>2</sup>Das Laserlicht führt zu einer Lichtverschiebung und daher können mögliche Intensitätsschwankungen eine Quelle von Dephasierung sein. Experimentell wurde jedoch beobachtet, dass die Kohärenzzeit für magnetfeldunabhängige Niveaus um mindestens zwei Größenordnungen länger war als für die verwendeten Qubit-Zustände. Somit ist das Laserlicht bei 935 nm kein limitierender Faktor.

bei ebenfalls von einem Detektor registriert, um sicherzustellen, dass ein lasergekühltes Ion in der Falle vorhanden ist.

### 4.3. Zustandsdetektion

Neben der Präparation und Manipulation von Qubit-Zuständen ist das Auslesen eines Qubits bzw. eines Registers von selbigen eine grundlegende Operation der Quanteninformationsverarbeitung. Somit fand auch bei den meisten im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten am Ende eine Detektion von Qubit-Zuständen statt.

Die Umsetzung der Zustandsdetektion basiert auf der Beobachtung von zustandsabhängiger Resonanzfluoreszenz. Als Detektionsübergang dient der Dipolübergang  ${}^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow {}^2P_{1/2}, F = 0$ . Die natürliche Linienbreite des Übergangs bei 369 nm beträgt etwa 20 MHz und die Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands  ${}^2S_{1/2}$  beträgt für die verwendeten Magnetfelder von wenigen Gauß etwa 12,6 GHz. Die resultierende Zeeman-Aufspaltung des Zustands  ${}^2S_{1/2}, F = 1$  ist mit einigen Megahertz vergleichbar mit der natürlichen Linienbreite des Detektionsübergangs. Wird somit Laserlicht resonant bzw. um wenige Megahertz rotverstimmt zum Detektionsübergang eingestrahlt und Resonanzfluoreszenz beobachtet, so kann man darauf schließen, dass sich das Qubit in dem Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 1$  befindet. Dieses entspricht dem Nachweis der Besetzung eines angeregten Qubitzustands  $|1\rangle$  bzw.  $|0'\rangle$  (vgl. Abschnitt 2.2). Wird hingegen nach Einstrahlen des Detektionslaserlichts keine Resonanzfluoreszenz beobachtet, so lässt sich daraus schließen, dass sich das Qubit im Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 0$  befindet, welcher dem Grundzustand  $|0\rangle$  entspricht.

Bei der Beobachtung von Resonanzfluoreszenzen ergibt sich die praktische Frage, ab wann man Fluoreszenz als *beobachtet* bezeichnet. Das zur Abbildung verwendete Objektiv, welches lediglich einen Raumwinkel von 4% abdeckt und die endliche Quanteneffizienz der verwendeten Detektoren führen dazu, dass nur ein kleiner Teil, der von einem Ion emittierten Photonen, nachgewiesen werden können.

Die Zählstatistik der Photonen, die einen Detektor im Fall eines dunklen oder hellen Ions erreichen, folgt einer Überlagerung von zwei Poisson-Verteilungen. Eine dieser Verteilungen wird beschrieben durch einen Mittelwert für ein dunkles und die andere durch einen Mittelwert für ein helles Ion. Durch unbeabsichtigte Zustandsänderungen aufgrund von nicht-resonanten Anregungen während der Detektion wird die resultierende Zählstatistik jedoch zusätzlich beeinflusst und nicht länger von zwei Poisson-Verteilungen beschrieben [86; 43]. Die Zustandsänderungen führen zu einer Änderung der Verteilungen und zu einem Überlapp, der größer ist, als zwei Poisson-Verteilungen dieses beschreiben würden.

Die einfachste Methode des Zustandsnachweises ist die sogenannte Schwellwert-Methode (threshold method) bei der das Fluoreszenzsignal mit einem vordefinierten

Schwellwert verglichen wird. Ist die registrierte Fluoreszenz kleiner als der Schwellwert, so wird das Ion als dunkel und somit im Zustand  $|0\rangle$  angenommen. Andernfalls wird das Ion als hell angenommen und dem Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 1$  zugeordnet. Im Folgenden wird das Ausleseprotokoll für zwei unterschiedliche Detektoren diskutiert. Das Kapitel 5 enthält die Diskussion einer anderen Detektionsmethode, die auf der zeitaufgelösten Beobachtung von Fluoreszenz basiert.

### 4.3.1. Zustandsnachweis mit dem Photomultiplier

In dem experimentellen Aufbau befindet sich ein Photomultiplier<sup>3</sup>, der geeignet ist, einzelne Fluoreszenzphotonen von gespeicherten Ionen nachzuweisen. Die Anzahl der registrierten Zählereignisse während unterschiedlicher Zeitintervalle kann mit der angeschlossenen Zählerelektronik (vgl. Abschnitt 3.6) aufgezeichnet werden. Somit kann aus der Gesamtanzahl von registrierten Fluoreszenzphotonen mittels der Schwellwert-Methode der Zustandsnachweis erfolgen. Darüber hinaus erlaubt die Zählerelektronik auch, die Statistik der Ankunftszeiten einzelner Photonen aufzuzeichnen. In Kapitel 5 wird ein hierauf basierendes Protokoll des Zustandsnachweises motiviert und beschrieben.

### 4.3.2. Zustandsnachweis mit der EMCCD-Kamera

Ein Photomultiplier bietet keine Ortsauflösung und daher kann nur registriert werden, *wie viele* Ionen hell bzw. dunkel sind, aber nicht *welche*. Um den Zustand eines individuellen Ions auslesen zu können, wurde im Rahmen dieser Arbeit zusätzlich eine sogenannte EMCCD-Kamera<sup>4</sup> (electron multiplying charged coupled device) in den experimentellen Aufbau integriert. Mit dieser ist es möglich, die Fluoreszenz aus der Fallenregion ortsaufgelöst zu detektieren und einzelnen Ionen zuzuordnen.

Das ist möglich, da die EMCCD-Kamera auf einem CCD-Chip aus einzelnen Pixeln basiert. Jeder Pixel ist aus einer Halbleiterstruktur aufgebaut, die geeignet ist, während einer Belichtungsdauer das Fluoreszenzlicht von gespeicherten Ionen zu detektieren. Trifft Licht auf ein solches Pixel, so werden in der Halbleiterstruktur von den Photonen Elektron-Loch-Paare erzeugt. Die Quanteneffizienz, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Fluoreszenzphoton nahe 369 nm ein Elektron-Loch-Paar erzeugt, beträgt für den verwendeten Chip etwa 0,65 [87]. Durch elektrische Felder werden die Elektronen innerhalb des Chips verschoben und dienen somit als Träger des Ladungssignals. Während dem Auslesen des Chips durchlaufen die Ladungsträger jedes Pixels ein Verstärkungs-Register. In diesem wird die Anzahl der Ladungsträger durch einen auf

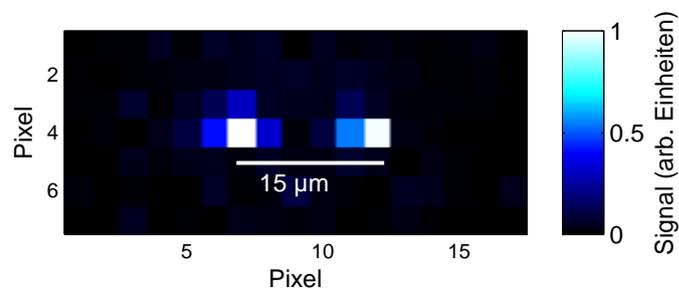
---

<sup>3</sup>Modell R7518 der Firma Hamamatsu. Eine genauere Beschreibung der Betriebsparameter ist [30] zu entnehmen.

<sup>4</sup>iXon Ultra DU-897U-CS0-EXF von der Firma Andor Technology.

Stoßionisation basierenden Lawineneffekt erhöht (electron multiplying) und anschließend das verstärkte Ladungssignal in einem Analog-Digital-Wandler digitalisiert. Am Ende des Auslesens wird die Information von der EMCCD-Kamera an einen Computer übertragen und kann dort weiter ausgewertet werden.

Für die Auswertung der durchgeführten Experimente war es nie notwendig die Signale des gesamten CCD-Chips auszuwerten. Stattdessen genügte es, nur einen kleineren Ausschnitt, auf den die Ionen abgebildet wurden (region of interest), zu berücksichtigen. Dieser Ausschnitt betrug typischerweise eine Höhe von 40 und eine Breite von 120 Pixeln für zwei bis drei Ionen. Darüber hinaus hat es sich als hilfreich erwiesen, mehrere physikalische Pixel zu einem einzelnen zusammenzufassen. Dieses sogenannte Binning geschieht durch elektrische Potenziale auf dem CCD-Chip, wodurch die Ladungssignale der beteiligten Pixel zusammen verstärkt und digitalisiert werden. Auf diese Weise wurden typischerweise  $4 \times 4$  oder  $8 \times 8$  Pixel zu einem zusammengefasst, wodurch die Auslesegeschwindigkeit erhöht und darüber hinaus das Ausleserauschen reduziert wurde. Die Belichtungsdauer betrug bei den Experimenten 2 ms und der Verstärkungsfaktor wurde zu 300 gewählt. Zur Vermeidung eines Dunkelstroms wurde der Detektor-Chip üblicherweise auf  $-80^\circ\text{C}$  gekühlt. Weitere Parameter der Datennahme finden sich in dem Anhang M.



**Abbildung 4.4.:** Mit der EMCCD-Kamera detektierte ortsaufgelöste Kühlfluoreszenz von zwei  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen. Die beiden Ionen können räumlich aufgelöst werden und der dargestellte Maßstab ergibt sich aus dem berechneten Abstand der Ionen im Fallenpotenzial und ihrem Abstand in der Abbildung. Die Belichtungszeit beträgt hier 100 ms und das Binning  $4 \times 4$ .

Die Abbildung 4.4 zeigt die ortsaufgelöste Resonanzfluoreszenz zweier gespeicherter  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen. Der Abbildungsmaßstab für das gewählte Binning von  $8 \times 8$  Pixeln lässt sich aus dem räumlichen Abstand der beiden Ionen in dem axialen Fallenpotenzial (vgl.

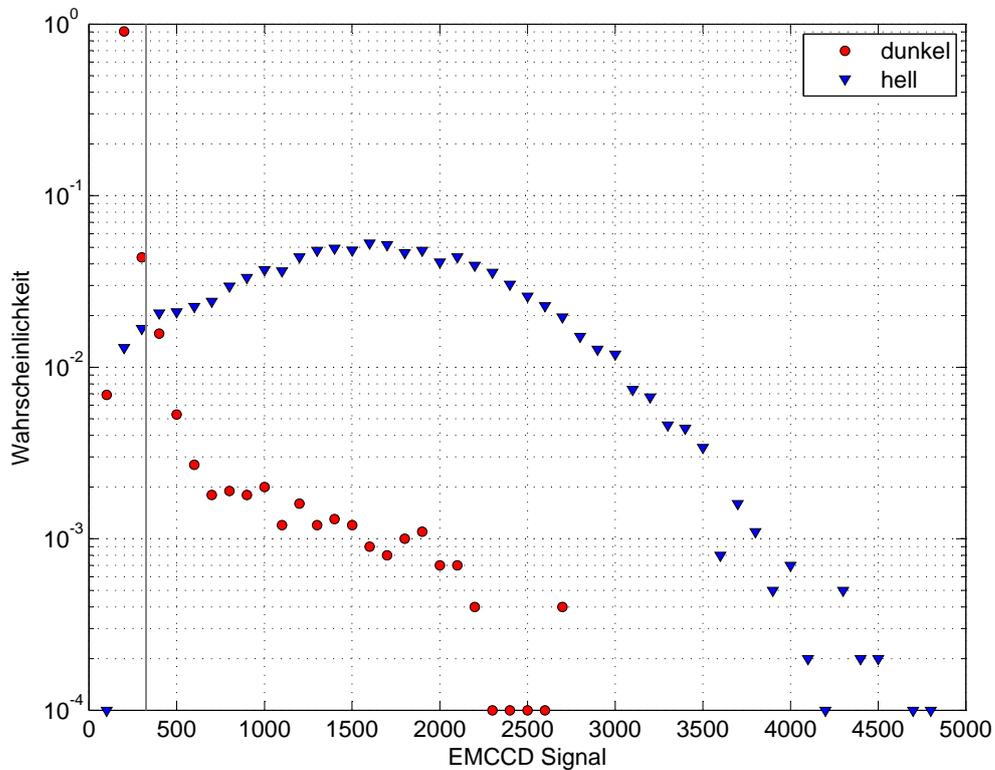
Abschnitt 2.4) und dem Abstand ihrer Abbildungen bestimmen. Es folgt der Maßstab von  $2,95(12) \mu\text{m}$  pro Pixel [66].

Für die Datenauswertung hat es sich als vorteilhaft erwiesen, nur die Pixel, die den Großteil der Fluoreszenz eines Ions registrieren, auszuwerten. Um nun die Güte des Zustandsnachweises zu quantifizieren, werden die Detektionsfehler  $\eta_{\text{hell}}$  und  $\eta_{\text{dunkel}}$  definiert. Diese bezeichnen die Relation, wie häufig ein helles bzw. dunkles Ion in dem falschen Zustand nachgewiesen wird. Zur Messung dieses Fehlers wurde ein einzelnes Ion entweder in dem hellen Zustand  $^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  oder in dem dunklen  $^2S_{1/2}, F = 0$  präpariert und unmittelbar danach mit Detektionslicht beschienen. Dieser Vorgang wurde jeweils 10000 Mal wiederholt. Die Präparation des dunklen Zustands geschah durch optisches Pumpen mit einem möglichen Präparationsfehler von weniger als 0,0025 (vgl. Abschnitt 4.1.2). Der helle Zustand wurde durch einen resonanten  $\pi$ -Puls präpariert (vgl. Abschnitt 2.6). Die Adressierfrequenz war hierbei bis auf 1 kHz und die Rabi-Frequenz auf  $2\pi \times 100$  Hz genau bestimmt. Mit der Rabi-Frequenz von etwa  $2\pi \times 50$  kHz ergibt sich ein Präparationsfehler in den hellen Zustand von weniger als 0,0029 (vgl. Abschnitt 2.6.2). Ist nun der gemessene Detektionsfehler größer als der Präparationsfehler, so kann man davon ausgehen, dass dieser hauptsächlich auf die Detektion zurückzuführen ist.

Für den Fall, dass das sich das Ion zum Beispiel aufgrund von Stößen mit Restgasatomen in einem Zustand außerhalb des Detektionsübergangs befindet, werden die Ergebnisse verfälscht, da es immer als dunkel registriert würde. Aus diesem Grund wird zusätzlich die Kühlfluoreszenz detektiert. Weicht diese für eine Messung deutlich von der anderer Messungen nach unten ab, so wird das zugehörige Ergebnis verworfen. In der Abbildung 4.5 ist die resultierende Zählstatistik zu finden. Man kann deutlich erkennen, dass ein dunkel präpariertes Ion nur zu einem geringen Signal von etwa 200 innerhalb des untersuchten EMCCD-Pixels führt. Ist das Ion hingegen hell präpariert, so führt dieses zu größeren Signalen, die um einem Maximum nahe 1800 breit verteilt sind. Der Detektionsfehler entsteht nun durch den Überlapp der beiden Verteilungen. Offensichtlich ist hierbei der Anteil eines großen Signals (mehr als 500) für ein dunkel präpariertes Ion. Dieser Anteil resultiert hauptsächlich - neben Streulicht - von Ladungsträgern, die während des Betriebs des CCD-Chips erzeugt werden, sogenannten CICs (clock induced charges). Ein anderer Effekt, der zu einem Überlapp der beiden Verteilungen führt, ist die Breite der Verteilung für ein hell präpariertes Ion. Aufgrund des Ausleserausens des AD-Wandlers, der das Ladungsträgersignal digitalisiert, ist diese doppelt so breit wie die Poisson-Statistik der Photonen, die den Chip erreichen.

Der Detektionsfehler eines hellen Ions ist

$$\eta_{\text{hell}} = \frac{\text{Anzahl dunkel detektierter Ionen}}{\text{Anzahl hell präparierter Ionen}} \quad (4.3.1)$$



**Abbildung 4.5.:** Histogramme der EMCCD-Kamera für ein helles bzw. dunkles Ion. Die graue Linie bei 325 kennzeichnet den Schwellwert, für den sich ein minimaler mittlerer Detektionsfehler von 0,04 ergibt.

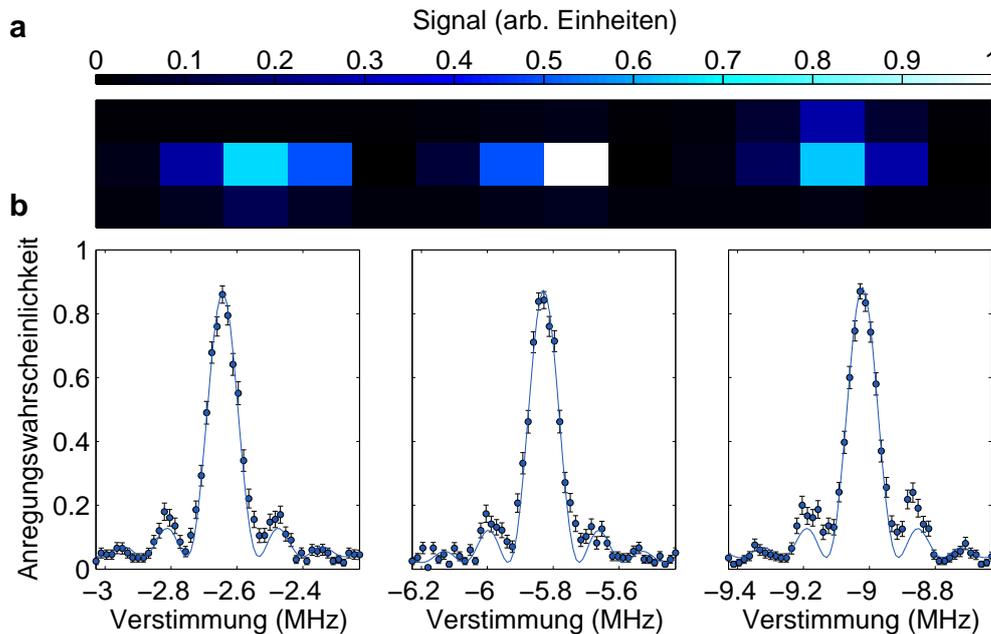
und der eines dunklen analog

$$\eta_{\text{dunkel}} = \frac{\text{Anzahl hell detektierter Ionen}}{\text{Anzahl dunkel präparierter Ionen}} \quad (4.3.2)$$

Für einen Schwellwert von 325 ergibt sich für beide Fälle ein Detektionsfehler von 0,04.

## 4.4. Mikrowellen-optische Doppelresonanz-Spektroskopie

Mittels kohärenter mikrowellen-optischer Doppelresonanz-Spektroskopie kann die Adressierfrequenz einzelner Qubits bestimmt werden. Ein lasergekühltes Ion wird hierbei mit-



**Abbildung 4.6.:** Mikrowellen-optische Doppelresonanz-Spektroskopie von drei Ionen in einem Magnetfeldgradienten. (a) Ortsaufgelöste Resonanzfluoreszenz der in der Paul-Falle gespeicherten Ionen, wie sie mittels EMCCD-Kamera detektiert wird. Während der Messsequenz werden drei Mikrowellenpulse unmittelbar nacheinander eingestrahlt. Die Frequenz eines jeden Pulses liegt dabei in der Nähe eines der magnetfeldabhängigen Übergänge  $^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow ^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1$ . Die Anregungswahrscheinlichkeit eines jeden Ions ist jeweils in Abhängigkeit der Verstimmung des Mikrowellenpulses von dem magnetischen  $\pi$ -Übergang  $^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow ^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  bei etwa 12,642828 GHz dargestellt (b). Aufgrund des Frequenzabstands von etwa 3,19 MHz und einer Rabi-Frequenz der Pulse von etwa 60 kHz erfolgt die Anregung der Ionen unabhängig von einander und jedes Qubit wird nur von dem Puls nahe seiner Resonanzfrequenz angeregt. Die Pulsdauer beträgt  $8 \mu\text{s}$ . Bei der durchgezogenen Linie handelt es sich um eine Anpassung an die Datenpunkte. Mögliche Bewegungsseitenbänder aufgrund einer thermischen Anregung der Ionen werden dabei vernachlässigt. Die Schwerpunktsbewegung der Ionen wurde jedoch mittels Seitenbandkühlung auf eine mittlere Besetzung von 16(12) Phononen gekühlt, was die Seitenbänder unterdrückt. Mögliche Seitenbandanregungen werden durch die Leistungsverbreiterung vom Trägersignal überdeckt und sind nicht zu beobachten. Jeder einzelne Datenpunkt entspricht 200 Wiederholungen.

tels möglicher Seitenbandkühlung nahe an den Grundzustand der Bewegung gekühlt

und anschließend im Grundzustand  $|0\rangle$  präpariert (vgl. Abschnitt 4.1.2). Danach erfolgt die Manipulation durch einen Mikrowellenpuls mit einer (variablen) Frequenz nahe des vermuteten Qubit-Übergangs. Die Pulsdauer entspricht idealerweise der eines  $\pi$ -Pulses und die Detektion des resultierenden Zustands erfolgt mittels Beobachtung von zustandsabhängiger Resonanzfluoreszenz (vgl. Abschnitt 4.3). Diese Sequenz wird für unterschiedliche Frequenzen mehrfach wiederholt. Im Kontext der Spektroskopie handelt es sich somit bei dem Mikrowellensignal um die Pumpquelle, welche die Qubit-Zustände be- bzw. entvölkert und bei dem Detektionslaserlicht um die Sondenquelle, welche die Zustände abfragt, indem sie Übergänge anregt [72].

Für die effektiv simultane Messung an mehreren Qubits kann die Sequenz entsprechend erweitert werden. Die Manipulation besteht in diesem Fall aus mehreren Mikrowellenpulsen, die nacheinander ausgeführt werden. Jeder Puls hat dabei seine Frequenz in der Nähe des Übergangs eines der Qubits. Wegen der Frequenzaufspaltung infolge des Magnetfeldgradienten wird hierbei nur eines der Ionen angeregt (siehe auch Abschnitt 2.5).

Die mathematische Beschreibung der erwarteten Anregungswahrscheinlichkeiten eines Qubits folgt aus der Zeitentwicklung eines verstimmtten Mikrowellenpulses (vgl. Gleichung (2.6.10))

$$P_{|1\rangle} = |\langle 1|U|0\rangle|^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta^2} \sin^2(\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} \tau/2) \quad (4.4.1)$$

In dieser Gleichung bezeichnet  $\Omega$  die Rabi-Frequenz des Übergangs,  $\Delta$  die Verstimmung des Pulses von der Resonanzfrequenz und  $\tau$  die Dauer des Pulses. Die erwartete Anregungswahrscheinlichkeit als Funktion der Frequenz des anregenden Mikrowellenpulses (und damit  $\Delta$ ), wird somit beschrieben durch einen periodischen Anteil und einen Vorfaktor, der die Anregung mit steigender Verstimmung mehr und mehr unterdrückt. Für den Resonanzfall ( $\Delta = 0$ ) und die Pulsdauer eines  $\pi$ -Pulses  $\tau = \pi/\Omega$  (vgl. Abschnitt 2.6), folgt somit eine Anregungswahrscheinlichkeit von eins. Für eine nicht-resonante Anregung kann es trotzdem Verstimnungen geben, für die das Argument  $\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} \tau/2 = \pi/2$  ist. Die Anregungswahrscheinlichkeit ist nun jedoch um den Vorfaktor  $\frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta^2}$  unterdrückt. Die erwartete Anregungswahrscheinlichkeit als Funktion der Frequenz und der Pulsdauer eines  $\pi$ -Pulses sieht also ähnlich aus wie der Sinus cardinalis mit einem Hauptmaximum für den Resonanzfall und abfallenden Nebenmaxima.

Die Abbildung 4.6 zeigt exemplarisch die Ergebnisse einer solchen kohärenten mikrowellen-optischen Doppelresonanz-Spektroskopie an drei Ionen. Das Modell, das zur Anpassung an die Daten bei Variation der Anregungsfrequenz  $\nu$  verwendet wird, lautet

$$f(p_0, p_1, p_2, p_3, \tau, \nu) = p_0 + p_1 \frac{p_2^2}{p_2^2 + (\nu - p_3)^2} \sin^2(\sqrt{p_2^2 + (\nu - p_3)^2} \tau/2). \quad (4.4.2)$$

Hierbei bezeichnet der Parameter  $\tau$  die gewählte Pulsdauer,  $p_2$  die Rabi-Frequenz und  $p_3$  die gesuchte unbekannte Resonanzfrequenz. Die zusätzlichen Parameter  $p_0$  und

$p_1$  erlauben die Anpassung an die Daten für eine nicht perfekte Zustandspräparation und Detektion. Die mögliche Anregung von Bewegungsseitenbändern (siehe Abschnitt 2.5.3) wird bei dem obigen Modell vernachlässigt. Diese Seitenbänder liegen symmetrisch um die Resonanz herum und haben keinen negativen Einfluss auf die Bestimmung der Resonanzfrequenz des Trägerübergangs.

Aus der Anpassung an die Daten aus Abbildung 4.6 ergeben sich die drei Resonanzfrequenzen

$$\nu_1 = 12,6401848(18) \text{ GHz}, \quad (4.4.3)$$

$$\nu_2 = 12,6369992(17) \text{ GHz}, \quad (4.4.4)$$

$$\nu_3 = 12,6338068(17) \text{ GHz}. \quad (4.4.5)$$

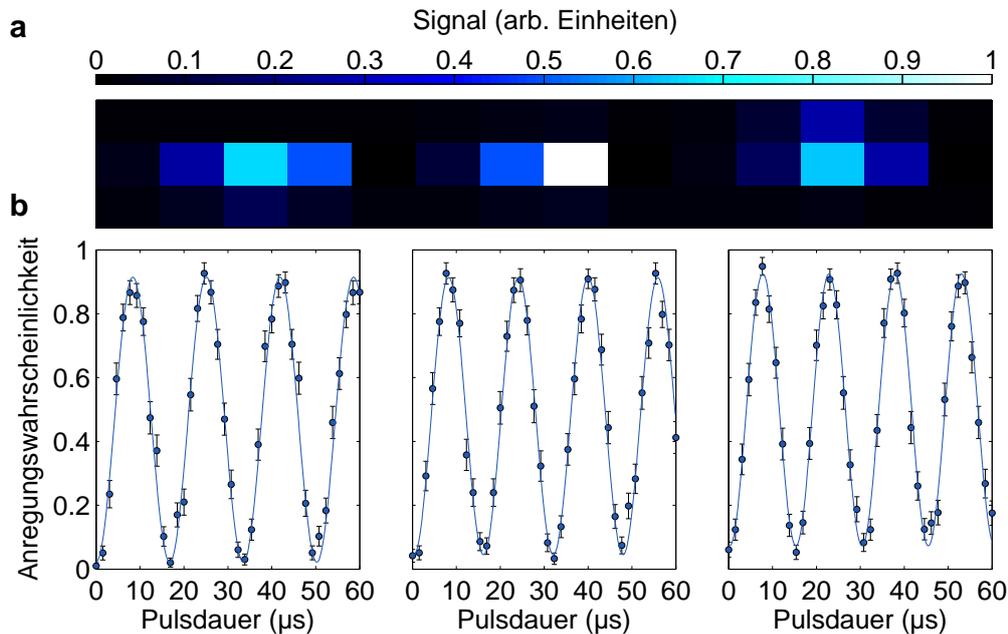
Somit erlaubt das mikrowellen-optische Doppel-Resonanz-Verfahren die Bestimmung der Qubitübergänge mit einer Genauigkeit von nahezu 1 kHz. Wie man ebenfalls erkennen kann, beträgt die Frequenzaufspaltung der drei einzelnen Qubitübergänge in dem Magnetfeldgradienten für die gewählte axiale Fallenfrequenz von  $2\pi \times 124$  kHz etwa 3,19 MHz. Die Rabi-Frequenz der Manipulation hingegen beträgt lediglich etwa 60 kHz und ist somit fünfzigmal kleiner. Aus dem Abschnitt 2.6.2 folgt daher, dass die Manipulation der einzelnen Qubits nahezu unabhängig voneinander erfolgen kann (siehe auch Kapitel 6).

## 4.5. Rabi-Oszillationen

Die Beobachtung von Rabi-Oszillationen (benannt nach Isidor Isaac Rabi [88]) dient im Allgemeinen dem Nachweis einer kohärenten getriebenen Ein-Qubit-Dynamik. Eine praktische Anwendung darüber hinaus ist die Messung der Rabi-Frequenz, mit der ein Qubit manipuliert werden kann. Somit können die Pulsdauern für Mikrowellenpulse zur Realisierung beliebiger Ein-Qubit-Gatter (vgl. Abschnitt 2.6) bestimmt werden.

Die Sequenz zur Messung der Rabi-Frequenz besteht aus den folgenden Schritten. Nach der Laserkühlung und Präparation in dem Grundzustand  $|0\rangle$  (vgl. Abschnitt 4.1.2) erfolgt die Manipulation in Form eines (idealerweise) resonanten Mikrowellenpulses von variabler Dauer. Nach der Manipulation erfolgt die Detektion des Zustands durch die Beobachtung von zustandsabhängiger Resonanzfluoreszenz (vgl. Abschnitt 4.3). Die Pulsdauer wird für unterschiedliche Ausführungen der Sequenz variiert und diese Sequenz für jede Pulsdauer mehrfach wiederholt.

Bei Experimenten mit mehreren Qubits kann die Rabi-Frequenz eines jeden Qubits effektiv zeitgleich während der gleichen Messsequenz gemessen werden. Die Sequenz basiert dabei auf der für ein einzelnes Qubit und lediglich die Manipulation wird auf mehrere Qubits erweitert. Anstatt eines einzelnen Pulses werden nun mehrere Pulse



**Abbildung 4.7.:** Rabi-Oszillationen von drei Ionen in einem Magnetfeldgradienten. (a) Ortsaufgelöste Resonanzfluoreszenz der in der Paul-Falle gespeicherten Ionen, wie sie mittels EMCCD-Kamera detektiert wird. Die Manipulation der Qubits besteht aus drei Pulsen, die nacheinander ausgeführt werden. Jeder Puls ist dabei genau auf die Resonanzfrequenz  ${}^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow {}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1$  eines der Qubits abgestimmt. In (b) ist dann die Anregungswahrscheinlichkeit eines Qubits in Abhängigkeit von der Pulsdauer dargestellt. Die durchgezogene Linie stellt eine Anpassung an die Datenpunkte dar, aus der Rabi-Frequenzen von etwa 60 kHz folgen. Der Frequenzabstand der Qubitübergänge in dem Magnetfeldgradienten ist mit etwa 3,19 MHz deutlich größer. Somit kann die kohärente Manipulation eines jeden Qubits nahezu unabhängig von den anderen erfolgen. Die Schwerpunktsbewegung der Ionen wurde mittels Seitenbandkühlung auf eine mittlere Besetzung von 16(12) Phononen gekühlt. Der verminderte Kontrast ist auf Detektionsfehler zurückzuführen. Jeder einzelne Datenpunkt entspricht 200 Wiederholungen.

unmittelbar nacheinander eingestrahlt. Jeder Puls weist hierbei idealerweise die Resonanzfrequenz eines der Qubits auf. Die Resonanzfrequenzen der Qubits sind dabei aufgrund des Magnetfeldgradienten und der axialen Fallenfrequenz so weit aufgespalten, dass jeweils nur eines von einem der Pulse manipuliert wird (siehe auch Abschnitt 2.5).

Die genaue mathematische Beschreibung der Anregungswahrscheinlichkeit erfolgt auf Basis der Zeitentwicklung eines einzelnen Mikrowellenpulses (vgl. Gleichung (2.6.2)).

Die beobachtete Anregungswahrscheinlichkeit nach Ausführung eines resonanten Pulses ( $\Delta = 0$ ) mit der Pulsdauer  $\tau$  und anfänglicher Präparation in  $|0\rangle$  lautet:

$$P_{|1\rangle}(\Delta = 0) = |\langle 1|U|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega\tau)). \quad (4.5.1)$$

Nach der Dauer  $\tau = \frac{\pi}{2\Omega}$  beträgt die Anregungswahrscheinlichkeit 1/2 und somit ist ein  $\pi/2$ -Puls realisiert. Für die doppelte Pulsdauer beträgt die Anregung eins, da der resultierende  $\pi$ -Puls den Zustandsvektor von  $|0\rangle$  nach  $|1\rangle$  gedreht hat.

Für den Fall, dass die Mikrowellenpulse nicht resonant sind, sondern eine Verstimmung  $\Delta \neq 0$  aufweisen, erfolgt die Drehung um eine verkippte Achse (vgl. Abschnitt 2.6.2). Für die Anregungswahrscheinlichkeit folgt aus der Gleichung (2.6.10):

$$P_{|1\rangle}(\Delta \neq 0) = \frac{\Omega^2}{\Omega_R^2} \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega_R t)). \quad (4.5.2)$$

Die maximale Anregung ist nun um  $\Omega^2/\Omega_R^2$  reduziert und der Zustandsvektor des Qubits oszilliert schneller mit der verallgemeinerten Rabi-Frequenz  $\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$ .

Zur Bestimmung der Oszillationsfrequenz wird das Modell

$$f(p_0, p_1, p_2, \tau) = p_0 - p_1 \cos(p_2 \tau) \quad (4.5.3)$$

an die Daten angepasst. Der Parameter  $p_2$  entspricht hierbei der gesuchten Frequenz und die Parameter  $p_0$  und  $p_1$  beschreiben den möglichen Einfluss von Präparations- und Detektionsfehlern.

In der Abbildung 4.7 sind exemplarische Rabi-Oszillationen von drei Qubits dargestellt. Die obige Anpassung an die Daten ergibt die drei Rabi-Frequenzen

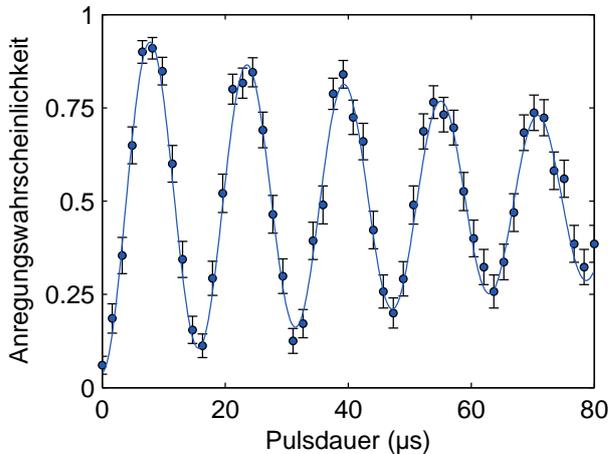
$$\Omega_1 = 2\pi \times 59,7(2) \text{ kHz}, \quad (4.5.4)$$

$$\Omega_2 = 2\pi \times 63,0(4) \text{ kHz}, \quad (4.5.5)$$

$$\Omega_3 = 2\pi \times 66,3(5) \text{ kHz}. \quad (4.5.6)$$

Diese sind für die drei Qubits unterschiedlich, da die Adressierfrequenzen unterschiedlich sind und die Ausgangsleistung der verwendeten Mikrowellenkette frequenzabhängig ist. Die Frequenzaufspaltung der Qubit-Übergänge in dem Magnetfeldgradienten beträgt für die gewählte axiale Fallenfrequenz etwa 3,19 MHz (vgl. Abschnitt 4.4). Dieser Frequenzabstand ist deutlich größer als die gemessenen Rabi-Frequenzen und somit kann jedes Qubit einzeln manipuliert werden (siehe auch das Kapitel 6).

Aus der maximalen Anregungswahrscheinlichkeit lässt sich mit Kenntniss des Präparations- und Detektionsfehlers abschätzen, wie gut ein einzelnes Qubit manipuliert werden kann. So beträgt beispielsweise die maximale Anregungswahrscheinlichkeit des dritten Ions in der Abbildung 4.7 nach der Dauer einer  $\pi$ -Pulses 0,95(3). Mit einem



**Abbildung 4.8:** Gedämpfte Rabi-Oszillation bei thermischer Anregung der Ionen ( $\langle n \rangle = 51(9)$ ) in einem Magnetfeldgradienten. Die durchgezogene Linie entspricht einer Anpassung an die Datenpunkte, aus der sich eine charakteristische Zerfallszeit von  $102(14) \mu\text{s}$  ergibt. Jeder Datenpunkt entspricht 200 Wiederholungen.

Detektionsfehler von 0,04 (bzw. einer Detektionsgüte von 0,96; siehe auch Abschnitt 4.3) lässt sich somit die Anregungswahrscheinlichkeit auf mehr als 0,99 korrigieren. Dieser Wert stellt eine einfache Abschätzung der Güte von beliebigen Ein-Qubit-Gattern dar. Für eine genauere systematische Messung ist die Methode des Randomized Benchmarking geeignet [89; 25; 26]. Die systematische Untersuchung der Güte von Quantengattern stellt dann in diesem Zusammenhang ein eigenständiges mögliches Forschungsvorhaben dar. An dieser Stelle sei nun lediglich auf den Abschnitt 6.8 verwiesen. Dort wird zusätzlich eine obere Grenze für die Fidelity eines einzelnen  $\pi$ -Pulses zu 0,995 abgeschätzt. Somit kann ein einzelnes Qubit mittels Mikrowellenstrahlung gezielt und mit einer hohen Güte manipuliert werden.

Während der Messdauer von  $60 \mu\text{s}$  zeigen die beobachteten Rabi-Oszillationen der bis nahe an den Grundzustand der Bewegung gekühlten Ionen ( $\langle n \rangle = 16(12)$ ) keinen Verlust des Kontrastes. Somit ist die Kohärenzzeit, während der ein Qubit kohärent manipuliert werden kann, deutlich länger als die Messdauer. Sind die Ionen jedoch weniger gut gekühlt und beträgt die mittlere Besetzung der Schwerpunktsmode  $\langle n \rangle = 51(9)$ , so zeigen die Rabi-Oszillationen einen deutlichen Kontrastverlust während der Manipulationsdauer (siehe Abbildung 4.8). Die Kohärenzzeit erfolgt aus der Anpassung einer exponentiell zerfallenden Einhüllenden an die Oszillation und beträgt  $102(14) \mu\text{s}$ . Somit wird nun auch die Güte eines einzelnen  $\pi$ -Pulses von  $8 \mu\text{s}$  Dauer auf etwa  $0,95(3)$  reduziert. Die Ursache des Kontrastverlustes ist die thermische Anregung der Ionen in dem Magnetfeldgradienten. Der effektive Lamb-Dicke-Parameter führt zu einer Kopplung zwischen den externen und den internen Freiheitsgraden (siehe Abschnitt 2.5.3). Die Rabi-Frequenz des Träger-Übergangs  $\Omega_{n,n}$  ist dann abhängig von der Besetzung  $n$  der Schwingungsmode (vgl. die Gleichung (2.5.12)). Befinden sich die Ionen in einem thermischen Bewegungszustand, so sind die beobachteten Rabi-Oszillationen eine

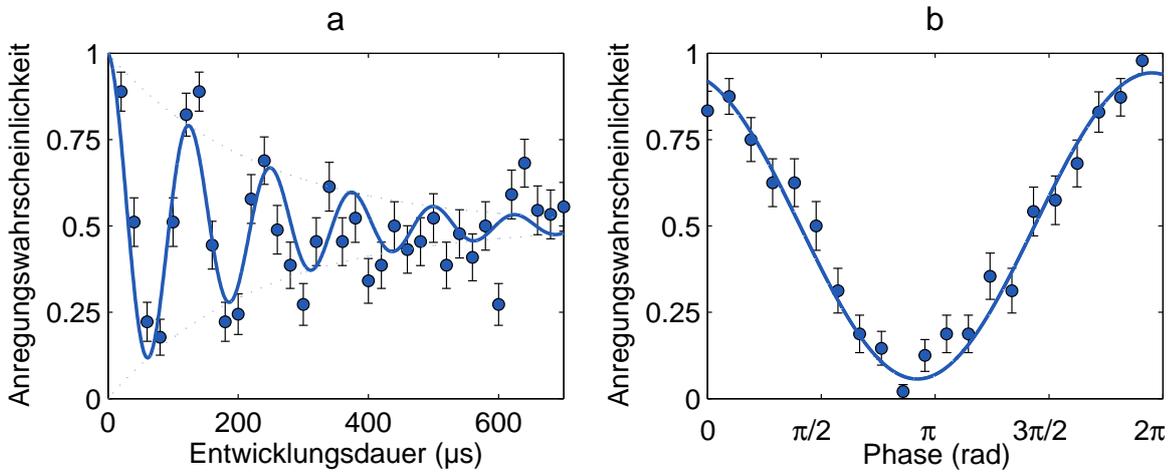
Überlagerung aus den Oszillationen aller Besetzungszahlen, was zu einer Dämpfung führt. Im Umkehrschluss erlaubt die Beobachtung von gedämpften Rabi-Oszillationen die Charakterisierung des thermischen Zustands bzw. die Messung der mittleren Besetzungszahl  $\langle n \rangle$  [30].

### 4.6. Ramsey-Experiment

Die Ramsey-Interferometrie (benannt nach Norman Foster Ramsey [90]) wird im Rahmen dieser Arbeit verwendet, um die Kohärenzeigenschaften eines oder mehrerer Qubits zu untersuchen. Im Kontext der Quanteninformationsverarbeitung besteht ein Ramsey-Experiment aus der Anwendung zweier  $\pi/2$ -Pulse (vgl. Abschnitt 2.6), die von einer Entwicklungsdauer unterbrochen sind. Nachdem das Qubit in seinem Grundzustand  $|0\rangle$  initialisiert worden ist, bringt der erste  $\pi/2$ -Puls es in einen Superpositionszustand. Dieser entwickelt sich im Allgemeinen während der Entwicklungsdauer entsprechend des Hamilton-Operators, der das physikalische System beschreibt. Der zweite  $\pi/2$ -Puls fragt schließlich die resultierende Kohärenz des Zustands nach der Entwicklungsdauer ab.

Eine Möglichkeit dabei ist, dass die beiden  $\pi/2$ -Pulse eine feste relative Phasenlage aufweisen (beispielsweise die gleiche Phase haben) und dann die Entwicklungsdauer zwischen den Pulsen variiert wird. Weisen die Pulse eine Verstimmung  $\Delta$  zum Qubit-Übergang auf, so präzediert der Zustandsvektor (im Bild der Bloch-Kugel) während der Entwicklungsdauer mit dieser Verstimmung um die z-Achse [34]. In der Konsequenz ist bei der wiederholten Messung der Anregungswahrscheinlichkeit eine Oszillation zu beobachten und die Frequenz entspricht dabei gerade der Verstimmung. Verliert das Qubit aufgrund von Dekohärenz (siehe auch den Abschnitt 7.1.1) während der Entwicklungsdauer seine Kohärenz, so spiegelt sich dies in einer Dämpfung der Oszillation wider. Aus dem Zerfall des Kontrastes lässt sich die sogenannte transversale Relaxationszeit  $T_2^*$  bestimmen [34]. Die Abbildung 4.9 (a) zeigt exemplarisch die Resultate für ein einzelnes Qubit. Aus der Anpassung einer gedämpften Oszillation an die Datenpunkte ergibt sich eine Verstimmung von  $2\pi \times 8,0(3)$  kHz und eine transversale Relaxationszeit von  $200(100)$   $\mu$ s.

Eine andere Möglichkeit der Ramsey-Interferometrie ist die Wahl einer konstanten Entwicklungsdauer und die Variation der relativen Phase zwischen den beiden resonanten  $\pi/2$ -Pulsen. Wird die Phase des zweiten Pulses (relativ zum ersten) von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = 2\pi$  variiert, so lässt sich für einen Superpositionszustand aus der Wiederholung des Experiments eine Oszillation mit der Phase  $\varphi$  beobachten.



**Abbildung 4.9.:** Beobachtete Ramsey-Interferenzstreifen. (a) Die Entwicklungsdauer zwischen den beiden  $\pi/2$ -Pulsen gleicher Phase wird variiert, wobei die Pulse um etwa 8 kHz von der Resonanz verstimmt sind. Das Qubit des magnetfeldabhängigen Übergangs  $^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow ^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 1$  verliert seine Kohärenz aufgrund von Magnetfeldrauschen während der transversalen Relaxationszeit von 200(100)  $\mu\text{s}$ , was sich in der Dämpfung der Oszillation widerspiegelt. (b) Für eine konstante bzw. verschwindende Entwicklungsdauer lassen sich ebenfalls Interferenzstreifen beobachten, wenn die Phase des zweiten Pulses relativ zum ersten variiert wird.

Die mathematische Beschreibung der Anregungswahrscheinlichkeit folgt dabei aus der Zeitentwicklung von zwei  $\pi/2$ -Pulsen (siehe Gleichung (2.6.7))

$$P_{|1\rangle}(\varphi) = |\langle 1|U_{\pi/2}(\varphi)U_{\pi/2}(0)|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi)). \quad (4.6.1)$$

Der erste Puls (mit der Phase 0) präpariert aus dem Grundzustand  $|0\rangle$  einen Superpositionszustand. Der zweite Puls (mit der Phase  $\varphi$ ) dreht nun den Zustandsvektor (im Bild der Bloch-Kugel) für die Phase  $\varphi = 0$  weiter nach  $|1\rangle$  oder für die Phase  $\varphi = \pi$  zurück nach  $|0\rangle$ . Beliebige andere Phasen führen zu Zustandsänderungen, die zu Anregungswahrscheinlichkeiten zwischen null und eins führen. In der Abbildung 4.9 (b) sind die Ergebnisse eines solchen Experiments dargestellt. An die Datenpunkte wird dort das Modell

$$f(p_0, p_1, p_2, \varphi) = p_0 + p_1 \cos(\varphi + p_2) \quad (4.6.2)$$

angepasst. Der Parameter  $p_2$  beschreibt dabei eine mögliche Phasenverschiebung aufgrund von Pulsfehlern.

Für eine nicht verschwindende Entwicklungszeit kann sich der Zustand des Qubits im Allgemeinen ändern. So können beispielsweise Magnetfeldfluktuationen zu einer Dephasierung führen (siehe Abschnitt 7.1.1) oder aber die J-Kopplung führt zu einer Änderung der Phase des Zustands (siehe Abschnitt 4.8). Mittels des zweiten Ramsey-Pulses können dann diese Änderungen in Abhängigkeit von der Entwicklungsdauer untersucht werden. Entspricht der Zustand des Qubits unmittelbar vor dem zweiten  $\pi/2$ -Puls der Dichtematrix  $\rho$ , so werden die resultierenden Ramsey-Streifen beschrieben durch

$$P_{|1\rangle}(\varphi) = \langle 1|U_{\pi/2}(\varphi)\rho U_{\pi/2}^\dagger(\varphi)|1\rangle = \frac{1}{2}(1 + 2|\rho_{01}| \cos(\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2})). \quad (4.6.3)$$

Die beobachteten Ramsey-Streifen erlauben nun die Bestimmung der Kohärenz (des Betrags des Außerdiagonalmatrixelements  $\rho_{01}$ ) und der Phase  $\alpha$  des Zustands. Der Betrag der Kohärenz entspricht dabei der Amplitude der Oszillation und die Phase  $\alpha$  ergibt sich aus der Lage des Minimums  $\varphi_{\min}$  zu

$$\alpha = 3\pi/2 - \varphi_{\min}. \quad (4.6.4)$$

Um eine unbeabsichtigte Präzession aufgrund von einer Verstimmung zu unterdrücken, kann bei einem Ramsey-Experiment nach der halben Entwicklungszeit ein zusätzlicher resonanter Spin-Echo-Puls an das Qubit adressiert werden (siehe Abschnitt 7.1.2). Aus der Beobachtung von Ramsey-Streifen für unterschiedliche Entwicklungsdauern bei Verwendung eines Spin-Echo-Pulses kann dann die Kohärenzzeit  $T_2$  des Qubits bestimmt werden [34].

### 4.7. Messung von Zustandsgüten

Ein grundlegendes Ziel der Quanteninformationsverarbeitung ist die Präparation eines reinen Zustands  $|\psi\rangle$ , um beispielsweise Information zu speichern, oder um den Eingangszustand eines Algorithmus zu initialisieren. Im Allgemeinen kann aber das Ergebnis einer solchen Präparation aufgrund von experimentellen Fehlern oder unbeabsichtigten Wechselwirkungen mit der Umgebung von dem idealen Zustand abweichen. In der Folge liegt nach der Präparation der Zustand  $\rho$  vor, der durch seine Dichtematrix beschrieben wird. Diese lässt sich in der Basis von Basiszuständen wie folgt zerlegen

$$\rho = \rho_{00}|0\rangle\langle 0| + \rho_{01}|0\rangle\langle 1| + \rho_{10}|1\rangle\langle 0| + \rho_{11}|1\rangle\langle 1|. \quad (4.7.1)$$

Ein Maß, wie gut die beiden Zustände übereinstimmen, ist die sogenannte Fidelity<sup>5</sup> [91]

$$F = \langle \psi|\rho|\psi\rangle. \quad (4.7.2)$$

---

<sup>5</sup>In der Literatur (zum Beispiel [17; 34]) findet auch ein Ausdruck Verwendung, welcher der Quadratwurzel der hier verwendeten Fidelity entspricht.

Ist der Zustand  $\rho$  rein, so kann die Dichtematrix in der Form

$$\rho = |\phi\rangle\langle\phi| \quad (4.7.3)$$

dargestellt werden und die Fidelity  $F = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$  entspricht dem Quadrat des Überlapps der beiden Zustände. Die Fidelity von zwei Zuständen kann zwischen null und eins liegen. Eine Fidelity von eins bedeutet in diesem Fall einen perfekten Überlapp der beiden Zustände (bzw. deren Äquivalenz bis auf einen globalen Phasenfaktor) und eine Fidelity von null entspricht zwei orthogonalen Zuständen<sup>6</sup>.

Die Messung der Zustands-Fidelity erlaubt also eine Quantifizierung, wie gut ein Zustand präpariert werden kann oder wie gut der resultierende Zustand einer quantenlogischen Operation mit dem idealen Resultat übereinstimmt. Im Rahmen dieser Arbeit wurden sowohl Ein-Qubit- als auch Mehr-Qubit-Zustände charakterisiert und die experimentellen Methoden hierfür werden in den beiden folgenden Abschnitten dargestellt.

### 4.7.1. Ein-Qubit-Zustandsgüten

Bei der Messung der Zustands-Fidelity eines Ein-Qubit-Zustands gilt es zu unterscheiden, ob der ideale Zustand  $|\psi\rangle$ , mit dem der vorhandene Zustand  $\rho$  (beschrieben durch seine Dichtematrix) verglichen wird, ein Energieeigenzustand oder ein (gleichmäßiger) Superpositionszustand ist.

#### Energieeigenzustand

In dem ersten Fall folgt unmittelbar aus der Definition in Gleichung (4.7.2) die Fidelity von

$$F = \langle 1|\rho|1\rangle = \rho_{11}, \quad (4.7.4)$$

für den Vergleichszustand  $|\psi\rangle = |1\rangle$ . Für den anderen Energieeigenzustand  $|0\rangle$  entspricht die Fidelity dann dem anderen Diagonalmatrixelement  $\rho_{00}$ . Aus der Definition der Dichtematrix folgt unmittelbar, dass diese Diagonalmatrixelemente den Wahrscheinlichkeiten entsprechen, den Zustand bei einer Projektionsmessung in  $|1\rangle$  bzw.  $|0\rangle$  vorzufinden. Das Messprotokoll besteht also lediglich aus der Projektionsmessung und der Zustandsdetektion (vgl. Abschnitt 4.3), welche die notwendige Information für die Rekonstruktion der Fidelity liefert.

Wird die Anregungswahrscheinlichkeit  $P_{|1\rangle}$  gemessen und ist der Vergleichszustand  $|\psi\rangle = |1\rangle$ , so entspricht die Fidelity  $F = P_{|1\rangle}$ . Ist der Vergleichszustand hingegen

<sup>6</sup>Hierbei gilt jedoch zu beachten, dass beispielsweise die beiden Zustandsvektoren  $|\psi\rangle = |1\rangle$  und  $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  im Bild der Bloch-Kugel zwar senkrecht aufeinander stehen (entlang der z- bzw. x-Achse), die Zustände jedoch nicht orthogonal sind und die Fidelity  $1/2$  beträgt.

$|\psi\rangle = |0\rangle$ , so ist die Fidelity aufgrund der Wahrscheinlichkeitserhaltung  $F = 1 - P_{|1\rangle}$ .

### Superpositionszustand

Handelt es sich bei dem Vergleichszustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\beta}|1\rangle) \quad (4.7.5)$$

hingegen um einen gleichmäßigen Superpositionszustand, so lautet die Fidelity nun

$$F = \langle\psi|\rho|\psi\rangle = \frac{1}{2}(1 + 2|\rho_{01}| \cos(\beta - \alpha)), \quad (4.7.6)$$

wobei der Winkel  $\alpha$  der Phase des Außerdiagonalmatrixelements  $\rho_{01}$  entspricht. Die Fidelity ist nun genau eins für den Fall, dass der Betrag des Außerdiagonalmatrixelements  $\rho_{01}$  genau  $1/2$  ist und es darüber hinaus die gleiche Phase wie der Vergleichszustand hat ( $\alpha = \beta$ ). Haben der präparierte Zustand und der Vergleichszustand entgegengesetzte Phasen ( $\alpha = \beta + \pi$ ), so sind die Zustände orthogonal und die Fidelity null. Ein anderer Spezialfall liegt vor, wenn der präparierte Zustand einem zufälligen inkohärenten Gemisch (beispielsweise aufgrund einer vollständigen Dephasierung) entspricht. In diesem Fall sind die Außerdiagonalmatrixelemente zerfallen ( $\rho_{01} = 0$ ) und die Fidelity beträgt  $1/2$ .

Das zur Messung der Fidelity verwendete Protokoll beruht auf der Beobachtung von Ramsey-Interferenzstreifen (vgl. Abschnitt 4.6). Nach der Präparation des Zustands  $\rho$  wird ein  $\pi/2$ -Puls an das Qubit adressiert. Die Zeitentwicklung folgt der Gleichung (2.6.7) und die Anregungswahrscheinlichkeit nach der Projektionsmessung wird beschrieben durch die Gleichung (4.6.3), aus welcher sich der Betrag und die Phase der Kohärenz ergibt. Aus dem Vergleich von (4.6.3) und (4.7.6) lässt sich dann somit die Fidelity rekonstruieren.

Die Abbildung 4.10 enthält exemplarisch eine Bestimmung der Zustandsfidelity für den Vergleichszustand  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$  (mit  $\beta = 0$ ). Das Qubit wurde hierbei zuerst in dem Grundzustand  $|0\rangle$  initialisiert und dann mittels eines Hadamard-Gatters (vgl. Abschnitt 2.1.2 und Kapitel 9) idealerweise in den Superpositionszustand  $|\psi\rangle$  überführt. Anschließend wurde ein  $\pi/2$ -Puls mit einer variablen Phase an das Qubit adressiert und die Anregungswahrscheinlichkeit gemessen. Nach der mehrfachen Wiederholung der Messequenz ließen sich die Ramsey-Streifen beobachten. Die Anpassung des Modells in Gleichung (4.6.2) ergibt für den Betrag der Kohärenz  $0,444(14)$  und die Phase  $0,12(5)$  rad. Entsprechend der Gleichung (4.7.6) ist die Fidelity des resultierenden Zustands mit dem Vergleichszustand  $0,94(2)$ . Diese Fidelity beinhaltet jedoch noch den Fehler aus der Zustandsdetektion (siehe Abschnitt 4.3). Bedenkt man die

Nachweiswahrscheinlichkeit von 0,96, so lässt sich diese Fidelity auf 0,98(2) korrigieren.

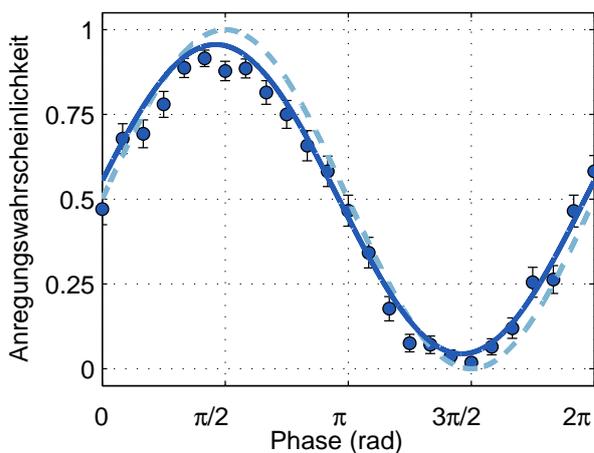
### 4.7.2. Mehr-Qubit-Zustandsgüten

Handelt es sich bei dem Quantenzustand, der charakterisiert werden soll, um einen Mehr-Qubit-Zustand, so muss das Messprotokoll erweitert werden. Eine Unterscheidung ist dabei, ob es sich bei den beteiligten Zuständen um verschränkte oder separable Zustände handelt.

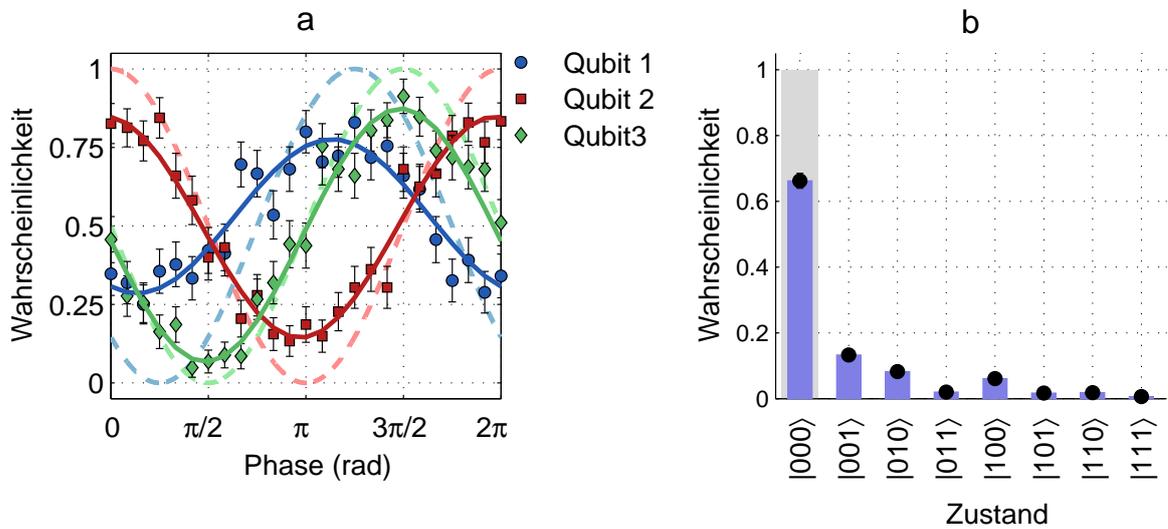
#### Separable Zustände

Sind der präparierte Zustand  $\rho$  und der Vergleichszustand  $|\psi\rangle$  beide nicht verschränkt, so kann die Dichtematrix des Mehr-Qubit-Systems als Tensorprodukt von einzelnen Dichtematrizen und der Vergleichszustand als Produkt von Zuständen dargestellt werden [92]. Für einen Drei-Qubit-System gilt nun beispielsweise

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3 \quad (4.7.7)$$



**Abbildung 4.10:** Bestimmung der Ein-Qubit-Fidelity aus Ramsey-Interferenzstreifen. Die Datenpunkte der beobachteten Ramsey-Streifen weichen von dem Ideal (gestrichelte Linie) ab. Die durchgezogene Linie entspricht einer Anpassung an die Datenpunkte, aus der sich die Kohärenz und die Phase von  $\rho$  bestimmen lässt. Die resultierende Fidelity beträgt 0,94(2), wobei die Abweichung überwiegend auf dem reduzierten Kontrast beruht. Berücksichtigt man die Nachweiswahrscheinlichkeit von 0,96, so lässt sich die resultierende Fidelity auf 0.98(2) korrigieren.



**Abbildung 4.11.:** Messung der Zustands-Fidelity eines Drei-Qubit-Systems, das idealerweise in dem Zustand  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}(|0\rangle + e^{i\frac{5}{4}\pi}|1\rangle)(|0\rangle + e^{i\frac{1}{2}\pi}|1\rangle)(|0\rangle + e^{i\pi}|1\rangle)$  präpariert ist. In (a) wird davon ausgegangen, dass der Zustand nicht verschränkt ist und die Auswertung beruht auf der Untersuchung der Ramsey-Streifen von einzelnen Qubits. Die ermittelten Streifen (durchgezogene Linien) werden mit den Streifen des Zielzustands (gestrichelte Linien) verglichen und ergeben die Fidelities der Einzelqubitzustände. In (b) werden zusätzliche Drehungen angewandt, die den Zustand idealerweise in den Grundzustand  $|000\rangle$  (grau) überführen. Bei einer Projektionsmessung wird nun ermittelt, wie häufig der Grundzustand vorgefunden wurde und die Wahrscheinlichkeit hierfür entspricht der Drei-Qubit-Zustands-Fidelity.

und

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle|\psi_3\rangle. \quad (4.7.8)$$

Die Fidelity ist nun

$$F = \underbrace{\langle\psi_1|\rho_1|\psi_1\rangle}_{F_1} \underbrace{\langle\psi_2|\rho_2|\psi_2\rangle}_{F_2} \underbrace{\langle\psi_3|\rho_3|\psi_3\rangle}_{F_3} \quad (4.7.9)$$

und entspricht dem Produkt der Ein-Qubit-Zustands-Fidelities. Das Messprotokoll folgt nun der Messung von Ein-Qubit-Zustandsfidelities aus dem vorherigen Abschnitt. In der Abbildung 4.11 (a) sind beispielhaft die Ramsey-Interferenzstreifen von drei Qubits

dargestellt. Aus den beobachteten Streifen eines jeden Qubits lassen sich jeweils die Kohärenz und die Phase bestimmen, woraus die Ein-Qubit-Zustandsfidelities rekonstruiert werden können. Für die Kohärenzen folgt

$$\rho_{01}^{(1)} = 0,25(4), \quad (4.7.10)$$

$$\rho_{01}^{(2)} = 0,35(3), \quad (4.7.11)$$

$$\rho_{01}^{(3)} = 0,40(3) \quad (4.7.12)$$

und für die Phasen folgt

$$\alpha^{(1)} = 4,29(15) \text{ rad}, \quad (4.7.13)$$

$$\alpha^{(2)} = 1,76(10) \text{ rad}, \quad (4.7.14)$$

$$\alpha^{(3)} = 3,19(8) \text{ rad}. \quad (4.7.15)$$

Die idealen Phasen wären

$$\beta^{(1)} = 5\pi/4 \approx 3,93 \text{ rad}, \quad (4.7.16)$$

$$\beta^{(2)} = \pi/2 \approx 1,57 \text{ rad}, \quad (4.7.17)$$

$$\beta^{(3)} = \pi \approx 3,14 \text{ rad} \quad (4.7.18)$$

und die ideale Kohärenz beträgt  $1/2$ . Mit der Gleichung (4.6.3) folgen somit die Einzelqubit-Fidelities

$$F_1 = 0,73(4), \quad (4.7.19)$$

$$F_2 = 0,85(2), \quad (4.7.20)$$

$$F_3 = 0,90(4). \quad (4.7.21)$$

Unter der Annahme, dass der Zustand  $\rho$  vollständig separabel ist, kann die Fidelity des Drei-Qubit-Zustands aus dem Produkt der Einzelqubit-Fidelities bestimmt werden (vgl. die Gleichung (4.7.9)) und aus diesen folgt für den Zustand in der Abbildung 4.11 (a) eine Fidelity von  $0,56(4)$ .

### Unbekannter Zustand und separabler Vergleichszustand

Ist der Vergleichszustand  $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle|\psi_3\rangle$  separabel und der präparierte Zustand  $\rho$  völlig unbekannt, so ist das verwendete Messprotokoll ein anderes. Es basiert nun auf der Anwendung von zusätzlichen Einzelqubitrotationen, die den Zielzustand mit einem beliebigen Energieeigenzustand verknüpfen. Für ein Drei-Qubit-System wurde hierfür

der Grundzustand  $|000\rangle$  gewählt. Für die zusätzlichen Rotationen  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$  muss nun gelten, dass

$$U_1 U_2 U_3 |000\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle |\psi_3\rangle. \quad (4.7.22)$$

Für die Fidelity folgt dann

$$\begin{aligned} F &= \langle \psi_1 | \langle \psi_2 | \langle \psi_3 | \rho | \psi_1 \rangle | \psi_2 \rangle | \psi_3 \rangle, \\ &= \langle 000 | U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger \rho U_1 U_2 U_3 | 000 \rangle \end{aligned} \quad (4.7.23)$$

und entspricht der Wahrscheinlichkeit das Drei-Qubit-System nach der Projektionsmessung in dem Zustand  $|000\rangle$  vorzufinden<sup>7</sup>. Die Ergebnisse für eine Messung sind in der Abbildung 4.11 (b) zu finden. Dort ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Projektionsmessung einen der acht Basiszustände vorzufinden, aufgetragen. Bei dem Vergleichszustand  $|\psi\rangle$  handelt es sich um den gleichen, wie in der Teilabbildung a. Die zusätzlichen Drehungen entsprechen nun  $\pi/2$ -Pulsen mit den Phasen

$$\varphi_{\min}^{(1)} = \pi/4, \quad (4.7.24)$$

$$\varphi_{\min}^{(2)} = \pi, \quad (4.7.25)$$

$$\varphi_{\min}^{(3)} = \pi/2, \quad (4.7.26)$$

die mit den Minima der Ramsey-Streifen übereinstimmen und durch die Gleichung (4.6.4) mit der Phase des Zustands verknüpft sind<sup>8</sup>.

Entsprechend der Gleichung (4.7.23) stimmt die Drei-Qubit-Fidelity mit der Wahrscheinlichkeit  $P_{|000\rangle}$ , bei der Projektionsmessung den Zustand  $|000\rangle$  vorzufinden, überein. Für die Daten aus der Abbildung 4.11 (b) ergibt sich diese zu 0,66(2).

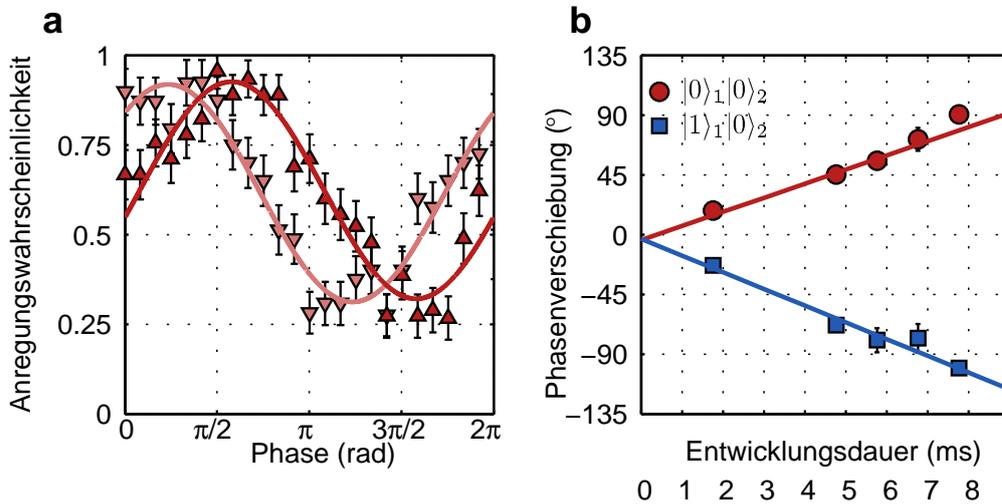
### Verschränkte Zustände

Handelt es sich bei dem Vergleichszustand um einen verschränkten Zustand, so ist das Protokoll zur Rekonstruktion der Fidelity umfangreicher. Zwar könnten analog zu den obigen Einzelqubitrotationen  $U$  nicht-lokale Gatter verwendet werden, welche den Vergleichszustand mit dem Grundzustand verknüpfen, jedoch sind diese Gatter in dem verwendeten experimentellen Aufbau von einer starken Dephasierung betroffen (siehe Abschnitt 7.3.4). Ein anderes Protokoll, das zur Rekonstruktion der Fidelity eines verschränkten Zwei-Qubit-Zustands verwendet wurde, folgt [93] und wird in Abschnitt 7.3.4 näher beschrieben und angewandt.

<sup>7</sup>Ein vergleichbares Protokoll wäre auch für die Messung der Ein-Qubit-Zustands-Fidelity möglich und wäre dann schneller als die Messung basierend auf der Auswertung von Ramsey-Streifen aus Abschnitt 4.7.1.

<sup>8</sup>Für den Fall, dass einer der Ein-Qubit-Zustände von  $|\psi\rangle$  der Grundzustand  $|0\rangle$  ist, ist dann auch keine zusätzliche Rotation dieses Qubits notwendig.

## 4.8. Messung der J-Kopplung



**Abbildung 4.12.:** Messung der J-Kopplung. (a) Ramsey-Streifen des Sonden-Qubits nach Entwicklungsdauern von 1,6 ms bzw. 7,6 ms. Die mittlere Anregungswahrscheinlichkeit ist etwas höher als  $1/2$ , was darauf zurückzuführen ist, dass die Messung mit dem Photomultiplier erfolgte und unbeabsichtigte Anregungen des anderen Qubits zu einem Untergrund der Fluoreszenz führen. (b) Für unterschiedliche Anfangszustände des Kontroll-Qubits und unterschiedliche Entwicklungsdauern wird die resultierende Phasenverschiebung der Interferenzstreifen des Sonden-Qubits gemessen. Aus der Steigung folgt jeweils die Kopplungsstärke zwischen den Qubits. Aus den Daten folgen  $J=2\pi\times 30(4)$  Hz und  $J=2\pi\times 35(4)$  Hz für den Anfangszustand  $|0\rangle_1|0\rangle_2$  bzw.  $|1\rangle_1|0\rangle_2$ .

Die Messung der vom Magnetfeldgradienten induzierten J-Kopplung beruht auf den in Abschnitt 4.6 vorgestellten Ramsey-Experimenten (vgl. auch [56]). Eines der Qubits koppelt dabei an ein anderes Qubit, welches als Sonde dient, um die Kopplungsstärke zu messen. Im Kontext eines bedingten Zwei-Qubit-Gatters handelt es sich bei der Sonde um das Ziel-Qubit und bei dem anderen um das Kontroll-Qubit. Nach der Präparation des Sonden-Qubits in einem Superpositionszustand und des anderen Qubits in einem Energieeigenzustand führt der Hamilton-Operator des Systems (vgl. Gleichung (2.5.18)) in dem rotierenden Bezugssystem nach der bedingten Entwicklungsdauer  $T$  zu der Zeitentwicklung

$$U(T) = e^{\frac{i}{2}J_{12}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}T}. \quad (4.8.1)$$

Die Folge ist - im Bild der Bloch-Kugel - eine Drehung des Zustandsvektors des Sonden-Qubits um die  $z$ -Achse. Die Drehung erfolgt dabei je nach Zustand des Kontroll-Qubits mathematisch positiv oder negativ. Nach der bedingten Entwicklungsdauer folgt ein zweiter  $\pi/2$ -Puls mit einer variablen Phase, der die Beobachtung von Ramsey-Interferenzstreifen erlaubt. Für den Fall, dass das Kontroll-Qubit in  $|0\rangle$  ist, lautet die formale Beschreibung dieser Streifen des zweiten Qubits (vgl. auch Gleichungen (2.6.7))

$$\begin{aligned} P_{|01\rangle}(\varphi) &= |\langle 01|U_{\pi/2}^{(2)}(\varphi)U(T)U_{\pi/2}^{(2)}(0)|00\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi - JT)). \end{aligned} \quad (4.8.2)$$

Die Stärke der  $J$ -Kopplung führt also zu einer Verschiebung der Ramsey-Interferenzstreifen des Sonden-Qubits. In der Abbildung 4.12 (a) ist diese Verschiebung beispielhaft dargestellt. Dabei wurden die Streifen nach zwei Entwicklungsdauern 1,6 ms bzw. 7,6 ms aufgenommen. Es ist deutlich zu erkennen, die das Streifenminimum mit einer längeren Dauer zu größeren Phasen hin verschoben wird. Ist das Kontroll-Qubit in  $|1\rangle$  initialisiert, so erfolgt die Drehung des Sondenqubits in die andere Richtung und die Interferenzstreifen werden in die andere Richtung verschoben. Die formale Beschreibung lautet

$$P_{|11\rangle}(\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi + JT)). \quad (4.8.3)$$

Für die präzise Messung der Kopplungsstärke werden nun Ramsey-Streifen nach unterschiedlich langen bedingten Entwicklungsdauern  $T$  beobachtet. Aus der Abhängigkeit der Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = JT$  kann dann durch eine lineare Regression  $J$  bestimmt werden. In der Abbildung 4.12 (b) ist die Phasenverschiebung für unterschiedliche Entwicklungsdauern und unterschiedliche Anfangszustände des Kontroll-Qubits dargestellt.

In dem vorhandenen experimentellen Aufbau ist die  $J$ -Kopplung von der Größenordnung von einigen zehn Hertz. Die resultierende Phasenverschiebung  $\Delta\varphi$  ist somit erst nach einer bedingten Entwicklungsdauer von mehreren Millisekunden nachweisbar. Da die transversale Relaxationszeit der Qubits jedoch um eine Größenordnung kleiner als diese Dauer ist, werden dynamische Entkopplungspulse verwendet (siehe auch Kapitel 7 und insbesondere den Abschnitt 7.1.5). Bei diesen handelt es sich um zusätzliche  $\pi$ -Pulse, die an die Qubits (nahezu) simultan adressiert werden. Auf diese Weise kann die Dephasierung unterdrückt werden, ohne die bedingte Dynamik aufgrund der  $J$ -Kopplung zu beeinflussen. Die beschriebene Messmethode entspricht dann einem Einzelion-Quanten-Lock-in-Verstärker [94].

Hierbei werden ähnlich zu einem klassischen Lock-in-Verstärker ein Mess- und ein Referenzsignal moduliert. Der Unterschied besteht jedoch darin, dass es sich bei dem Sensor um ein Quantensystem und bei der Modulation des Signals und dem Vorgang

des Mischens um die Anwendung von quantenlogischen Operationen handelt. Die Modulation der Referenz entspricht hierbei der Anwendung von dynamischen Entkoppelpulsen, welche störendes Rauschen des Magnetfeldes unterdrücken. Als Sensor dient das Sensor-Qubit in einem Superpositionszustand und die Phase des Superpositionszustands entspricht dem Ausgangssignal.

In einem Drei-Qubit-System können die wirkenden Kopplungen dadurch gemessen werden, dass eines der Qubits von dem verbleibenden Zwei-Qubit-System entkoppelt wird. Die dazu möglichen Methoden werden in den Abschnitten 7.3.5 und 8.2.2 diskutiert. Die Kopplung des verbleibenden Zwei-Qubit-Systems kann dann wie oben beschrieben gemessen werden. Darüber hinaus ist es auch möglich, die gemeinsamen Kopplungen, die auf ein Qubit wirken, zu messen. Hierbei entwickelt sich das Sonden-Qubit während einer Entwicklungsdauer abhängig vom Zustand der anderen beiden Qubits. Die beobachteten Ramsey-Streifen des Sonden-Qubits (hier des dritten Qubits) werden nun für die Anfangszustände  $|000\rangle$ ,  $|110\rangle$ ,  $|100\rangle$  bzw.  $|010\rangle$  durch

$$P_{|001\rangle} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi - (J_{23} + J_{13})T)) \quad (4.8.4)$$

$$P_{|111\rangle} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi + (J_{23} + J_{13})T)) \quad (4.8.5)$$

$$P_{|101\rangle} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi - (J_{23} - J_{13})T)) \quad (4.8.6)$$

$$P_{|011\rangle} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi + (J_{23} - J_{13})T)) \quad (4.8.7)$$

beschrieben. Wie man erkennen kann, erfolgt die Drehung und damit die Phasenverschiebung mit der Summe  $J_{23} + J_{13}$  oder der Differenz der Kopplungen  $J_{23} - J_{13}$ . Somit lassen sich diese analog zur oben diskutierten Messung in einem Zwei-Qubit-System auch in einem Mehr-Qubit-System bestimmen. Experimentelle Befunde dazu werden in dem Abschnitt 7.3.5 diskutiert.

# 5

## Zeitaufgelöste Zustandsdetektion

Ein elementarer Prozess der Quanteninformationsverarbeitung ist, neben der Initialisierung und Manipulation von Qubits, das Auslesen ihres Zustands. In Experimenten, bei denen die Qubits durch gespeicherte Ionen realisiert werden, geschieht dieser Auslesevorgang in der Regel durch die Detektion von zustandsabhängiger Resonanzfluoreszenz, wie es im Abschnitt 4.3 beschrieben wurde. Hierbei führt die Besetzung eines der Qubit-Zustände beim Einstrahlen von geeignetem Laserlicht zur Beobachtung von Resonanzfluoreszenz und somit wird dieser Zustand als hell bezeichnet. Der andere Zustand wird als dunkel bezeichnet, da er eben nicht zu Resonanzfluoreszenz führt. In den beschriebenen Experimenten ist der Zustand  ${}^2S_{1/2}, F = 0$  der dunkle und  ${}^2S_{1,2}, F = 1$  der helle Zustand. Die Zuordnung, der während der Detektionsdauer registrierten Photonen zu einem dunklen bzw. hellen Ion, geschieht dabei am einfachsten auf Basis eines Schwellwerts, ab dem das Ion als hell angesehen wird. Unter realen Bedingungen werden jedoch auch für ein dunkles Ion Streulichtphotonen registriert und Signal weist somit einen Untergrund auf. Ebenfalls wird von einem hellen Ion nur ein geringer Bruchteil der emittierten Photonen registriert. Die Gründe hierfür sind die numerische Apertur des verwendeten Objektivs, das in der Regel nur einen geringen Raumwinkel abdeckt und die endliche Nachweiswahrscheinlichkeit des Detektors. Die Zählstatistik der Photonen, die den Detektor erreichen, folgt einer Poisson-Verteilung mit dem Mittelwert  $\lambda_b$  für ein helles (bright) und  $\lambda_d$  für ein dunkles (dark) Ion. Diese beiden Poisson-Verteilungen überlappen im Allgemeinen, was für die gegebene Messdauer zu einem statistischen Detektionsfehler führt. Es wäre nun möglich die Messdauer entsprechend zu verlängern, bis der Überlapp und somit dieser Fehler hinreichend klein ist.

Viele der zur Quanteninformationsverarbeitung genutzten Ionen, wie beispielsweise  ${}^9\text{Be}^+$ ,  ${}^{43}\text{Ca}^+$ ,  ${}^{137}\text{Ba}^+$  und das in dieser Arbeit verwendete  ${}^{171}\text{Yb}^+$ , können ihren Zustand während der Messdauer ändern. Dieses führt zu zusätzlichen systematischen Fehlern und die Messdauer ist typischerweise begrenzt auf eine Zeitskala, auf der diese Zustandswechsel noch zu vernachlässigen sind.

Eine Möglichkeit, die zusätzlichen Fehler aus einem Zustandswechsel des Ions während der Messdauer zu reduzieren, beruht darauf, diese störenden Ereignisse zu identifizieren. Hierfür wird die Gesamtmessdauer in mehrere kürzere Zeitintervalle unterteilt und die Fluoreszenzphotonen der einzelnen Intervalle als Zeitreihe aufgezeichnet. Anhand dieser Zeitreihe wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt, dass sie entweder von einem anfangs hellen oder dunklen Ion stammt. Je nachdem welche Möglichkeit wahrscheinlicher ist, wird dem Ion dann innerhalb der Datenauswertung dieser Zustand zugeordnet.

Diese Maximum-Likelihood-Methode wird in dem vorliegenden Kapitel untersucht, wobei die präsentierten experimentellen Ergebnisse Bestandteil einer gemeinsamen Publikation sind [95] und teilweise in Zusammenarbeit mit Frau Dr. Wölk entstanden.

In dem folgenden Abschnitt wird zuerst ein Modell präsentiert, mit dem die Resonanzfluoreszenz eines  ${}^{171}\text{Yb}^+$ -Ions beschrieben werden kann. Hierauf folgt die theoretische Beschreibung der Dynamik von Detektionsfluoreszenz, wie sie sich aufgrund möglicher Zustandswechsel ergibt. Am Ende dieses Kapitels werden die Schwellwert-Methode und die zeitaufgelöste Detektion mittels experimenteller Daten verglichen. Darüber hinaus werden die Daten mit Simulationen verglichen.

## 5.1. Fluoreszenzmodell

Als Detektionsübergang dient der Dipolübergang  ${}^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow {}^2P_{1/2}, F = 0$  nahe 369 nm. Die Fluoreszenzrate  $R_B$ , die ein Detektor von einem hellen Ion registrieren wird, hängt von der Nachweiswahrscheinlichkeit  $\eta$  eines Photons, der natürlichen Linienbreite  $\gamma$  des Detektionsübergangs und der Besetzungswahrscheinlichkeit  $p_f$  des angeregten Zustands  ${}^2P_{1/2}, F = 0$  ab und es gilt [96]

$$R_B = \eta\gamma p_f. \quad (5.1.1)$$

Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass der Rückpumpplaser bei 935 nm optisches Pumpen in den  ${}^2D_{3/2}$ -Zustand verhindert<sup>1</sup> und somit den Detektionsübergang effektiv schließt. Der mögliche Zerfall in den  ${}^2D_{3/2}$ -Zustand führt nun zu Korrekturen der Fluoreszenz, die kleiner als 0,01 sind und somit vernachlässigt werden können [96]. Die

<sup>1</sup>Hierfür wird der Übergang  ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^3D[3/2]_{1/2}$  mit einer optischen Leistung von 1 mW resonant getrieben. Die resultierende Intensität ist dabei größer als die Sättigungsintensität. Siehe den Anhang D für mehr Details.

## 5. Zeitaufgelöste Zustandsdetektion

---

Besetzungswahrscheinlichkeit für den angeregten Zustand lautet nun [96]:

$$p_f = \frac{3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{4} \frac{\Omega^2/3}{1 + 3 \cos^2 \theta \Delta^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (5.1.2)$$

mit

$$\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{3} \cos^2 \theta \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} \left(\frac{\Omega^4}{36\delta_B^2} + 4\delta_B^2\right). \quad (5.1.3)$$

Die Größe  $\Omega$  bezeichnet dabei die Rabi-Frequenz des Laserlichts bei 369 nm und  $\Delta$  die Verstimmung des Laserlichts zu dem Detektionsübergang. Die Größe  $\Gamma$  beschreibt die Verbreiterung des Übergangs  $^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow ^2P_{1/2}, F = 0$  durch Leistungsverbreiterung und die Zeeman-Aufspaltung des Zustands  $^2S_{1/2}, F = 1$ . Die Fluoreszenz ist abhängig von der Polarisation des Lasers, wobei der Winkel  $\theta$ , dem zwischen dem elektrischen Feld des Laserlichts und dem externen Magnetfeld am Ort des Ions entspricht. Wie man ersehen kann, verschwindet für bestimmte Polarisationswinkel mit  $\cos \theta = 0$  und  $\sin \theta = 0$  die Fluoreszenz. Der Grund hierfür ist ein optisches Pumpen in Hyperfeinzustände, die nicht an das polarisierte Laserlicht koppeln.

Darüber hinaus ist die Fluoreszenz auch abhängig von der Zeeman-Aufspaltung  $\delta_B$  zwischen den Hyperfeinzuständen  $S_{1/2}, F = 1, m_F = \pm 1$  und  $S_{1/2}, F = 0, m_F = 0$  und wird für ein verschwindendes Magnetfeld unterdrückt. Die Ursache hierfür ist eine resultierende Entartung des Niveaus  $^2S_{1/2}, F = 1$ , die zur Bildung von Dunkelzuständen führen kann und durch ein statisches Magnetfeld aufgehoben wird [97].

Die Abhängigkeit der Fluoreszenz von der Polarisation des Laserlichts und der Magnetfeldstärke am Ort des Ions wurde systematisch untersucht und die Kühlfluoreszenz optimiert (vgl. den Anhang E). Für eine Polarisationsrichtung von  $\theta_0 = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54,7^\circ$  werden alle drei Hyperfeinübergänge  $P_{1/2}, F = 0$  nach  $S_{1/2}, F = 1$  gleich schnell getrieben (siehe auch [58]) und die obigen Gleichungen (vgl. (5.1.2) und (5.1.3)) vereinfachen sich zu [96]

$$\tilde{p}_f = \frac{1}{36} \frac{\Omega^2}{\Delta^2 + (\tilde{\Gamma}/2)^2} \quad (5.1.4)$$

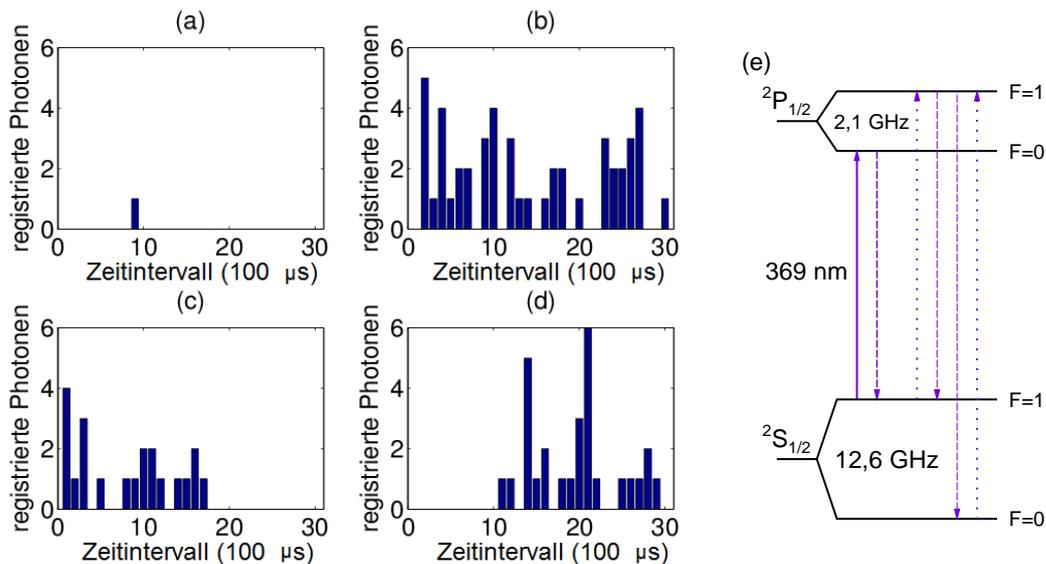
mit der Linienbreite  $\tilde{\Gamma}$

$$\left(\frac{\tilde{\Gamma}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\Omega^4}{36\delta^2} + 4\delta^2\right). \quad (5.1.5)$$

Die Zählrate, die ein Detektor von einem dunklen Ion  $R_D$  registriert beruht hauptsächlich auf Streulicht und der Dunkelzählrate des Detektors. Diese beiden Prozesse hängen nicht vom Zustand des Ions ab und für ein helles Ion registriert der Detektor somit insgesamt die Zählrate  $R_D + R_B$ .

## 5.2. Dynamik der Detektionsfluoreszenz

Nach der kurzen Beschreibung der Fluoreszenz im stationären Zustand, soll nun die Dynamik der Detektionsfluoreszenz diskutiert werden. In Abbildung 5.1 (a) - (d) sind exemplarische Messergebnisse dargestellt. Hierbei wurden während einer Messdauer von  $t_b = 3$  ms, die vom Photomultiplier detektierten Photonen entsprechend ihrer Ankunftszeit in einem Histogramm zusammengefasst. Die Gesamtmesszeit wird dabei in Intervalle der Länge  $t_s = 100 \mu\text{s}$  geteilt. In den vier unterschiedlichen Fällen sieht man ein qualitativ unterschiedliches Verhalten. Für (a) wurde nur ein einzelnes Photon registriert und es liegt nahe, dass für diesen Fall das Ion dunkel war und das einzelne Photon von Streulicht herrührt. In dem Fall (b) werden nahezu kontinuierlich Photonen registriert, weshalb es vernünftig ist, das Ion als hell anzunehmen. In den Abbildungen (c) und (d) sind Zustandswechsel zu beobachten. In (c) endet die Rate an Photonen, abrupt nach 1,8 ms und es ist wahrscheinlich, dass diese Zeitreihe von einem hellen Ion stammt, das während der Messzeit dunkel wird. Der Zustandswechsel beruht hierbei auf der nicht-resonanten Anregung des Übergangs  $^2S_{1/2}, F = 1 \rightarrow ^2P_{1/2}, F = 1$ .



**Abbildung 5.1.:** Zeitaufgelöste Detektion und Illustration der für die Zustandswechsel verantwortlichen Prozesse. In (a) bis (d) sind exemplarische Zeitreihen der Detektionsfluoreszenz dargestellt. In (e) findet sich eine Erklärung der Zustandswechsel anhand eines Termschemas von  $^{171}\text{Yb}^+$ . Die durchgezogene Linie entspricht dem getriebenen Detektionsübergang. Gestrichelte und gepunktete Linien kennzeichnen nicht-resonante Anregungen bzw. relevante spontane Zerfälle.

Die Verstimmung des Detektionslasers zu dem Übergang beträgt 2,1 GHz. In (d) ist die Situation umgekehrt. Während der ersten Millisekunde wird kein einzelnes Photon registriert und für die weiteren zwei Millisekunden werden kontinuierlich Photonen nachgewiesen. Es ist also anzunehmen, dass diese Fluoreszenz von einem anfangs dunklen Ion stammt, das während der Detektionsdauer hell wird. Der Zustandswechsel beruht dabei auf der nicht-resonanten Anregung des Übergangs  ${}^2S_{1/2}, F = 0 \rightarrow {}^2P_{1/2}, F = 1$ . Die Verstimmung des Detektionslasers zu diesem Übergang beträgt etwa 14,7 GHz, weshalb ein solcher Zustandswechsel weitaus seltener beobachtet wird. Bemerkenswert ist ebenfalls die Tatsache, dass in (d) für das anfangs dunkle Ion 28 Photonen und in (c) für das anfangs helle lediglich 21 registriert wurden. Mit der Schwellwertmethode, die lediglich auf der Summe der Photonen beruht, könnten diese Zustände nicht korrekt zugeordnet werden. Somit wird deutlich, dass die Verwendung zusätzlicher Information, wie der Ankunftszeit der Photonen, den Detektionsfehler reduzieren kann. Im Folgenden soll nun die genaue Methode der Zeitreihenanalyse diskutiert werden. Die Methode folgt hierbei [95] und ist eine Erweiterung einer bestehenden Methode [86], die jedoch für Qubits entwickelt wurde, die nur einen Zustandswechsel vollziehen können. Dies ist der Fall für beispielsweise das optische Qubit in  ${}^{40}\text{Ca}^+$ -Ionen. Für Hyperfeinqubits in  ${}^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen sind jedoch, wie oben gezeigt, Zustandswechsel von hell nach dunkel und umgekehrt möglich. Somit ergeben sich auch die Möglichkeiten von mehreren Zustandswechseln während der Messdauer, die bei der bestehenden Methode nicht berücksichtigt wurden. Es wird daher im Folgenden angenommen, dass während der Gesamtmessdauer  $t_b$  ein Ion seinen Zustand mehrfach wechseln kann, während das Zeitintervall  $t_s$  jedoch so klein gewählt wird, dass das Ion seinen Zustand nur einmal wechselt. Diese vereinfachende Annahme wird von Simulationen des Detektionsprozesses gestützt [95].

Phänomenologisch wird der Prozess des Umpumpens von einem Zustand in den anderen durch Wahrscheinlichkeiten beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein helles Ion während eines Zeitintervalls auch weiterhin hell bleibt ist dabei [95]

$$W_{\text{BB}}(t) = e^{-t/\tau_{\text{B}}}, t \in [0, t_s], \quad (5.2.1)$$

wobei  $\tau_{\text{B}}$  die mittlere Verweildauer in dem hellen Zustand kennzeichnet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es seinen Zustand wechselt und dunkel wird, ist entsprechend der Wahrscheinlichkeitserhaltung  $W_{\text{BD}}(t) = 1 - W_{\text{BB}}(t)$ . Analog gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass ein dunkles Ion während eines Zeitintervalls auch dunkel bleibt

$$W_{\text{DD}}(t) = e^{-t/\tau_{\text{D}}}, t \in [0, t_s] \quad (5.2.2)$$

und für die, dass es hell wird  $W_{\text{DB}}(t) = 1 - W_{\text{DD}}(t)$ . In diesen Fällen entspricht  $\tau_{\text{D}}$  der mittleren Verweildauer in dem dunklen Zustand. Wie zuvor erläutert, führt ein dunkles Ion zu der Zählrate  $R_{\text{D}}$  im Detektor und ein helles zu  $R_{\text{B}} + R_{\text{D}}$ . Für den Fall, dass das

Ion seinen Zustand während des Zeitintervalls nicht ändert, ist die Wahrscheinlichkeit  $n$  Photonen zu detektieren durch eine Poisson-Verteilung beschrieben. Für ein helles Ion folgt

$$P_B(n) = \frac{[(R_B + R_D)t_s]^n}{n!} e^{-(R_B+R_D)t_s} \quad (5.2.3)$$

und für ein dunkles

$$P_D(n) = \frac{[R_D t_s]^n}{n!} e^{-(R_D)t_s}. \quad (5.2.4)$$

Tritt hingegen während des Intervalls ein Zustandswechsel auf, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür,  $n$  Photonen zu detektieren, eine Überlagerung von Poisson-Verteilungen. Die resultierende Photonverteilung ist somit [95]

$$X(n) = \int_{R_D t_s}^{(R_B+R_D)t_s} d\lambda g(\lambda) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad (5.2.5)$$

wobei  $g(\lambda)$  die Wahrscheinlichkeit für das Vorfinden der mittleren Photonenzahl  $\lambda$  entspricht und mit dieser Gewichtung über eine Poisson-Verteilung integriert wird. Die Wahrscheinlichkeit  $g(\lambda)$  ist neben der Länge des Zeitintervalls  $t_s$  und den einhergehenden Zählraten  $R_B$  und  $R_D$  auch von den Verweildauern der Zustände  $\tau_B$  bzw.  $\tau_D$  abhängig [95]. Im Weiteren wird die resultierende Photonverteilung für ein Ion, das von hell nach dunkel wechselt, mit  $X_{BD}(n)$  bezeichnet und die für den umgekehrten Wechsel  $X_{DB}(n)$ . Die Wahrscheinlichkeit, in einem beliebigen Zeitintervall  $j$  gerade  $n_j$  Photonen zu registrieren, ist somit entweder die eines Ions, das seinen Zustand nicht gewechselt hat ( $W_{BB}P_B(n_j)$  bzw.  $W_{DD}P_D(n_j)$ ) oder während des Intervalls einen Zustandswechsel vollzogen hat ( $X_{DB}(n_j)$  bzw.  $X_{BD}(n_j)$ ). Dieses lässt sich rein formal auch als  $2 \times 2$ -Matrix formulieren

$$O_j(n_j) = \begin{pmatrix} W_{BB}P_B(n_j) & X_{DB}(n_j) \\ X_{BD}(n_j) & W_{DD}P_D(n_j) \end{pmatrix}. \quad (5.2.6)$$

Der Grund für einen solchen Ansatz der Beschreibung ist der, dass die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten sich sehr einfach gestalten lässt. Die Zuordnung einer Zeitreihe  $\{n_j\}$  mit  $k$  Zeitintervallen zu einem anfangs hellen oder dunklen Ion geschieht dann mittels des Matrix-Produkts

$$\begin{pmatrix} B_k^{(iB)} & B_k^{(iD)} \\ D_k^{(iB)} & D_k^{(iD)} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^k O_j(n_j). \quad (5.2.7)$$

Die Größen  $B_k^{(iB)}(\{n_j\})$  und  $D_k^{(iB)}(\{n_j\})$  bezeichnen die Wahrscheinlichkeit aller Möglichkeiten, bei denen ein anfangs helles Ion (iB) am Ende der Messung hell oder dunkel

ist. Die Größen  $B_k^{(iD)}(\{n_j\})$  und  $D_k^{(iD)}(\{n_j\})$  beziehen sich dabei auf ein anfangs dunkles Ion (iD).

Zur Zuordnung der Zeitreihe zu einem Anfangszustand muss nun die Frage beantwortet werden, ob eine gegebene Zeitreihe wahrscheinlicher von einem anfangs hellen oder dunklen Ion stammt. Die Wahrscheinlichkeiten hierfür sind

$$p_B(\{n_j\}) = B_k^{(iB)}(\{n_j\}) + D_k^{(iB)}(\{n_j\}) \quad (5.2.8)$$

bzw.

$$p_D(\{n_j\}) = B_k^{(iD)}(\{n_j\}) + D_k^{(iD)}(\{n_j\}). \quad (5.2.9)$$

Ist nach Auswertung der Zeitreihe  $p_B > p_D$ , so wird das Ion als anfangs hell registriert, ansonsten gilt es als dunkel.

Das Produkt aus  $2 \times 2$ -Matrizen, das der Auswertung zugrunde liegt, lässt sich mit einem Computer sehr effektiv berechnen, falls die Funktionswerte der vier Wahrscheinlichkeitsverteilungen ( $P_B(n)$ ,  $P_D(n)$ ,  $X_{BD}(n)$  und  $X_{DB}(n)$ ) zuvor für alle auftretenden Photonenzahlen  $n_k \geq 0$  bis zu einem Maximalwert  $n_{max}$  berechnet und für einen schnellen späteren Zugriff gespeichert worden sind [98]. Hierfür notwendig ist jedoch die unabhängige Bestimmung von experimentellen Parametern, wie der Verweildauern der Zustände und der Zählraten für ein helles bzw. dunkles Ion. Diese sind abhängig von der Intensität und Frequenz des Lasers sowie der Nachweiseffizienz des Detektors.

### 5.3. Experimentelle Ergebnisse

Im folgenden Abschnitt werden experimentelle Ergebnisse anhand eines einzelnen gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ions diskutiert. Die experimentellen Parameter waren bei allen diesen Messungen identisch und werden hier kurz zusammengefasst. Die Polarisation des Laserlichts war so gewählt, dass die Kühlfluoreszenz maximiert ist (vgl. den Abschnitt E). Der Strahldurchmesser des Detektionslasers betrug  $174 \mu\text{m}$  [30] und die optische Leistung  $36 \mu\text{W}$ . Die Frequenz des Lasers bei  $369 \text{ nm}$  war dabei etwa  $10 \text{ MHz}$  von der Resonanz des Detektionsübergangs rotverstimmt. Das statische Magnetfeld am Ort des Ions betrug  $0,334 \text{ mT}$ , was zu einer Zeeman-Aufspaltung von  $\delta_B = 4,67 \text{ MHz}$  führte. Die Polarisation, die Intensität und die Frequenz des Rückpump lasers bei  $935 \text{ nm}$  war so gewählt, dass der Rückpumpübergang deutlich gesättigt und der Detektionsübergang somit effektiv geschlossen war. Zur Detektion der Photonen wurde ein Photomultiplier mit angeschlossener Zähllektronik (vgl. Abschnitt 3.5) verwendet.

In den Experimenten diente der Zustand  $^2S_{1/2}, F = 0$  als der dunkle Zustand und  $^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  als der helle. Die Präparation des hellen Anfangszustands erfolgte

aus dem dunklen heraus mittels der Methode des Rapid Adiabatic Passage (RAP) [99]. Bei dieser Methode werden Frequenz und Amplitude des treibenden Mikrowellenfeldes moduliert. Die Gesamtlänge der Manipulation betrug  $T = 300 \mu\text{s}$  und die Frequenz des Mikrowellensignals wurde hierbei in einem Bereich von  $\Delta\nu = 300 \text{ kHz}$  mit einer konstanten Geschwindigkeit  $\Delta\nu/T$  durchgestimmt. Diese experimentellen Parameter sind dabei analog zu vorherigen Arbeiten [99] gewählt. Die Amplitude wird bei RAP so moduliert, dass die Einhüllende idealerweise eine Gauss-Glocke der Form

$$\exp\left(-\frac{(t - T/2)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.3.1)$$

mit der Breite  $\sigma = T/(6\sqrt{2})$  beschreibt. Zur Vereinfachung wurde die Einhüllende durch 100 diskrete Stufen angenähert und am Endzeitpunkt das Mikrowellensignal abgeschaltet. Der Vorteil dieser Methode ist, dass sie robust gegenüber Pulsfehlern ist und somit Zustandspräparationen mit hoher Güte erlaubt.

### 5.3.1. Überpumpraten und Zählraten

Die Wahrscheinlichkeiten in (5.2.8) und (5.2.9), anhand derer registrierte Zeitreihen von Photonenzahlen einem hellen oder dunklen Ion zugeordnet werden, sind durch die Verteilungen  $P_B(n)$ ,  $P_D(n)$ ,  $X_{BD}(n)$  und  $X_{DB}(n)$  von den Überpumpraten der Zustände  $1/\tau_B$  bzw.  $1/\tau_D$  und den Zählraten  $R_B$  und  $R_D$  abhängig. Im Folgenden soll die Bestimmung dieser experimentellen Parameter dargelegt werden.

Aufgrund der nicht-resonanten Anregung kann während des Beleuchtens mit Detektionslaserlicht ein helles Ion dunkel werden oder ein dunkles in den hellen Zustand übergehen. Die resultierenden Lebensdauern des hellen bzw. dunklen Zustands sind hierbei  $\tau_B$  bzw.  $\tau_D$  und die Überpumprate in den dunklen entsprechend  $1/\tau_B$  bzw.  $1/\tau_D$  in den hellen. Die Besetzungswahrscheinlichkeiten  $W_{B(t)}$  des hellen bzw.  $W_D(t)$  des dunklen Zustands sind somit zeitabhängig und durch die Wahrscheinlichkeitserhaltung  $W_B(t) + W_D(t) = 1$  miteinander verknüpft. Die Dynamik der Besetzungswahrscheinlichkeiten wird beschrieben durch die Überpumpraten aus dem betrachteten Zustand heraus und der aus dem anderen in den betrachteten Zustand hinein. Es folgt das System von Differentialgleichung [95]

$$\dot{W}_B(t) = -\frac{1}{\tau_B}W_B(t) + \frac{1}{\tau_D}W_D(t), \quad (5.3.2)$$

$$\dot{W}_D(t) = \frac{1}{\tau_B}W_B(t) - \frac{1}{\tau_D}W_D(t). \quad (5.3.3)$$

Aus den unterschiedlichen Anfangsbedingungen eines hellen (iB) bzw. dunklen Ions (iD) ergeben sich die möglichen Lösungen

$$W_B^{(iB)}(t) = B + A \times e^{-t/\tau}, \quad (5.3.4)$$

$$W_B^{(iD)}(t) = B - B \times e^{-t/\tau}, \quad (5.3.5)$$

## 5. Zeitaufgelöste Zustandsdetektion

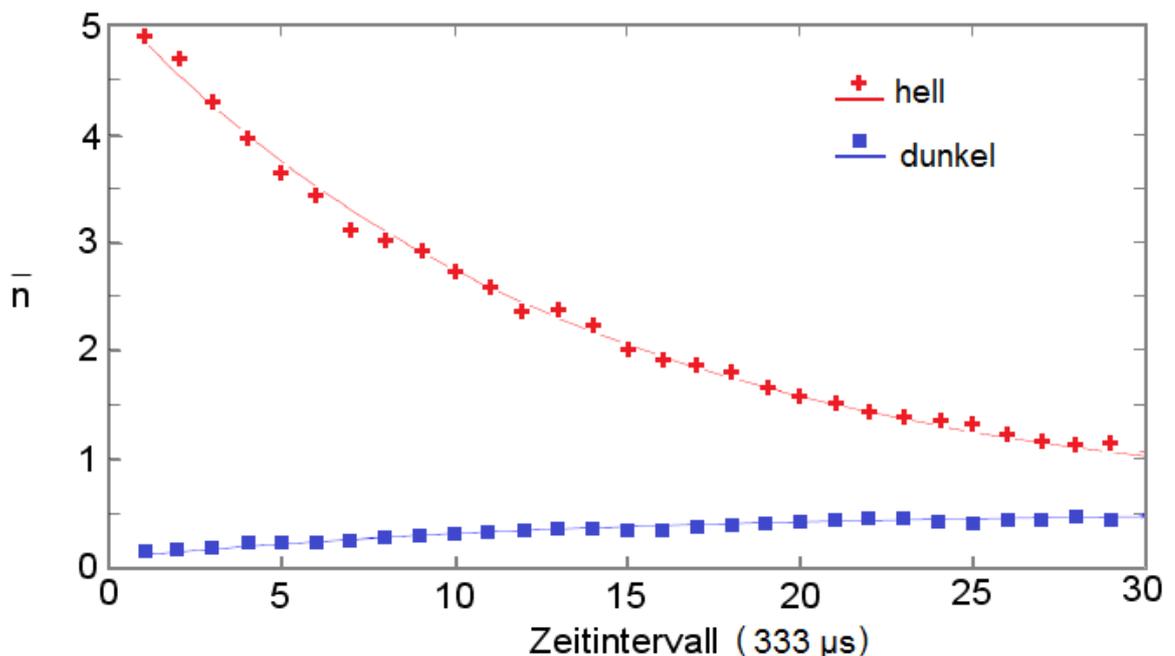
mit der mittleren Lebensdauer  $\tau = \frac{\tau_B \tau_D}{\tau_B + \tau_D}$ , sowie den beiden Größen  $A = \frac{\tau_D}{\tau_B + \tau_D}$  und  $B = 1 - A$ . Die Besetzungswahrscheinlichkeit des hellen Zustands bestimmt die Resonanzfluoreszenz (vgl. Abschnitt 5.1) und somit folgt die Zählrate für ein anfangs helles Ion

$$r_B(t) = R_B W_B^{(iB)}(t) + R_D. \quad (5.3.6)$$

Für ein anfangs dunkles Ion folgt ganz analog

$$r_D(t) = R_B W_B^{(iD)}(t) + R_D. \quad (5.3.7)$$

Die mittlere Photonenzahl, die somit in einem Zeitintervall  $t_0 - \Delta t \leq t \leq t_0$  für ein



**Abbildung 5.2.:** Umpumpen eines hellen bzw. dunklen Ions. Für eine Gesamtdauer von 10 ms wird die Fluoreszenz während Zeitintervallen von  $333 \mu\text{s}$  registriert. Für ein hell präpariertes Ion reduziert sich die Fluoreszenz von anfangs im Mittel 5 Photonen pro Zeitintervall auf etwa 1 Photon. Die Fluoreszenz eines dunklen Ions hingegen erhöht sich. Aus einer Anpassung an die Datenpunkte ergeben sich die Umpump- und Zählraten des hellen und dunklen Zustands. Jeder Datenpunkt entspricht 2000 Wiederholungen.

anfangs helles Ion registriert wird, lautet

$$\bar{n}_B(t_0) = \int_{t-\Delta t}^t r_B dt', \quad (5.3.8)$$

$$= \Delta t(R_B + R_D) + R_B A \tau (e^{\Delta t/\tau} - 1) e^{-t/\tau}, \quad (5.3.9)$$

$$= a + b e^{-t/\tau} \quad (5.3.10)$$

und für ein zu anfangs dunkles Ion folgt

$$\bar{n}_D(t_0) = \Delta t(R_B + R_D) - R_B \tau (e^{\Delta t/\tau} - 1) e^{-t/\tau}, \quad (5.3.11)$$

$$= a - c e^{-t/\tau}. \quad (5.3.12)$$

Für lange Messzeiten führt also der Laser dazu, dass die Besetzungen in einen Gleichgewichtszustand übergehen. In diesem dynamischen Gleichgewicht ist der Wechsel von einem hellen in einen dunklen Zustand genau so wahrscheinlich wie der umgekehrte Prozess. Die mittlere Photonenzahl pro Zeitintervall ist dann nicht länger zeitabhängig und entspricht dem Parameter  $a$ . Die mittlere Lebensdauer  $\tau$  charakterisiert die Zeitskala nach der dieses Gleichgewicht erreicht ist. Zur experimentellen Bestimmung der Lebensdauern und Zählraten wurde ein gespeichertes  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ion abwechselnd im dunklen oder hellen Zustand präpariert und anschließend die Zählereignisse des Photomultipliers beim Einstrahlen von Detektionslaserlicht registriert. Die Gesamtdauer der Einzelmessung betrug 10 ms und jedes Zeitintervall, während dem die Zählereignisse aufsummiert wurden, ist 333  $\mu\text{s}$  lang. Insgesamt wurde jeder Zustand 2000 Mal präpariert und die registrierten Photonenzahlen gemittelt. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Wie man erkennen kann, verringert sich für ein hell präpariertes Ion die Zählrate von anfangs etwa 5 Photonen pro Intervall nach 10 ms auf etwa 1 Photon pro Intervall. Für ein dunkel präpariertes Ion steigt die Zählrate in der gleichen Zeit hingegen von etwa 0,1 Photonen pro Intervall auf etwa 0,5 Photonen an. Aus einer Anpassung an die Daten ergeben sich die dimensionslosen Fit-Parameter  $a = 0,515$ ,  $b = 4,68$  und  $c = 0,434$  und darüber hinaus die Zeitkonstante für den Übergang in das Gleichgewicht  $\tau = 4,50$  ms [95].

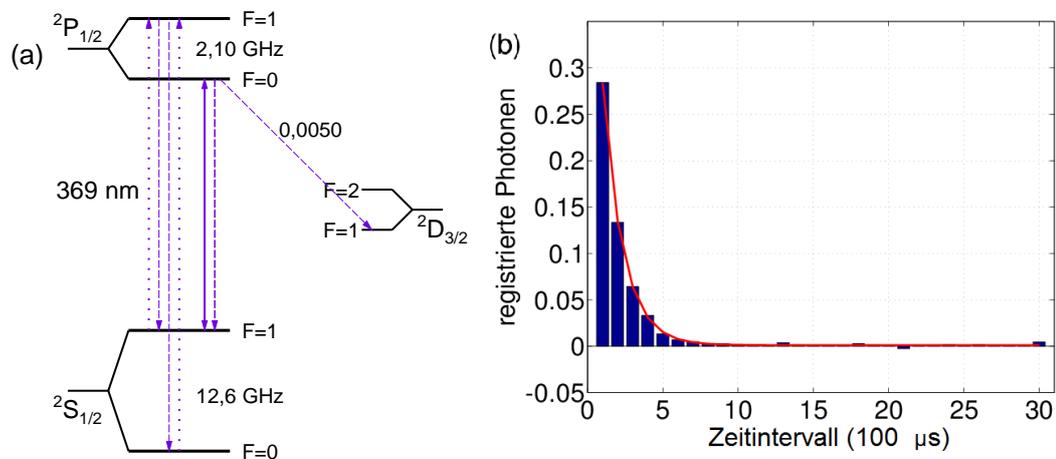
Aus diesen Parametern ergeben sich mit Hilfe der Gleichungen (5.3.9) und (5.3.11) die zu bestimmenden Lebensdauern und Zählraten. Die Lebensdauer des hellen Zustands beim Beleuchten des Ions mit Detektionslaserlicht ist  $\tau_B = 4,92$  ms und für den dunklen Zustand ist  $\tau_D = 53,1$  ms. Darüber hinaus ergibt sich für die mittlere Zählrate, die der Detektor im Falle eines hellen Ions ohne einen Zustandswechsel registrieren wird  $R_B = 16 \text{ ms}^{-1}$ . Für ein dunkles Ion beträgt diese  $R_D = 0,3 \text{ ms}^{-1}$ .

### 5.3.2. Bestimmung der Photo-Detektionseffizienz

Zur weiteren Charakterisierung des Detektionssystems wurde die Photo-Detektionseffizienz, also die Wahrscheinlichkeit mit der ein einzelnes, von einem Ion emittiertes

## 5. Zeitaufgelöste Zustandsdetektion

Photon, von dem Detektor nachgewiesen werden kann, experimentell bestimmt. Diese Größe erlaubt es ebenfalls, das Potenzial möglicher Verbesserungen an dem Aufbau abzuschätzen. Die Messmethodik hierfür beruht auf dem Verzweigungsverhältnis von  $^2P_{1/2}, F=0$  in den Zustand  $^2D_{3/2}, F=1$  von 0,0050 (vgl. Abbildung 5.3 (a)). Dieser hat eine Lebensdauer von 52,7 ms und unterbricht somit den Detektionsübergang. Ist somit ein helles Ion präpariert, so emittiert es Fluoreszenzphotonen, bis es im Mittel nach 200 Zyklen in den Zustand  $^2D_{3/2}, F=1$  zerfällt. Ist das Licht des Rückpump lasers nahe 935 nm unterdrückt, so verweilt das Ion in diesem Zustand außerhalb des Detektionsübergangs und emittiert keine weiteren Fluoreszenzphotonen. Aus der Beobachtung, wie viele der durchschnittlich 200 emittierten Photonen registriert werden können, ergibt sich die Nachweiswahrscheinlichkeit für ein einzelnes emittiertes Photon. Die Abbildung 5.3 (b) zeigt die Anzahl der registrierten Photonen in Abhängigkeit von der Ankunftszeit während einer Detektionsdauer von insgesamt 3 ms. Jedes Zeitintervall, während dem Photonen registriert und ihre Anzahl aufsummiert wird, ist dabei 100  $\mu\text{s}$  lang. Den Messdaten liegen insgesamt 120000 Wiederholungen zugrunde. Für jede Wiederholung wurde entweder ein helles oder dunkles Ion präpariert und



**Abbildung 5.3.:** Messung der Photo-Detektionseffizienz. Die wesentlichen Übergänge in  $^{171}\text{Yb}^+$  sind in (a) dargestellt. Die dicke durchgezogene Linie entspricht dem Detektionsübergang. Gestrichelte Linien kennzeichnen spontane Zerfälle und gepunktete eine mögliche nicht-resonante Anregung. In (b) befindet sich die zeitaufgelöste Fluoreszenz eines hell präparierten Ions in Abwesenheit des Rückpump lasers. Der Untergrund wurde bereits bereinigt. Jedes Zeitintervall entspricht einer Dauer von 100  $\mu\text{s}$ . Die Dynamik des Übergangs in einen dunklen Zustand geschieht auf einer Zeitskala von  $\tau_a=133(2)$   $\mu\text{s}$ .

anschließend mit Detektionslaserlicht beleuchtet. Die Detektion nachdem ein dunkles Ion präpariert worden ist, dient der Messung des Streulichts und der Dunkelzählrate des Detektors. Das registrierte Fluoreszenzsignal kann auf diese Weise von dem Untergrund bereinigt werden. Aus der Anpassung eines exponentiellen Zerfalls an die Daten ergibt sich eine Zerfallszeit in einen dunklen Zustand von  $\tau_a = 133(2) \mu\text{s}$  für die gleichen Laserparameter wie aus dem vorherigen Abschnitt.

Neben dem, der Messung zugrunde liegenden Prozess des Zerfalls nach  ${}^2D_{3/2}$ ,  $F = 1$ , gibt es einen weiteren Zerfall aus dem Detektionsübergang und zwar über die nichtresonante Anregung nach  ${}^2P_{1/2}$ ,  $F = 1$  und dem anschließenden Zerfall nach  ${}^2S_{1/2}$ ,  $F = 0$  (vgl. Abbildung 5.3 (a)). Die Zeitskala hierfür wurde in dem vorherigen Abschnitt gemessen und beträgt für die experimentellen Parameter des Detektionslasers  $\tau_B = 4,92 \text{ ms}$ . Dieser zusätzliche Zerfall wird bei der weiteren Auswertung explizit berücksichtigt und führt zu der beobachteten mittleren Lebensdauer  $\tau_a = \tau_R \tau_B / (\tau_R + \tau_B)$ . Somit lässt sich auf die Dynamik des Zerfalls nach  ${}^2D_{3/2}$ ,  $F = 1$  ohne den zusätzlichen Umpumpprozess schließen. Die Zerfallszeit hierfür ist  $\tau_R$ . Aus der Summation der Photonen ergibt sich, dass im Mittel für ein hell präpariertes Ion 0,620(6) Photonen mehr als für ein dunkel präpariertes registriert würden. Die Photo-Detektionseffizienz ergibt sich somit aus diesem Bruchteil von den durchschnittlich 200 emittierten Photonen zu  $\eta_{\text{det}} = 0,0031(1)$ . Weitere Prozesse, welche die Anzahl an emittierten Photonen beeinflussen, sind der Zerfall aus dem Zustand  ${}^2D_{3/2}$ ,  $F = 1$  zurück in den Detektionsübergang oder aber eine Rückkehr in den Detektionsübergang, nachdem ein Ion durch nicht-resonante Anregung diesen verlassen hat. Die Zeitskala, auf welcher der erste Prozess geschieht, ist die Lebensdauer des Zustands  ${}^2D_{3/2}$ ,  $F = 1$  und beträgt 52,7 ms. Der zweite Prozess geschieht auf der Zeitskala von  $\tau_D$ , was in dem vorherigen Abschnitt für die verwendeten Laserparameter gemessen worden ist. Diese beiden Prozesse sind um fast zwei Größenordnungen langsamer als der beobachtete Zerfall  $\tau_a$  und ihr Einfluss wurde daher vernachlässigt.

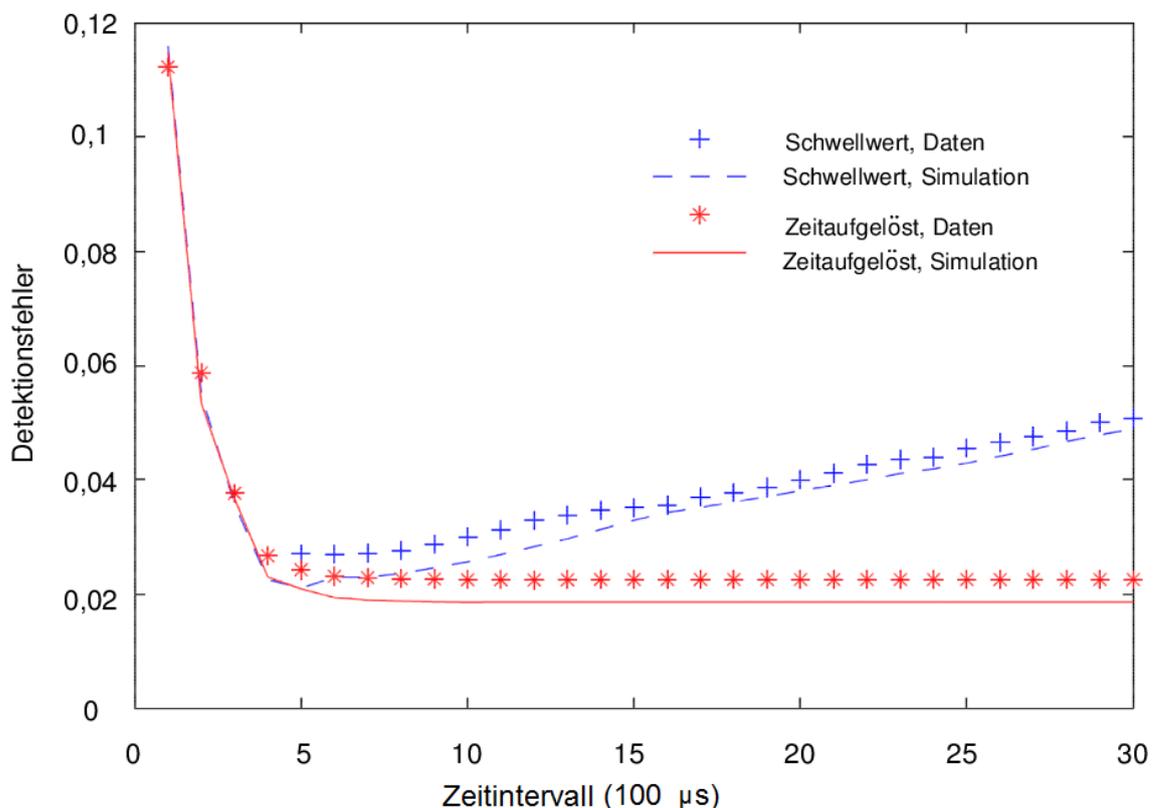
Diese gemessene Photo-Detektionseffizienz ist geringer als die theoretische Abschätzung von 0,0114 [56], die sich rein aus der numerischen Apertur des Objektivs und der Quanteneffizienz des Photomultipliers ergibt. Ein Grund hierfür liegt in den zusätzlichen Blenden im Strahlengang und der Schwelle, ab dem die Ausleselektronik des Photomultipliers dem Signalpegel ein Photon zuordnet.

### 5.3.3. Vergleich der Detektionsmethoden

Zum Vergleich der zeitaufgelösten Detektionsmethode und der Schwellwert-Methode wurde ein Ion abwechselnd in dem hellen oder dunklen Anfangszustand präpariert und anschließend mit dem Detektionslaser beleuchtet. Die Messdauer betrug 3 ms und die Länge eines Zeitintervalls  $100 \mu\text{s}$ . Bei der Auswertung mittels der Schwellwert-Methode werden die registrierten Photonen eines jeden Zeitintervalls bis zu einer beliebigen Beob-

## 5. Zeitaufgelöste Zustandsdetektion

achtungsdauer aufsummiert. Für die Auswertung, die auf der zeitaufgelösten Beobachtung beruht, ergeben sich aus den Intervallen Zeitreihen. Diese Messprozedur wurde für jeden Anfangszustand 9000 Mal wiederholt. Die Abbildung 5.4 zeigt den Detektionsfehler für den Fall, dass die Zustandsdetektion mittels der Schwellwert-Methode oder der zeitaufgelösten Methode stattfand. Der Detektionsfehler ist dabei  $\epsilon = (\epsilon_{\text{bright}} + \epsilon_{\text{dark}})/2$ , wobei der Fehler eines hellen Ions  $\epsilon_{\text{bright}}$  der relativen Häufigkeit entspricht, ein hell präpariertes Ion als dunkel zu detektieren. Der Fehler für ein dunkles Ion ist entsprechend die relative Häufigkeit, ein dunkel präpariertes Ion als hell zu detektieren. Zusätzlich zu den Messergebnissen wurden von Frau Dr. Wölk Berechnungen durchgeführt, in denen sie das oben beschriebene Experiment simuliert [95]. Es zeigt sich, dass die zeitaufgelös-



**Abbildung 5.4.:** Vergleich der Schwellwert-Methode und der zeitaufgelösten Detektionsmethode. Ein Ion wird entweder in dem hellen oder dunklen Zustand präpariert und anschließend die Detektionsfluoreszenz gemessen. Für beide Methoden wird der Detektionsfehler  $\epsilon$  für unterschiedliche Beobachtungsdauern bestimmt. Jeder Datenpunkt entspricht 9000 Wiederholungen. Darüber hinaus wurde der Detektionsvorgang von Frau Dr. Wölk mittels Simulationen untersucht und die Ergebnisse ebenfalls dargestellt.

te Methode des Zustandsnachweises einen minimalen experimentellen Detektionsfehler von  $\epsilon_{\text{time}} = 2,24\%$  ergibt. Dieser ist kleiner als der minimale Fehler  $\epsilon_{\text{thres}} = 2,67\%$  aus Anwendung der Schwellwert-Methode. Darüber hinaus ist bemerkenswert, dass es für die Schwellwert-Methode eine optimale Messdauer gibt. Für kürzere Messzeiten sind die beiden Poisson-Verteilungen der Fluoreszenz und des Untergrunds nicht genügend gut voneinander getrennt und für zu lange Messzeiten führen Zustandswechsel zu einer fehlerhaften Detektion. Die zeitaufgelöste Methode hingegen ist in der Lage die störenden Zustandswechsel zu erkennen. Aus diesem Grund wird der Detektionsfehler für längere Messdauern nicht wieder schlechter. Die Simulationen spiegeln dieses Verhalten gut wider, jedoch sind die optimalen Detektionsfehler etwas geringer. Der Grund hierfür kann einerseits eine Instabilität der Laserleistung und Frequenz sein, andererseits aber auch mögliche Präparationsfehler der Anfangszustände. Insofern stellt die Abweichung eine obere Abschätzung der Präparationseffizienz von 0,9975 dar. Darüber hinaus zeigen weitere Simulationsrechnungen von Frau Dr. S. Wölk, dass der resultierende Detektionsfehler für eine optische Leistung des Detektionslasers bei 369 nm von etwa 36  $\mu\text{W}$  minimal ist [100].

Wie eingangs erwähnt, handelt es sich bei der untersuchten zeitaufgelösten Detektionsmethode um eine Erweiterung bzw. Verallgemeinerung einer bestehenden Methode, die jedoch nur einen einzelnen Zustandswechsel berücksichtigt. Der Vergleich der bestehenden [86] und der verallgemeinerten Methode [95] geschah anhand der obigen experimentellen Messdaten. Hierbei ergab sich für die bestehende Methode ein minimaler Detektionsfehler von  $\epsilon_{\text{simple}} = 2,34\%$ , der um 0,10% höher ist als der für die verallgemeinerte Methode. Die Signifikanz dieses Unterschiedes wurde anhand von Simulationen bestätigt (siehe [95] für weitere Diskussionen).

Die obigen Resultate basieren auf den verwendeten experimentellen Parametern. Für eine höhere Detektionseffizienz  $\eta$  können die Detektionsfehler weiter verringert werden. So wurde für  $^{171}\text{Yb}^+$  ein Detektionsfehler von 0,085(7) % während einer Messdauer von 99,8  $\mu\text{s}$  berichtet [101]. In so fern scheint die Verwendung eines Abbildungssystems mit einer größeren numerischen Apertur von Vorteil zu sein, jedoch lässt sich die entwickelte zeitaufgelöste Methode weiterhin anwenden und wird in jedem Fall zu einer weiteren Verbesserung der Resultate führen.

Die Untersuchung der zeitaufgelösten Detektionsmethode beschränkte sich auf die Verwendung eines Photomultipliers. Sollen die Zustände mehrerer Ionen mittels der Methode ausgelesen werden, so bietet sich hierfür eine EMCCD-Kamera an. Diese erlaubt die ortsaufgelöste Beobachtung der Fluoreszenz und somit können die Photonen eines jeden einzelnen Ions registriert und die sich ergebenden Zeitreihen ausgewertet werden. Ein praktisches Problem, das sich bei der verwendeten EMCCD-Kamera stellt, ist die begrenzte Geschwindigkeit der Datennahme. Mit den verwendeten Einstellungen ist es nicht möglich, die Kamera hinreichend schnell auszulesen. Eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen besteht darin, die Kamera in dem sogenannten Cropped Sensor Mode

## *5. Zeitaufgelöste Zustandsdetektion*

---

zu betreiben [87]. Hierbei werden die Ionen auf nur eine Pixelreihe abgebildet. Nach der Belichtung wird die Information der Pixelreihe in die nächste Reihe geschoben und eine erneute Belichtung kann erfolgen. Dieser Betriebsmodus scheint geeignet zu sein, um hinreichend schnelle Belichtungszeiten zu ermöglichen. Jedoch ist es für diesen Betrieb notwendig, alle Pixel bis auf die gewünschte Reihe, auf welche die Ionen abgebildet werden, zu maskieren. Eine solche spezielle Maske ist kommerziell erhältlich und muss in der Nähe des CCD-Chips montiert werden, was mit umfangreicheren Änderungen an dem Detektionssystem verbunden ist. Darüber hinaus war bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten der Auslesefehler nicht der limitierende Faktor. Aus diesen Gründen wurde bisher auf eine Erweiterung der Detektion verzichtet.

# 6

## Adressierung mit Mikrowellenstrahlung

Die genaue Kontrolle eines Quantensystems ist eine wesentliche Bedingung für die Realisierung von Quanteninformationsverarbeitung und somit auch eines Quantencomputers. Der Grad an Kontrolle über einzelne Qubits, welche mittels gespeicherter Ionen realisiert werden, ist weit fortgeschritten, jedoch bleibt die Vergrößerung dieser Systeme auf viele Qubits eine Herausforderung. Falls die Fehler einzelner Logik-Gatter klein genug sind, können Protokolle zur Quantenfehlerkorrektur angewandt werden und somit fehlertolerante und skalierbare Quanteninformationsverarbeitung (fault-tolerant large scale quantum computing) erlauben [21; 22]. Ein solcher Schwellwert für die Fehler liegt in der Größenordnung  $10^{-4}$  [22; 23], der für einzelne Ionen und Manipulation mit Mikrowellenstrahlung bereits erreicht worden ist [25; 26]. Für größere Register mit mehreren Qubits führt jedoch die Manipulation eines einzelnen Qubits immer auch zwangsläufig zur Änderung des Zustandes aller anderen Qubits im Register. Dieses sogenannte Übersprechen kann die Güte der Manipulation verringern und somit die Anwendung von Fehlerkorrekturprotokollen verhindern.

Für die Adressierung eines einzelnen Qubits in einem Register existieren unterschiedliche Methoden. Die gezielte Ausnutzung der Mikrobewegung in Paul-Fallen erlaubt die Manipulation unterschiedlicher Ionen mit verschiedenen Rabi-Frequenzen [102; 103]. Fokussierte Laserstrahlen werden verwendet, um einzelne Ionen zu adressieren [104; 71]. Darüber hinaus ist eine Methode vorgeschlagen worden, wie bei solchen Ansätzen

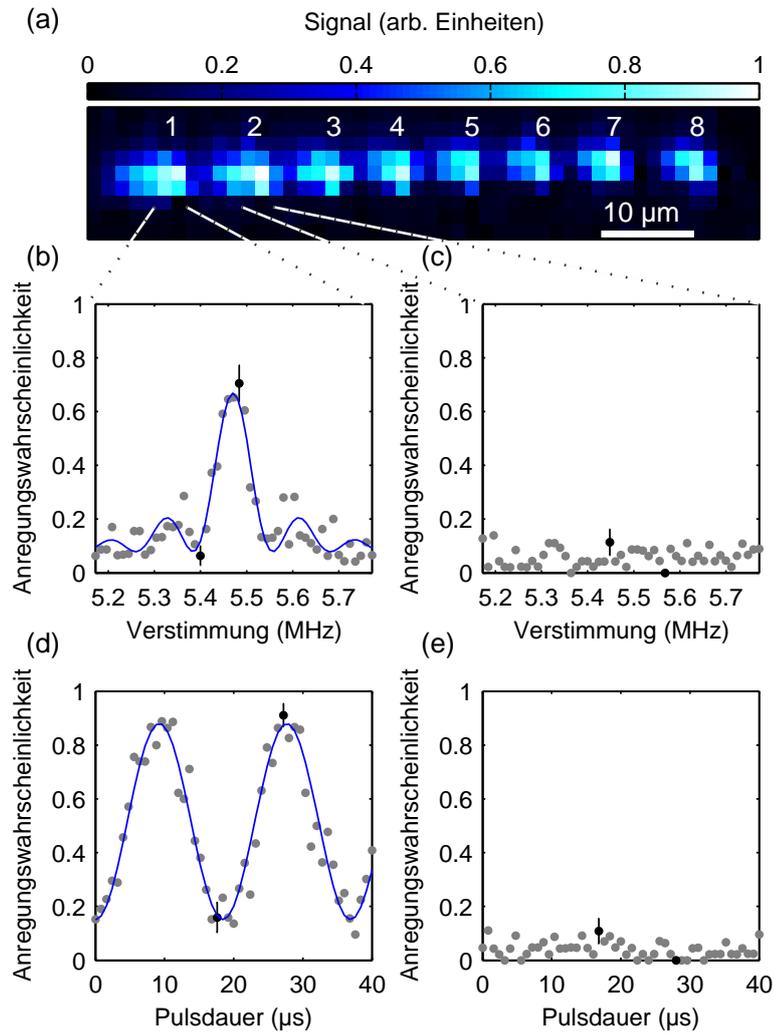
das Übersprechen weiter verringert werden kann [105]. Statische Magnetfeldgradienten [24], die zu ortsabhängigen Zeeman-Aufspaltungen führen, werden für die Adressierung einzelner Ionen [106; 28] bzw. von Neutralatomen [107] genutzt. Zu dem gleichen Zweck wurde die Ausnutzung einer positionsabhängigen Lichtverschiebung vorgeschlagen [108] und demonstriert [109]. Ebenfalls ist die Adressierung einzelner Ionen basierend auf einem positionsabhängigen differentiellen AC-Zeeman-Effekt gezeigt worden [102]. Ein inhomogenes oszillierendes Feld, das die spektrale Aufspaltung von bekleideten Zuständen (dressed states) erlaubt, fand auch Verwendung [110]. Darüber hinaus ist ebenfalls die Adressierung von Neutralatomen in einem optischen Gitter mit zusätzlichen Laser- und Mikrowellenfeldern möglich [111].

Für alle diese Methoden ist der Fehler durch Übersprechen größer als der Schwellwert für Fehlerkorrekturen oder aber der Ansatz konnte nicht auf mehr als zwei Qubits erweitert werden. In dem folgenden Kapitel wird ein Quantenregister mit acht Qubits - ein Quantenbyte - vorgestellt, in welchem der Fehler durch Übersprechen auf der Größenordnung von  $10^{-5}$  realisiert werden konnte und somit unterhalb der Schwelle für die Anwendung von Fehlerkorrekturen liegt. Das Übersprechen wird hierbei anhand eines  $\pi$ -Pulses bzw. NOT-Gatters charakterisiert. Am Ende des Kapitels wird der Fehler durch Übersprechen auch für andere Logik-Gatter diskutiert. Die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels und ihre Einordnung in den Kontext der Quanteninformatikverarbeitung mit gespeicherten Ionen ist in [112] publiziert. Nach Veröffentlichung dieser Ergebnisse wurde von laserbasierter Adressierung mit einem Fehler von Übersprechen von weniger als  $3 \times 10^{-4}$  berichtet [113]. Die Adressierung basiert hierbei auf der Verwendung von mikroelektromechanischen Spiegeln.

### 6.1. Adressierung mit Mikrowellen

Die Adressierung einzelner Ionen mittels Mikrowellenstrahlung, wie sie im Weiteren erörtert wird, basiert auf der Verwendung eines stationären und homogenen Magnetfeldgradienten (vgl. Abschnitte 2.5 und 3.1). In der Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands eines Ions lässt sich ein Qubit mit den Zuständen  $|0\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  und  $|1\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 1\rangle$  realisieren. Das inhomogene Magnetfeld führt aufgrund des (linearen) Zeeman-Effekts zu einer unterschiedlichen Hyperfeinaufspaltung der einzelnen Ionen (vgl. Gleichung (2.5.8)) und somit zur Adressierbarkeit der einzelnen Qubits im Frequenzraum.

Die Resonanzfrequenzen der einzelnen Qubit-Übergänge eines Quantenbytes, welches mittels acht Ionen realisiert wird (vgl. Abbildung 6.1 (a)), können präzise mittels kohärenter mikrowellen-optischer Doppelresonanz-Spektroskopie (vgl. Abschnitt 4.4) bestimmt werden. Nach der Präparation des Registers in  $|00000000\rangle$  werden Mikrowellenpulse mit einer Pulslänge von  $10 \mu\text{s}$  und einer variablen Frequenz auf alle in der Falle



**Abbildung 6.1.:** Adressierung eines einzelnen Qubits in einem Quantenbyte. (a) Ortsaufgelöste Resonanzfluoreszenz von acht in der Paul-Falle gespeicherten Ionen, wie sie mittels EMCCD-Kamera detektiert wird. Die mikrowellen-optische Doppelresonanz-Spektroskopie erlaubt die Bestimmung der Resonanzfrequenz einzelner Ionen. Hierbei ist es beispielsweise möglich, nur das erste Ion anzuregen (b) und das zweite unbeeinflusst zu lassen (c). Darüber hinaus werden für den Resonanzfall des ersten Ions nur bei diesen Rabi-Oszillationen beobachtet (d). Alle anderen bleiben unbeeinflusst (e). In jeder Abbildung sind zwei Datenpunkte mit Fehlerbalken, die den typischen statistischen Fehler mittels der Standardabweichung beschreiben, dargestellt. Jeder Datenpunkt entspricht 50 Wiederholungen.

gespeicherten Ionen eingestrahlt. Danach werden alle Ionen mit Detektionslaserlicht beschienen und die Resonanzfluoreszenz mittels der EMCCD-Kamera orts aufgelöst detektiert. Die relative Häufigkeit, wie oft ein bestimmtes Ion im Zustand  $|1\rangle$  gefunden wird, ergibt sich aus der Wiederholung dieser Sequenz von Mikrowellen- und Laserlichtpulsen für eine bestimmte Mikrowellenfrequenz (vgl. Abb. 6.1 (b) und (c)). Somit lässt sich aus der Beobachtung der Anregung eines Ions auf die Adressierungsfrequenz des Qubits schließen. Die gewählte Dauer der Mikrowellenpulse stimmt hierbei nicht exakt mit der Dauer eines  $\pi$ -Pulses überein. Zusammen mit dem vorhandenen Auslesefehler führt dies dazu, dass die beobachtete Anregungswahrscheinlichkeit in Abb. 6.1 (b) unter eins liegt.

Um nun auch die kohärente Dynamik der einzelnen Qubits nachzuweisen, werden die Mikrowellenpulse jeweils auf die Resonanzfrequenz des gewünschten Qubit-Übergangs abgestimmt und die Dauer der Pulse variiert. Aus der beobachteten Anregungswahrscheinlichkeit lassen sich nun Rabi-Oszillationen des gewünschten Qubits beobachten (vgl. Abschnitt 4.5). Alle anderen Qubits bleiben hingegen nahezu unbeeinflusst. Zur Vereinfachung ist in der Abbildung 6.1 (c) und (e) nur die verschwindende Anregung des benachbarten Ions dargestellt. Für die anderen Ionen wurde dieses ebenfalls überprüft. Die Tabelle 6.1 enthält eine Zusammenfassung der Adressierungsfrequenzen und der zugehörigen Rabi-Frequenzen aller acht Qubits des Quantenbytes. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, beträgt der Abstand der einzelnen Qubits im Frequenzraum einige Megahertz und ist somit weitaus größer als die Rabi-Frequenz von weniger als  $2\pi \times 55$  kHz, mit der die einzelnen Qubits manipuliert werden können. Ein Übersprechen rührt da-

**Tabelle 6.1.:** Adressierung eines Quantenbytes. Die Ergebnisse beruhen auf Messungen mittels kohärenter mikrowellen-optischer Doppelresonanz-Spektroskopie. Die unterschiedlichen Rabi-Frequenzen rühren von der Charakteristik des verwendeten Mikrowellenaufbaus her. Dieser zeigt eine Frequenzabhängigkeit der Ausgangsleistung.

Ion $i$	Resonanzfrequenz $\nu_i/2\pi$ (GHz)	Rabi-Frequenz $\Omega/2\pi$ (kHz)
1	12,648298(3)	54,1(5)
2	12,650634(3)	46,7(6)
3	12,652658(4)	43,5(6)
4	12,654523(4)	40,0(7)
5	12,656375(9)	38,2(12)
6	12,658282(9)	34,4(6)
7	12,660302(9)	30,7(8)
8	12,662694(11)	28,5(8)

her von der nicht-resonanten Anregung weit verstimmtter Mikrowellenpulse her, die im nächsten Abschnitt näher diskutiert wird.

## 6.2. Nicht-resonante Anregung

### 6.2.1. Effekt von weit verstimmtten Mikrowellenpulsen

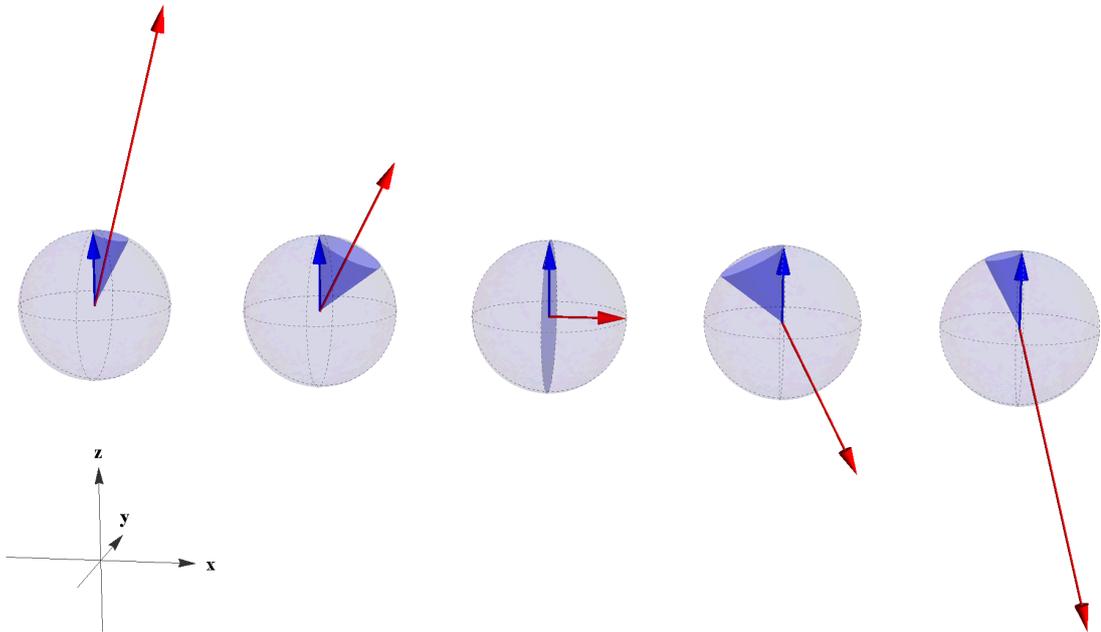
Das Übersprechen in dem dargelegten Adressierungsschema wird dominiert von dem Effekt weitverstimmtter kohärenter elektromagnetischer Strahlung. Während ein Qubit  $i$  mittels Mikrowellenstrahlung der Frequenz  $\omega_{\mu w} = \omega_i$  resonant adressiert wird, werden die anderen Qubits  $j \neq i$  von nicht-resonanter Strahlung der Frequenz  $\omega_j + \Delta_{i,j}$  beeinflusst ( $\Delta_{i,j} = \omega_i - \omega_j$ ). Von Interesse ist nun die unbeabsichtigte Dynamik der Qubits  $j$  während ein Qubit  $i$  adressiert wird.

Die Dynamik eines einzelnen Qubits unter dem Einfluss von kohärenter Mikrowellenstrahlung wird in dem Abschnitt 2.6 diskutiert. Die Zeitentwicklung entspricht einer Drehung des Zustandsvektor im Bild der Bloch-Kugel. Die Komponente der Drehachse in der  $xy$ -Ebenen der Bloch-Kugel ist dabei  $n_{\perp} = \Omega_i/\Omega_R$  und die Komponente entlang der  $z$ -Achse ist  $n_z = \Delta_{i,j}/\Omega_R$ . Hierbei bezeichnet  $\Omega_R$  die verallgemeinerte Rabi-Frequenz,  $\Omega_i$  die Rabi-Frequenz für den Resonanzfall und  $\Delta_{i,j}$  die Verstimmung des Pulses. Die Drehung erfolgt dabei mit einer Winkelgeschwindigkeit, die der verallgemeinerten Rabi-Frequenz entspricht. Für eine große Verstimmung  $|\Delta_{i,j}| \gg \Omega_i^2$  kann die Dynamik in der Bloch-Kugel-Darstellung durch eine schnelle Drehung um eine Achse, die nahezu parallel zur  $z$ -Achse steht, beschrieben werden.

Die Abbildung 6.2 veranschaulicht exemplarisch die Dynamik in einer Kette von fünf Ionen. Das mittlere Ion wird resonant mit elektromagnetischer Strahlung adressiert und der Zustandsvektor rotiert um eine Achse in der  $xy$ -Ebene der Bloch-Kugel. Für die anderen Ionen ist diese Strahlung verstimmt. Ihre Dynamik in einem Bezugssystem, das mit der Mikrowellenfrequenz rotiert, besteht aus einer schnellen Rotation des Zustandsvektor. Der Zustandsvektor beschreibt dabei einen Kegel, dessen Öffnungswinkel mit steigender Verstimmung immer kleiner wird. In einem Quantenregister, in dem alle Qubits in ihrem Grundzustand  $|0\rangle$  präpariert worden sind, führt die Adressierung eines einzelnen Qubits  $i$  für die Pulsdauer  $\tau$  somit auch zu einer Anregung aller anderen Qubits  $j \neq i$ . Der hervorgerufenen Fehler bzw. die unbeabsichtigte Anregung pro Puls ist

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= |\langle 1 | R_n(\theta) | 0 \rangle|^2, \\ &= (\Omega_i/\Omega_R)^2 \sin^2(\Omega_R \tau / 2). \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Für sehr weit verstimmtte Pulse gilt  $|\Delta| \gg \Omega$  und somit folgt in guter Näherung über



**Abbildung 6.2.:** Illustration der Dynamik bei Adressierung von gespeicherten Ionen in einem Magnetfeldgradienten. Jedes Ion wird durch eine Bloch-Kugel dargestellt und zur Vereinfachung sind sie äquidistant angeordnet, was für ein harmonisches Fallenpotenzial nicht zutrifft. Die Rotation der Zustandsvektoren (blau) geschieht dabei um eine Drehachse (rot), die von der relativen Phase, der Rabi-Frequenz und der Verstimmung des Feldes abhängt. Die Länge der Drehachse ist proportional zu der verallgemeinerten Rabi-Frequenz. Zur besseren Anschauung beträgt der Abstand der Resonanzfrequenzen in der Illustration die doppelte Rabi-Frequenz. In den beschriebenen Experimenten beträgt diese Aufspaltung jedoch typischerweise die einhundertfache Rabi-Frequenz, weshalb alle Drehachsen nahezu vertikal verlaufen und nur die des adressierten Ions in der  $xy$ -Ebenen liegt. Auf den Zeitskalen der Rabi-Oszillationen kann die Spin-Spin-Kopplung vernachlässigt werden.

$$\Omega_R = |\Delta|$$

$$C_{i,j} \approx (\Omega_j/\Delta_{i,j})^2 \sin^2(\Delta_{i,j}\tau). \quad (6.2.2)$$

Die maximale unbeabsichtigte Anregungswahrscheinlichkeit aus nicht-resonanter Anregung eines einzelnen Pulses ist somit  $(\Omega_i/\Delta_{i,j})^2$ . Die obige Gleichung (6.2.2) beschreibt in gleichem Maße die Abweichung aus dem Anfangszustand  $|0\rangle$  oder  $|1\rangle$  des Qubits  $j$ .

Für den Fall, dass sich das Qubit  $j$  in einem Superpositionszustand befindet, offenbart sich der Effekt aus nicht-resonanter Anregung in einem Ramsey-Experiment (vgl.

Abschnitt 4.6). Nach der Präparation in  $|0\rangle$  wird das Qubit  $j$  mittels eines resonanten  $\pi/2$ -Pulses in den Superpositionszustand überführt. Die Adressierung von Qubit  $i$  ändert nun den Zustand des Qubits  $j$ . Würde Qubit  $j$  nicht von dem Puls beeinflusst, so würde ein zweiter resonanter  $\pi/2$ -Puls die Besetzungswahrscheinlichkeit nach  $|1\rangle$  überführen. Die Abweichung von der Besetzungswahrscheinlichkeit in  $|1\rangle$  wird ebenfalls von der Gleichung (6.2.2) beschrieben.

Neben der quantitativen Beschreibung gibt es auch zwei Zugänge, um den Effekt aus nicht-resonanter Anregung qualitativ zu beschreiben. Für die Pulsdauer  $\tau = 2\pi/\Delta_{ij}$  wird der Zustandsvektor von Qubit  $j$  im Bild der Bloch-Kugel gerade um einen Winkel von  $2\pi$  gedreht und die Anregungswahrscheinlichkeit des Qubits bleibt somit unverändert. Den selben Effekt kann man auch im Frequenzraum diskutieren. Die Frequenzkomponente des Pulses bei der Resonanzfrequenz des Qubits  $j$  ergibt sich aus der Fourier-Transformation des Rechteckpulses  $\text{sinc}(\Delta\tau/2\pi)$  (z. B. [114]), mit der Verstimmung  $\Delta$  und Pulsdauer  $\tau$ . Zu einer gegebenen Verstimmung gibt es also immer Pulsdauern, für welche diese Frequenzkomponente verschwindet. Somit ändert sich in diesem Fall der Zustand des Qubits  $j$  nicht. Für andere Pulsdauern gibt es eine nicht-verschwindende Frequenzkomponente bzw. einen effektiven Drehwinkel und dieses führt zu einer Änderung des Qubit-Zustands. Man kann sich diese Periodizität bei der Entwicklung von speziell optimierten Quantenregistern zunutze machen (vgl. Abschnitt 6.5). Die Fidelity des Zustands von Qubit  $j$ , bezogen auf den Anfangszustand  $|0\rangle$ , nach der Manipulation von Qubit  $i$  ist  $F_{ij} = 1 - C_{ij}$  (vgl. Abschnitt 4.7).

### 6.2.2. Benchmarking-Protokoll

Ziel der weiteren Untersuchung ist es, den Fehler durch Übersprechen innerhalb eines Quantenregisters zu bestimmen. Für die typischen experimentellen Parameter ( $\Omega = 2\pi \times 20$  kHz und  $\Delta_{i,i+1} = 2\pi \times 2$  MHz) ist die nicht-resonante Anregung auf der Größenordnung von  $10^{-5}$ . Dieses ist viel kleiner als die typischen Fehler aus Zustandspräparation und der Detektion. Aus diesem Grund werden die geringen Anregungswahrscheinlichkeiten mittels einer Benchmarking-Methode, die auf der Methode des Randomized Benchmarking [89] beruht, präzise vermessen. Anstatt also den Fehler aus Übersprechen nach der Ausführung eines einzelnen Logik-Gatters zu bestimmen, werden Sequenzen von mehreren Gattern ausgeführt und die Zunahme des Gesamtfehlers beobachtet. Der daraus resultierende Zerfall der Zustandsgüte erlaubt daraufhin den Rückschluss auf den mittleren Fehler, der durch ein einzelnes Gatter hervorgerufen wird. Das verwendete Benchmarking-Protokoll ist im folgenden kurz zusammengefasst und im Anhang F motiviert.

Zuerst wird das Register in einem gewünschten Zustand initialisiert. Für die Charakterisierung des Quantenbytes ist dieses beispielsweise der Grundzustand  $|00000000\rangle$ . Danach wird eine Sequenz von  $N$  (bis zu  $N = 3000$ ) vielen Pulsen mit der Pulsdauer

$\tau$ , der Verstimmung  $\Delta$  und einer Leistung, die einer Rabi-Frequenz  $\Omega$  entspricht, eingestrahlt. Die Phasenlage eines jeden einzelnen Pulses ist dabei zufällig aus der Menge  $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  gewählt. Nach dem Ende der Sequenz wird das gesamte Register ausgelesen und die Fidelity eines jeden Qubits bestimmt (vgl. Abschnitt 4.7). Da die meisten Ereignisse Dunkelereignisse sind, wurde der Schwellwert der Detektion (vgl. Abschnitt 4.3) zuvor unabhängig aus Rabi-Oszillationen (vgl. Abschnitt 4.5) auf dem Übergang  $|0\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$  aller Ionen bestimmt und die Detektion somit kalibriert. Diese experimentellen Schritte werden wiederholt, wobei für jede Sequenz die Phasen der einzelnen Pulse erneut zufällig gewählt werden. Das Tastverhältnis der Sequenz ist dabei 50%, was bedeutet, dass nach einem Rechteckpuls immer eine Pause von der Dauer einer Pulslänge folgt.

Dieses Benchmarking-Protokoll führt dazu, dass der Zustand eines nicht-adressierten Qubits aufgrund von Übersprechen bzw. nicht-resonanter Anregung auf seiner Bloch-Kugel diffundiert (vgl. Anhang F). Die mittlere Fidelity von Qubit  $j$  für den Fall, dass Qubit  $i$  mit  $N$  Pulsen adressiert wird ist

$$\langle F_{ij}(N) \rangle = \frac{1}{2}(1 + e^{-2C_{ij}N}). \quad (6.2.3)$$

Der mittlere Fehler aus nicht-resonanter Anregung pro Gatter  $C_{i,j}$  wird aus der Messung des Zerfalls von  $\langle F_{i,j}(N) \rangle$  bestimmt.

Die gemessene Fidelity ist jedoch auch für verschwindende Pulszahl ( $N = 0$ ) wegen Präparations- und vor allem Detektionsfehlern (vgl. Abschnitt 4.3) kleiner eins. Aus diesem Grund erfolgt die Anpassung an die Daten mit dem Modell

$$f(p_0, p_1, N) = \frac{1}{2}(1 + (2p_0 - 1)e^{-2/p_1 N}). \quad (6.2.4)$$

Der Parameter  $p_0 < 1$  beschreibt diese Effekte und der Parameter  $p_1 = 2/C_{i,j}$  ergibt den mittleren Fehler pro Gatter.

Für die Messung des Übersprechens wird die Sequenzlänge  $N$  variiert und somit der Fehler gemessen. Darüber hinaus ist es jedoch auch möglich, für eine feste Sequenzlänge  $N$  die experimentellen Parameter, wie zum Beispiel die Pulsdauer, zu ändern, um sie beispielsweise auf Dauer eines  $\pi$ -Pulses anzupassen. Die erwartete mittlere Fidelity der nicht-adressierten Qubits ist dann ebenfalls beschrieben durch die Gleichungen (6.2.3) und (6.2.2).

Für die Untersuchung von Superpositionszuständen wird nach der Hälfte der Benchmarking-Sequenz ein resonanter Spin-Echo-Puls (vgl. Kapitel 7) an das zu untersuchende Qubit adressiert. Dieser Puls korrigiert den möglichen Effekt aus einer unbeabsichtigten Präzession um die  $z$ -Achse, die aus einer fehlerhaften Präparation des Superpositionszustands, aufgrund falsch bestimmter Adressierfrequenzen oder einer Drift

dieser resultiert. Darüber hinaus kompensiert dieser Puls auch den Effekt aus Mikrowellen-Lichtverschiebung, weshalb dieser Effekt in Abschnitt 6.6 unabhängig gemessen wird.

Im Gegensatz zu dem Benchmarking-Protokoll in [89; 115] wird das hier verwendete nicht von fehlerhaften Einzel-Qubit-Gatter negativ beeinflusst, was das Messen des Übersprechens verhindern würde. Darüber hinaus erlaubt das Protokoll, falls es auf ein Mehr-Qubit-Quantenregister angewandt wird, das Übersprechen auf alle anderen Qubits im Register gleichzeitig zu messen.

### 6.3. Experimentell simuliertes Übersprechen

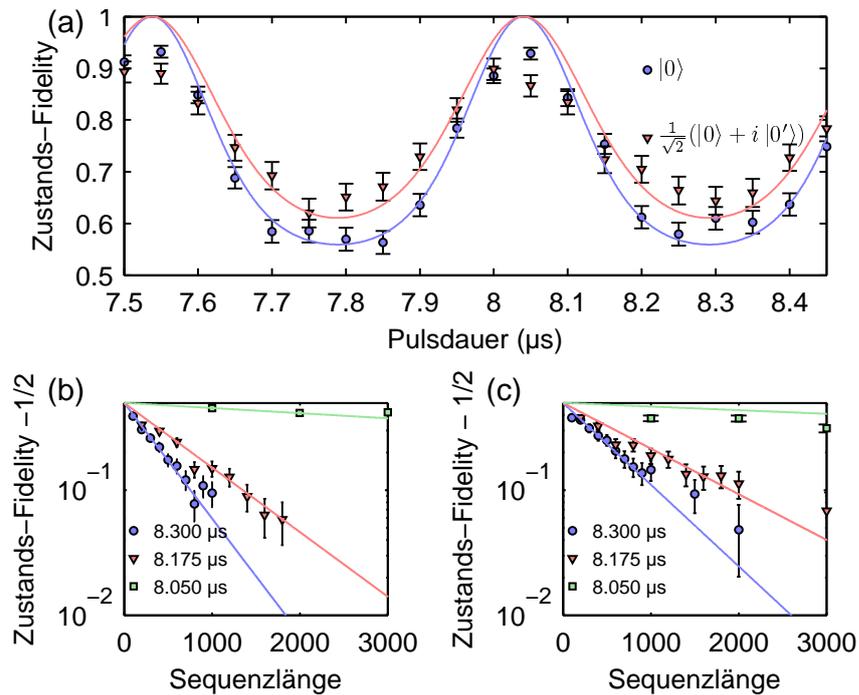
Bevor das Übersprechen in einem Quantenbyte genau charakterisiert wird, behandelt der folgende Abschnitt die experimentelle Untersuchung von nicht-resonanter Anregung an einem einzelnen Ion.

Mittels des entwickelten Benchmarking-Protokolls wird die Gültigkeit des theoretischen Modells (vgl. Gleichung (6.2.3) und (6.2.2)) bestätigt. Dieses erlaubt es, den Fehler, den ein einzelner weit verstimmtter Mikrowellenpuls hervorruft, als Funktion von experimentellen Parametern, wie der Verstimmung, der Leistung und der Dauer eines Mikrowellenpulses vorherzusagen.

Zu diesem Zweck dienen hier die (in erster Ordnung) magnetfeldunabhängige Hyperfein-Zustände  $|0\rangle$  und  $|0'\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle$  eines einzelnen Ions als Qubit (siehe Abschnitt 2.2). Der Vorteil liegt darin, dass dieser Übergang eine lange Kohärenzzeit aufweist und im Gegensatz zu den magnetfeldabhängigen Qubit-Übergängen keine deutliche Drift zeigt. Die verwendeten Pulssequenzen führen zu Manipulationsdauern von mehr als 100 ms. Für ein Qubit in der magnetfeldabhängigen Basis wäre es somit unmöglich kohärente Superpositionszustände zu untersuchen, da diese viel schneller dephasieren [70].

Die Mikrowellenpulse, welche den gewählten Übergang treiben sollen, sind um  $\Delta_\pi = 2\pi \times 2$  MHz vom gewählten Qubit-Übergang verstimmt. Eine solche Verstimmung ist typisch für das Quantenbyte (vgl. Tabelle 6.1). Die Leistung der Pulse entspricht einer Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 60,8(5)$  kHz und die Pulsdauer, im Bereich von  $7,5 \mu\text{s}$  bis  $8,5 \mu\text{s}$ , ist so gewählt, dass sie im Resonanzfall in etwa einem  $\pi$ -Puls entsprechen würde. Die nicht-resonante Anregung der Hyperfein-Zustände  $|^2S_{1/2}, F = 1, m_F = \pm 1\rangle$  ist bei den folgenden Untersuchungen vernachlässigbar, da das gewählte statische und homogene Magnetfeld von  $0,857$  mT dazu führt, dass die Pulse um  $\Delta_{\sigma^+} = -2\pi \times 10$  MHz und  $\Delta_{\sigma^-} = 2\pi \times 14$  MHz zu den magnetischen  $\sigma$ -Übergängen verstimmt sind. Diese Verstimmung ist somit mehr als fünf Mal größer als die zu dem magnetischen  $\pi$ -Übergang, der das zu untersuchende Qubit darstellt.

Die Untersuchung der nicht-resonanten Anregung erfolgt mittels des entwickelten



**Abbildung 6.3.:** Charakteristika von nicht-resonanter Anregung. (a) Die Zustands-Fidelity nach Anwendung einer Benchmarking-Sequenz mit  $N = 1000$  Pulsen von variabler Pulslänge zeigt ein periodisches Verhalten mit deutlichen Extrema. Das Verhalten von zwei unterschiedlichen Anfangszuständen wurde dabei untersucht. In (b) ist die Fidelity des Zustands  $|0\rangle$ , wie sie als Funktion der Sequenzlänge zerfällt, dargestellt. Die Zerfallskonstante hängt dabei von der Pulsdauer ab und erlaubt Rückschlüsse auf den Fehler pro Einzelpuls. (c) Wie in (b), aber angewandt auf den Superpositionszustand. Linien repräsentieren die Erwartung des Modells für jeweils drei verschiedene Pulsdauern. Jeder Datenpunkt entspricht 1000 Wiederholungen des Experiments und Fehlerbalken entsprechen der Standardabweichung.

Benchmarking-Protokolls, welches sowohl auf den Energieeigenzustand  $|0\rangle$ , als auch auf den Superpositionszustand  $1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$  angewandt wird. Zuerst werden Sequenzen mit  $N = 1000$  verstimmten Pulsen eingestrahlt. Die Länge aller Pulse in einer Sequenz wird dabei variiert. Die resultierende Zustands-Fidelity in Abbildung 6.3 (a) zeigt das periodische Verhalten, welches von den Gleichungen (6.2.3) und (6.2.2) vorhergesagt wird. Die Maxima der Fidelity erscheinen für Pulsdauern von  $7,55 \mu\text{s}$  und  $8,05 \mu\text{s}$ . Die Pulslängen der Maxima entsprechen dabei genau den Längen, bei denen (im Bild der Bloch-Kugel) der Zustandsvektor des Qubits auf einem Kleinkreis exakt um ein Vielfaches von  $2\pi$  gedreht wird und somit effektiv unverändert bleibt (bis auf einen Phasenfaktor  $\exp(i\pi)$ ). Da die verallgemeinerte Rabi-Frequenz in etwa der Ver-

stimmung entspricht, folgt für die beiden Maxima, dass der Zustandsvektor um Winkel von  $\Delta\tau = 30\pi$  bzw.  $32\pi$  gedreht wird. Im Gegensatz zu den Maxima wird der Zustandsvektor bei den beobachteten Minima bei Pulslängen von  $7,8 \mu\text{s}$  und  $8,3 \mu\text{s}$  um ungerade Vielfache von  $\pi$  gedreht und somit maximal ausgelenkt. Für diese beiden Pulslängen beträgt der Winkel  $31\pi$  bzw.  $33\pi$ .

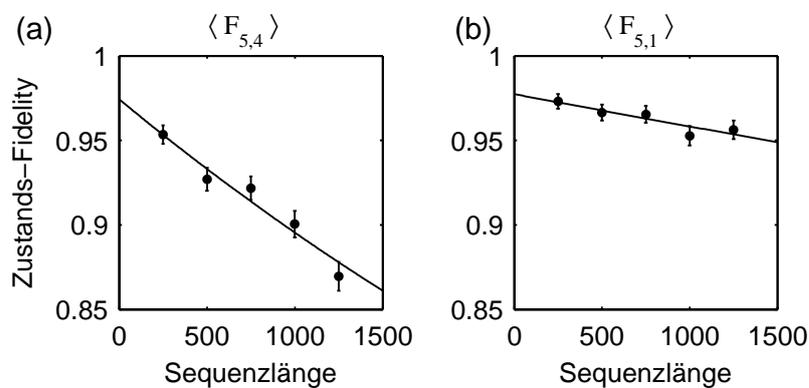
Bei der Untersuchung des Superpositionszustands zeigt sich, dass dieser weniger stark von nicht-resonanter Anregung beeinflusst wird und der mittlere Fehler pro Gatter um einen Faktor  $\sqrt{1/2}$  kleiner ist. Dieses liegt daran, dass während des Benchmarking-Protokolls auch Mikrowellenpulse mit einer Phasenlage entlang der  $y$ -Achse eingestrahlt werden. Der gewählte Superpositionszustand ist ein  $y$ -Eigenzustand und wird daher weniger stark von einem Puls beeinflusst, der  $y$ -Komponenten hat. Hier offenbart sich somit experimentell, dass das Übersprechen in einem Quantenregister im Allgemeinen nicht nur von den Eigenschaften der Mikrowellenpulse abhängt, sondern auch von dem Zustand, in dem sich das Register befindet.

Darüber hinaus wird die Rate, mit welcher die Zustands-Fidelity während der Benchmarking-Sequenzen zerfällt, für zwei unterschiedliche Zustände untersucht. Hierbei wird nun für eine konstante Pulsdauer die Länge der Pulssequenz, also die Anzahl der Gatter  $N$  variiert. Die Abbildungen 6.3 (b) und (c) zeigen sowohl den gemessenen Zerfall der Zustands-Fidelity des untersuchten Qubits, als auch die Vorhersage basierend auf den Gleichungen (6.2.3) und (6.2.2) für die drei untersuchten Pulsdauern. Die näher untersuchten Pulsdauern entsprechen hierbei denen, für welche die Extrema der Fidelity beobachtet werden können und einer Pulsdauer genau dazwischen. Für die Pulsdauer, die einer Drehung um  $33\pi$  entspricht, zerfällt die Zustands-Fidelity am schnellsten, wohingegen sie für Drehungen um  $32\pi$  am längsten erhalten bleibt. Das Modell (Gleichungen (6.2.3) und (6.2.2)) sagt eine durchschnittliche Änderung der Zustands-Fidelity pro Einzelpuls von  $1,06 \times 10^{-3}$  (Pulsdauer von  $8,300 \mu\text{s}$ ),  $5,3 \times 10^{-4}$  (Pulsdauer von  $8,175 \mu\text{s}$ ) und  $1,8 \times 10^{-4}$  (Pulsdauer  $8,050 \mu\text{s}$ ) vorher, falls das Qubit anfänglich in  $|0\rangle$  initialisiert worden ist. Diese Vorhersagen sind in gutem Einklang mit den Messdaten aus Abbildung 6.3. Für den Superpositionszustand (siehe Abbildung 6.3 (c)) ist die Änderung der Zustands-Fidelity pro Puls ebenfalls um einen Faktor von  $\sqrt{2}$  geringer als für den Energieeigenzustand.

## 6.4. Gemessenes Übersprechen in einem Quantenbyte

Im folgenden Abschnitt wird die Bestimmung des Übersprechens in einem Quantenbyte beschrieben. Als Qubit-Zustände dienen die magnetfeldabhängigen Niveaus  $|0\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  und  $|1\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1\rangle$  eines jeden Ions. Der untersuchte Anfangszustand des Quantenregisters ist der Grundzustand  $|00000000\rangle$ . Wie zuvor findet

hierzu das entwickelte Benchmarking-Protokoll Anwendung. Die Frequenz der Mikrowellenpulse wird dabei so abgestimmt, dass eines der Qubits im Quantenbyte resonant adressiert wird. Die Leistung der Pulse wird jeweils so gewählt, dass er das adressierte Qubit mit einer Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 20$  kHz manipuliert. Die gewählte Pulsdauer von  $25 \mu\text{s}$  entspricht dann der Dauer eines  $\pi$ -Pulses auf dem adressierten Qubit, wodurch ein NOT-Gatter realisiert wird. Entsprechend des Benchmarking-Protokolls werden die Phasen der einzelnen Pulse zufällig gewählt und die Länge der Sequenz variiert (250 bis zu 1250 Pulse). Eine wesentlich längere Sequenz ist experimentell nicht möglich, da sich der eindimensionale Ionenkristall sonst zu sehr aufheizt und zu schmelzen beginnt.



**Abbildung 6.4.:** Exemplarische Darstellung des Effekts von Übersprechen im untersuchten Quantenbyte. Das Qubit 5 wird adressiert und der Zerfall der Zustands-güte des benachbarten Qubits 4 (a) und des nicht-benachbarten Qubits 1 (b) wird beobachtet. Die Zustands-Fidelity beider Qubits beträgt anfangs  $0,975(11)$ . Das dominierende Übersprechen zwischen direkt benachbarten Qubits von  $C_{5,4} = 7,6(13) \times 10^{-5}$  führt dazu, dass die Zustandsgüte von Qubit 4 deutlich schneller zerfällt als die von Qubit 1, welches ein Übersprechen von lediglich  $C_{5,1} = 1,9(9) \times 10^{-5}$  erfährt. Die durchgezogenen Linien entsprechen einer Anpassung an die Datenpunkte, aus welcher das Übersprechen bestimmt wird. Jeder Datenpunkt entspricht 1600 Wiederholungen des Experiments und die Fehlerbalken entsprechen der Standardabweichung.

Die Abbildung 6.4 zeigt exemplarisch einige Ergebnisse des Übersprechens. Das Qubit 5 wird hier adressiert und das Übersprechen auf das Qubit 4 (in (a)) und 1 (in (b)) führt zu einem Zerfall der Zustands-Fidelities. Man kann deutlich erkennen, dass das dominante Nächster-Nachbar-Übersprechen zu einem schnelleren Zerfall der Zustands-Fidelity von Qubit 4 führt. Die Fidelity von Qubit 1 hingegen zerfällt deutlich langsamer. Aus den Zerfallskonstanten lässt sich (siehe Gleichungen (6.2.3)) der Fehler aus Übersprechen für ein einzelnes NOT-Gatter bestimmen. Die extrapolierte Fidelity für eine

verschwindende Sequenzlänge beträgt für beide Qubits 0,975(11) und ist wegen dem Detektionsfehler (vgl. Abschnitt 4.3) kleiner eins. Die gleiche Auswertung der Ergebnisse für die Qubits 2,3,6,7 und 8 liefert das Übersprechen auf diese Qubits, falls Qubit 5 adressiert wird. Auf die gleiche Weise werden alle Qubits jeweils adressiert und das Übersprechen auf alle anderen Qubits gemessen. In der Tabelle 6.2 sind die Ergebnisse für jedes Qubitpaar zusammengefasst.

Ein wesentliches Ergebnis ist, dass der gemessene mittlere Fehler aufgrund von Übersprechen pro Puls in der Größenordnung von  $10^{-5}$  ist. Dieser Fehler liegt unterhalb der Schwelle von Schemata zur Quantenfehlerkorrektur [22; 23]. Darüber hinaus beinhaltet der gemessene Fehler alle möglichen Fehlerquellen, die den untersuchten Quantenzustand beeinflussen können, wobei die Hauptfehlerquelle die nicht-resonante Anregung ist. Ebenfalls fällt auf, dass der mittlere Fehler pro Gatter durch Übersprechen zwischen Qubits in der Mitte des Registers größer ist als zwischen benachbarten am Rand des Registers. Der Grund hierfür ist die nicht äquidistante Anordnung der Ionenkette in dem harmonischen Potenzial und dem homogenen Magnetfeldgradienten. Anhand der Adressierungsfrequenzen, wie sie in Tabelle 6.1 zu finden sind, lässt sich dieses kurz diskutieren. Der Frequenzabstand zwischen den Qubits 1 und 2 beträgt in etwa 2,34 MHz. Der Abstand zwischen den Qubits 4 und 5 beträgt hingegen lediglich 1,85 MHz. Da das Übersprechen quadratisch mit dem Frequenzabstand sinkt  $C_{i,j} \propto 1/\Delta_{i,j}^2$  (vgl. Gleichung (6.2.2)), ist ersichtlich, dass der Effekt für die mittleren Qubits stärker zu erwarten ist, als für die äußeren.

Des Weiteren wird das Übersprechen in Abhängigkeit von der Mikrowellenleistung

**Tabelle 6.2.:** Gemessenes Übersprechen  $\{C_{i,j}\}$  ( $\times 10^{-5}$ ) in einem Quantenbyte für eine Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 20$  kHz. Hierbei wird jeweils das Qubit  $i$  adressiert, wodurch das Qubit  $j$  seinen Zustand im Mittel um  $C_{i,j}$  ändert. Die resultierenden Fehler pro Gatter liegen unterhalb der Fehlerkorrekturschwelle.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	3,0(9)	1,9(8)	2,2(9)	2,3(9)	1,0(8)	0,6(7)	0,7(7)
2	3,8(14)	-	4,1(11)	2,3(9)	2,3(11)	1,6(11)	0,9(8)	0,9(9)
3	2,1(10)	3,7(12)	-	4,5(12)	1,6(7)	2,1(6)	0,8(7)	1,1(6)
4	0,9(9)	1,7(6)	2,7(11)	-	3,1(9)	0,8(7)	0,6(6)	0,6(6)
5	1,9(9)	1,6(9)	3,1(10)	7,6(13)	-	3,1(10)	1,8(9)	0,5(5)
6	1,5(5)	1,2(8)	1,5(8)	1,0(8)	5,5(14)	-	3,6(13)	0,8(8)
7	0,8(8)	1,4(8)	1,5(7)	1,2(8)	1,2(8)	2,9(11)	-	2,6(8)
8	0,8(6)	1,1(5)	0,6(6)	0,8(8)	2,5(9)	1,1(8)	3,4(12)	-

**Tabelle 6.3.:** Gemessenes Übersprechen  $\{C_{i,j}\}$  ( $\times 10^{-5}$ ) im Quantenbyte für höhere Mikrowellenleistung. Hierbei wird jeweils das Qubit 1 bis 4 adressiert und die mittlere Änderung pro Puls  $\{C_{i,j}\}$  für das Qubit  $j$  gemessen.

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	42(4)	17(2)	9(1)	18(2)	8(1)	5,6(8)	9(1)
2	53(6)	-	30(3)	10(1)	10(2)	8(1)	5(1)	7(1)
3	14(2)	60(8)	-	29(4)	12(2)	10(2)	4,9(4)	2,7(3)
4	9(1)	15(2)	41(5)	-	39(5)	11(1)	5,3(7)	3,4(3)

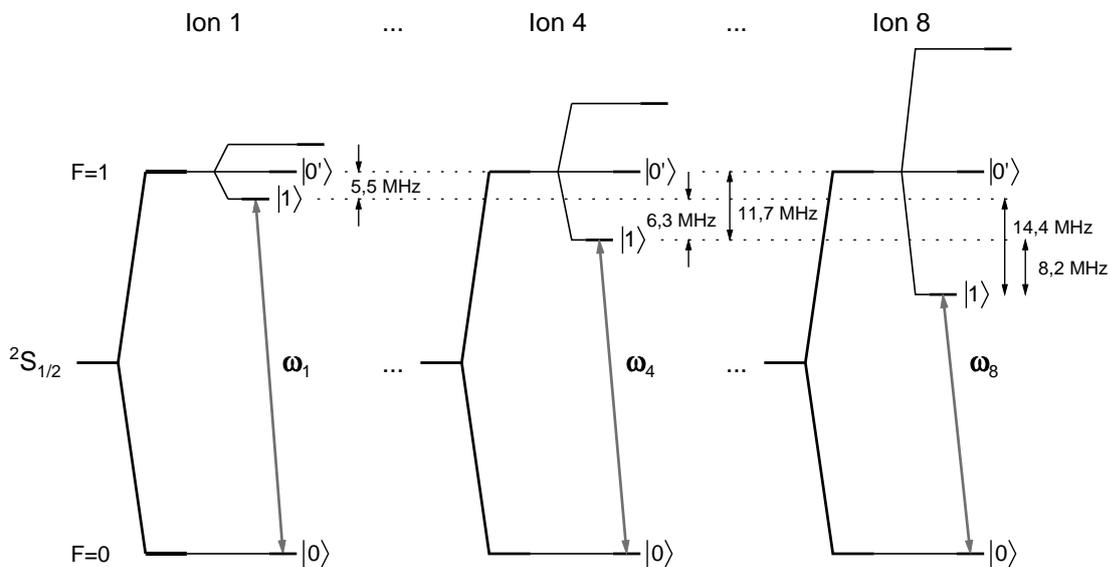
untersucht. Hierfür wird das Übersprechen in dem gleichen Quantenbyte für höhere Mikrowellenleistungen teilweise charakterisiert. Die Leistung des Mikrowellenaufbaus wird dabei maximal gewählt, was den in Tabelle 6.1 aufgeführten Rabi-Frequenzen entspricht. Die Pulsdauern werden erneut so gewählt, dass sie einem  $\pi$ -Puls auf dem adressierten Qubit entsprechen. Die Tabelle 6.3 zeigt das gemessene Übersprechen für den Fall, dass jeweils die Qubits 1 bis 4 adressiert werden. Die höhere Mikrowellenleistung führt zu Rabi-Frequenzen von  $2\pi \times 54,1(5)$  kHz bis zu  $2\pi \times 40,0(7)$  kHz (vgl. Tabelle 6.1) auf den adressierten Qubits 1 bis 4. Da die nicht-resonante Anregung proportional zum Quadrat der Rabi-Frequenz (und somit proportional zur Leistung) ist, ist der mittlere Fehler pro Puls nun signifikant erhöht und liegt in der Größenordnung  $10^{-4}$ .

Bei einer genaueren Betrachtung fallen zwei unerwartete Sachverhalte auf. Erstens ist für den Fall, dass Qubit 1 adressiert wird, das Übersprechen auf die Qubits 4 und 8 gleich groß. Zweitens ist das Übersprechen vom Qubit 1 auf 8 größer als beispielsweise das von Qubit 4 auf 8, obwohl diese im Frequenzraum deutlich näher liegen (vgl. Tabelle 6.1). Die Ursache dieses - auf den ersten Blick unerwarteten Resultats - ist die ebenfalls mögliche Anregung des magnetischen  $\pi$ -Übergangs ( $|0\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$ ) und wird im Folgenden erörtert.

Ein Qubit im Zustand  $|0\rangle$  kann sowohl in den Zustand  $|1\rangle$  als auch in den Zustand  $|0'\rangle$  angeregt werden. Bei der Detektion erscheinen beide als hell und können somit nicht unterschieden werden. Ein einfaches Modell zur Abschätzung der möglichen unterschiedlichen Anregungswahrscheinlichkeiten basiert auf der unabhängigen Anregung der möglichen Übergänge. Die maximale nicht-resonante Anregung eines Übergangs lässt sich nach Gleichung (6.2.2) zu  $C_{i,j} \approx (\Omega_j/\Delta_{i,j})^2$  abschätzen. Für die beiden unterschiedlichen Möglichkeiten der Anregung folgt nun die Abschätzung

$$C_{i,j} \approx \left( \frac{\Omega_j}{\Delta_{i,j}} \right)^2 + \left( \frac{\Omega_j^{(\pi)}}{\Delta_i^{(\pi)}} \right)^2, \quad (6.4.1)$$

wobei ( $\pi$ ) den zusätzlich möglichen  $\pi$ -Übergang kennzeichnet und die Größe  $\Delta_i^{(\pi)}$  dem Frequenzabstand der Adressierfrequenz  $\omega_i$  von diesem entspricht. Der magnetische  $\pi$ -Übergang ist (in erster Ordnung) magnetfeldunabhängig. In der Folge liegen die Zustände  $|0'\rangle$  für alle Ionen nahezu bei dem gleichen Niveau (vgl. Abbildung 6.5). In den diskutierten Experimenten beträgt der Unterschied der Adressierungsfrequenz von Qubit 1 bei  $\omega_1$  und der Resonanzfrequenz des magnetischen  $\pi$ -Übergangs  $|0\rangle_1 \leftrightarrow |0'\rangle_1$  wegen des homogenen Magnetfelds von 0,390 mT gerade  $\Delta_1^{(\pi)} = -2\pi \times 5,5$  MHz. Der Unterschied der Resonanzfrequenzen von Qubit 1 und 4 beträgt  $\Delta_{1,4} = -2\pi \times 6,3$  MHz und der zwischen den Qubits 1 und 8  $\Delta_{1,8} = -2\pi \times 14,4$  MHz (vgl. auch Tabelle 6.1). Wird nun Qubit 1 adressiert, so ist der gemeinsame  $\pi$ -Übergang für die gewählten Magnetfeldkonfiguration der dominierende Übergang, der nach Gleichung (6.4.1) zu einer Abnahme der Zustandsfidelities der Qubits 4 bis 8 führt. In diesem Szenario verlässt die Besetzungswahrscheinlichkeit die Qubit-Basis und Anregungswahrscheinlichkeit lässt sich nach Gleichung (6.4.1) zu  $10 \times 10^{-5}$  abschätzen, was im Einklang mit den Ergebnissen aus Tabelle 6.3 ist. Für die eng benachbarten Qubits 2 und 3 dominiert hingegen die nicht-resonante Anregung des jeweiligen Qubitübergangs ( $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ ; nicht dargestellt) und der Fehler aus Übersprechen ist entsprechend größer. Somit kann erklärt werden, wieso das Übersprechen von Qubit 1 auf die Qubits 4 bis 8 etwa gleich



**Abbildung 6.5.:** Relevante Übergänge in einem Quantenbyte basierend auf acht gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen in einem statischen Magnetfeldgradienten. Die Niveaus sind nicht maßstabsgetreu. Das Niveau von  $|0'\rangle$  liegt für alle Ionen nahezu gleich und liegt beispielsweise nahe an dem Qubit-Übergang bei  $\omega_1$ .

groß ist. Die zweite Beobachtung, dass das Übersprechen des Qubits 4 auf 8 kleiner ist als das von 1 auf 8 lässt sich ebenfalls leicht erklären. Der Abstand zwischen den Qubitübergängen der Ionen 4 und 8 beträgt in dem Experiment  $\Delta_{4,8} = -2\pi \times 8,2 \text{ MHz}$  (vgl. Tabelle 6.1). Falls Qubit 4 adressiert wird, so ist der Abstand zum magnetischen  $\pi$ -Übergang  $\Delta_4^{(\pi)} = -2\pi \times 11,7 \text{ MHz}$  größer als der zur Resonanz von Qubit 8 und somit ist diese entsprechend der Gleichung (6.4.1) der dominierende Übergang.

## 6.5. Optimierte Quantenregister

Die Periodizität des Übersprechens, wie sie in Abbildung 6.3 (a) zu sehen ist und von Gleichung (6.2.2) vorhergesagt wird, erlaubt die Realisierung von optimierten Quantenregistern, in denen das Übersprechen durch nicht-resonante Anregung idealerweise ganz verschwindet, oder aber zumindest weiter unterdrückt ist. Die grundlegende Idee ist dabei, dass ein Gatter, welches auf einem Qubit ausgeführt wird, die Zustandsvektoren aller anderen nicht-adressierten Qubits um Vielfache von  $2\pi$  dreht und ihr Zustand sich somit effektiv nicht ändert (Modulo einer bekannten globalen Phase durch mögliche Vorzeichenwechsel). Diese Situation kann beispielsweise in einer Kette gespeicherter Ionen erreicht werden, in der die Frequenzabstände aller Nächst-Nachbar-Ionen und die Rabi-Frequenzen jeweils gleich sind ( $\tilde{\Delta} \equiv \Delta_{i,i+1}$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$  und  $\Omega_i \equiv \tilde{\Omega}$ ,  $i = 1, \dots, N$  mit Anzahl der Ionen  $N$ ) und darüber hinaus in einem speziellen Verhältnis zueinander sind ( $\tilde{\Delta} = 2k\tilde{\Omega} : k \in \mathbb{N}$ ). Für weit verstimmte Pulse ( $\tilde{\Delta} \gg \tilde{\Omega}$ ) gilt in guter Näherung für die verallgemeinerte Rabi-Frequenz eines Qubits  $j$

$$\Omega_{R,j} = \sqrt{\tilde{\Omega}_j^2 + \Delta_{i,j}^2} \approx \Delta_{i,j}. \quad (6.5.1)$$

Ein  $\pi$ -Puls, der an Qubit  $i$  adressiert wird, hat die Dauer  $\tau = \pi/\tilde{\Omega}$  und dreht somit den Bloch-Vektor von Qubit  $j$  um den Winkel

$$\theta_j = \Omega_{R,j}\tau \approx 2k\pi : k \in \mathbb{N}. \quad (6.5.2)$$

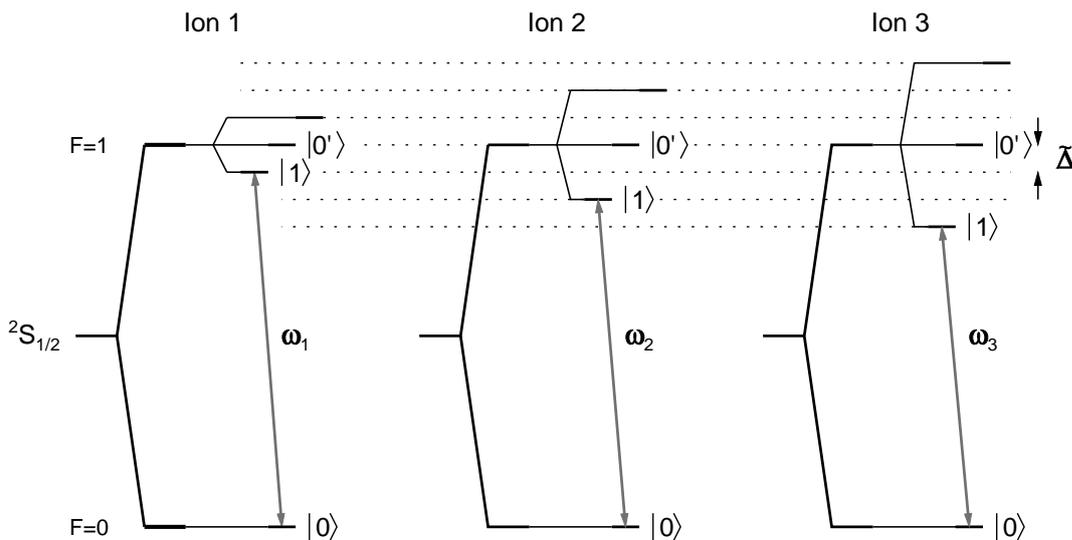
Für die Ausführung eines NOT-Gatters auf dem Qubit  $i$  werden die benachbarten Qubits  $j = i \pm 1$  in einem solchen optimierten Register also um den den effektiv verschwindenden Winkel von  $2k\pi : k \in \mathbb{N}$  gedreht. Für Qubits, die weiter als die Nächst-Nachbarn entfernt sind, beträgt der Frequenzabstand  $m\tilde{\Delta}$  und der resultierende ebenfalls effektiv verschwindende Drehwinkel ist  $\theta_{i\pm m} = m2k\pi$ .

Im Folgenden wird beschrieben wie ein solches optimiertes Register mit drei Ionen realisiert wird. Der konstante Magnetfeldgradient in der Falle führt zu einem identischen Nächst-Nachbar-Abstand der Qubits im Frequenzraum ( $\tilde{\Delta} = \Delta_{1,2} = \Delta_{2,3}$ ). Ein zusätzliches homogenes Magnetfeld von etwa 0,240 mT führt zum gleichen Frequenzabstand

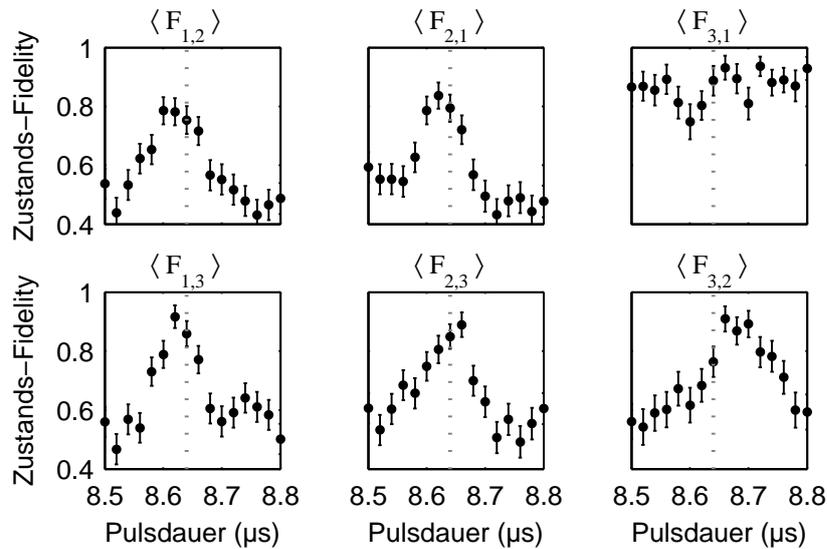
zwischen der Adressierungsfrequenz von Qubit 1 und dem magnetischen  $\pi$ -Übergang  $|0\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$  ( $\tilde{\Delta} = 2\pi \times 3,358(3)$  MHz). Für diese Einstellungen sind somit die magnetischen  $\sigma^\pm$ -Übergänge aller Ionen ein Vielfaches von  $\tilde{\Delta}$  von der Adressierungsfrequenz eines beliebigen Qubits entfernt. Als Qubits werden bei den hier beschriebenen Experimenten die magnetischen  $\sigma^-$ -Übergänge verwendet. Aufgrund des Frequenzgangs der Mikrowellenleistung können somit höhere Rabi-Frequenzen erzielt werden und das Unterdrücken der nicht-resonanten Anregung wird noch besser verdeutlicht.

Zuerst wird die Pulsdauer bestimmt, für welche das Übersprechen effektiv unterdrückt wird. Dieses geschieht erneut durch das oben beschriebene Benchmarking-Protokoll. Die Sequenzlänge beträgt dabei 2000 Pulse und die Pulsdauer wird variiert. Der untersuchte Anfangszustand des Registers ist hier analog zum Quantenbyte der Grundzustand  $|000\rangle$ . Wie in Abbildung 6.7 deutlich wird, führt eine Pulsdauer von  $\tau_{\text{opt}} = 8,64 \mu\text{s}$  dazu, dass die Zustände der nicht-adressierten Qubits sich am wenigsten ändern.

Bei einem Vergleich der Periodizität der Zustandsgüten, je nachdem welches Qubit gerade adressiert wird, fallen Unterschiede auf: Für den Fall, dass das mittlere Qubit 2



**Abbildung 6.6.:** Termschemata zur Realisierung des optimierten Drei-Qubit-Registers. In jedem einzelnen Ion wird ein Qubit realisiert. Durch das harmonische Fallenpotenzial und den homogenen Magnetfeldgradienten beträgt der Unterschied der Adressierungsfrequenzen Vielfache von  $\tilde{\Delta}$ . Der Zustand  $|0'\rangle$  ist für alle Ionen nahezu bei der gleichen Energie zu finden. Das konstante Magnetfeld kann so gewählt werden, dass ebenfalls die Zeeman-Aufspaltung des Niveaus  ${}^2S_{1/2}$ ,  $F = 1$  Vielfache von  $\tilde{\Delta}$  beträgt.



**Abbildung 6.7.:** Bestimmung der optimalen Pulsdauer, die das Übersprechen in einem Drei-Qubit-Register effektiv unterdrückt. Benchmarking-Sequenzen von 2000 Pulsen werden eingestrahlt, wobei jeweils eines der Qubits adressiert wird. Die Pulsdauer wird dabei variiert. Als optimale Pulsdauer ergeben sich  $8,64 \mu\text{s}$  (hervorgehoben durch eine gepunktete Linie), für welche die Zustände der nicht-adressierten Qubits am wenigsten beeinflusst werden. Der mittlere Fehler pro Gatter ist  $13(9) \times 10^{-5}$ , wobei die Rabi-Frequenz  $2\pi \times 57,9 \text{ MHz}$  beträgt. Jeder Datenpunkt entspricht 350 Wiederholungen. Fehlerbalken repräsentieren den statistischen Fehler einer Standardabweichung. Die Tabelle 6.4 enthält eine Zusammenfassung des Übersprechens für das optimierte Quantenregister.

adressiert wird, zeigen die benachbarten Qubits 1 und 3 die gleiche Periodizität ( $\langle F_{2,1} \rangle$  und  $\langle F_{2,3} \rangle$ ). Die gleiche Periodizität ergibt sich auch für den Fall, dass die Qubits 1 bzw. 3 adressiert und die direkten Nachbarn beobachtet werden ( $\langle F_{1,2} \rangle$  bzw.  $\langle F_{3,2} \rangle$ ). Vergleicht man jedoch das Übersprechen von Qubit 1 auf 3 ( $\langle F_{1,3} \rangle$ ) und das von 3 auf 1 ( $\langle F_{3,1} \rangle$ ), so zeigen sich deutliche Unterschiede. Das Übersprechen von Qubit 1 auf 3 ist ähnlich dem auf das nächstbenachbarte Qubit 2. Das Übersprechen von Qubit 3 auf 1 ist hingegen geringer und zeigt eine kürzere Periode. Die Ursache dieser, auf den ersten Blick erneut unerwarteten Asymmetrie, ist wieder der Übergang  $|0\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$ . Die Adressierungsfrequenz von Qubit 1 liegt für die gewählten experimentellen Parameter näher an dieser Resonanz als die Adressierungsfrequenz von Qubit 3. Wird nun das Qubit 1 adressiert, so beträgt die Verstimmung zu diesem Übergang gerade  $\tilde{\Delta}$  und das Ion wird hauptsächlich über den magnetischen  $\pi$ -Übergang angeregt. Wird hingegen das Qubit 3 adressiert, so beträgt die Verstimmung zum magnetischen  $\pi$ -Übergang  $3\tilde{\Delta}$  und die zum Qubitübergang  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  lediglich  $2\tilde{\Delta}$ . Die nicht-resonante Anregung

**Tabelle 6.4.:** Gemessenes Übersprechen  $C_{i,j}$  ( $\times 10^{-5}$ ) in einem optimierten Drei-Qubit-Register bei einer Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 57,9$  MHz. Siehe Text für eine ausführliche Diskussion der Optimierung.

$i \backslash j$	1	2	3
1	-	23(5)	6(1)
2	8(2)	-	10(2)
3	2.7(3)	6(1)	-

des Ions 1 geschieht somit vorwiegend auf seinem Qubit-Übergang. Die Verstimmung ist somit doppelt so groß, wie beim Fall benachbarter Qubits und somit lässt sich zum einen das geringere Übersprechen und zum anderen die kürzere Periode erklären (vgl. Gleichung (6.2.2)).

Die Mikrowellenleistung der Pulse wird nun so gewählt, dass die optimale Pulsdauer  $\tau_{\text{opt}}$  zu einem resonanten  $\pi$ -Puls auf dem adressierten Qubit führt und somit ein NOT-Gatter realisiert ( $\tilde{\Omega} = 2\pi \times 57,9$  kHz). Entsprechend der vorherigen Messungen am Quantenbyte wird das Übersprechen aus nicht-resonanter Anregung mittels des Benchmarking-Protokolls präzise vermessen. Die Sequenzlänge beträgt dabei bis zu 5000 Pulse. Im Vergleich zu der Charakterisierung des Quantenbytes sind für das Drei-Qubit-Register längere Sequenzen möglich. Dieses beruht zum einen auf der geringeren Anzahl an Ionen und zum anderen daran, dass die höhere Rabi-Frequenz zu kürzeren Pulsen führt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.4 zusammengefasst.

Die Rabi-Frequenz, mit der die Qubits manipuliert werden ist etwa dreimal so groß wie bei der Charakterisierung des Quantenbytes. Der Frequenzabstand zwischen den Qubit-Übergängen ist mit 3,36 MHz gut 40% größer als der Abstand der benachbarten äußersten Qubits im Quantenbyte (2,34 MHz). Da das Übersprechen mit dem Quadrat der Rabi-Frequenz (und somit proportional zur Leistung ist) und invers proportional zum Quadrat der Verstimmung skaliert, erwartet man somit in etwa eine Verfünfachung des Übersprechens. Aus Gleichung (6.2.2) folgt für das Nächstnachbar-Übersprechen in dem beschriebenen Drei-Qubit-Register ein mittlerer Fehler pro Puls von  $30 \times 10^{-5}$ . Wie man der Tabelle 6.4 entnehmen kann, ist das tatsächlich gemessene Übersprechen überwiegend deutlich geringer. Somit wird gezeigt, dass auch für schnellere Gatter weiterhin ein Übersprechen unterhalb der Schwelle für Quantenfehlerkorrektur möglich ist. Das deutlich größere Übersprechen  $C_{1,2}$  beruht auf der möglichen Anregung der beiden Übergänge  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  und  $|0\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$  in Qubit 2, zu denen der Puls, der Qubit 1 adressiert, gleich weit verstimmt ist (siehe auch Abbildung 6.6). Nach der einfachen Modellannahme von unabhängigen Anregungswahrscheinlichkeiten (vgl. Gleichung (6.4.1)) führt dieses zu einem Fehler, der etwa doppelt so groß wie beispielsweise

der zwischen den Qubits 2 und 3 ist. Der verbleibende Fehler aus Übersprechen rührt für alle Qubits auch daher, dass die Resonanz  $|0\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$  aufgrund des Zeeman-Effekts zweiter Ordnung für die drei Ionen nicht exakt bei der gleichen Frequenz liegt und somit die Bedingung von äquidistanten Resonanzen im Frequenzraum nicht exakt erfüllt wird. Des Weiteren wird bei dem experimentellen Aufbau eine Drift der Qubit-Übergänge beobachtet [70]. Diese Drift führt dazu, dass die Verstimmung zeitlich variiert und somit die nicht-adressierten Qubits nicht exakt um Vielfache von  $2\pi$  gedreht werden. Darüber hinaus waren die Ionen thermisch ( $\langle n \rangle \approx 150$ ) angeregt und eine Anregung der vorhandenen Bewegungsseitenbändern ist daher ebenfalls möglich [29; 30]. Diese zusätzlichen Übergänge wurden bei der Entwicklung des optimierten Registers nicht explizit berücksichtigt und gehören somit zu den Fehlerquellen. Die beschriebene Methode zur Realisierung von optimierten Quantenregistern kann auf größere Register mit mehr als drei Qubits übertragen werden. Für eine Kette gespeicherter Ionen in einem harmonischen globalen Fallenpotenzial ist ihr Nächst-Nachbar-Abstand nicht konstant. Daher benötigt ein solches System entweder einen sich räumlich ändernden Magnetfeldgradienten, oder aber für einen homogenen Gradienten ein angepasstes Fallenpotenzial. Möglichkeiten wären dabei entweder ein anharmonisches Potenzial, oder lokale Potenziale. Solches kann beispielsweise in segmentierten mikrostrukturierten Ionenfallen realisiert werden [116; 117; 118; 119; 120; 121; 122]. In einem solchen System wäre es möglich, die Adressierungsfrequenzen der Qubits und die Pulsdauern dahingehend zu optimieren, dass der Fehler durch Übersprechen aus nicht-resonanter Anregung minimiert wird.

### 6.6. Mikrowellen-Lichtverschiebung

In den vorherigen Abschnitten wurde der Effekt der nicht-resonanten Anregung diskutiert und experimentell untersucht. Dieser Effekt ändert die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Basiszustände  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  und führt zu unbeabsichtigten Zustandswechselln. Für die Quanteninformationsverarbeitung ist die Phase eines Zustands jedoch von gleicher Relevanz wie die Besetzungen. Aus diesem Grund sind Effekte, die ausschließlich die Phase eines Qubits ändern, ebenso Ursache von unbeabsichtigten Zustandsänderungen und somit Teil des Übersprechens.

Ein solcher Effekt ist die Mikrowellen-Lichtverschiebung, die im Rahmen von Kernspinresonanz als Bloch-Siegert-Verschiebung (transient generalized Bloch-Siegert shift) und in der Atomphysik als AC-Stark-Verschiebung (ac Stark effect) bekannt ist [123; 34]. Wird ein Qubit  $i$  resonant adressiert, so ist dieses Mikrowellenfeld zu den Resonanzen der anderen Qubits  $j \neq i$  in dem Magnetfeldgradienten weit verstimmt ( $\Delta_{ij} \gg \Omega_j$ ). Trotzdem führt dieses für ein Ion  $j$ , das sich in einem Superpositionszustand befindet,

zu einer Änderung seiner Präzessionsgeschwindigkeit um [34]

$$\omega_j^{(\text{ac})} = \frac{\Omega_j^2}{2\Delta_{ij}}. \quad (6.6.1)$$

Somit sammelt es während einer Pulsdauer  $\tau$  eine zusätzliche Phase

$$\Delta\varphi_j = \omega_j^{(\text{ac})} \tau \quad (6.6.2)$$

auf. Diese Phasenänderung entspricht einer Zustandsänderung und reduziert die Fidelity (vgl. Abschnitt 4.7). Bei der vorherigen Untersuchung des Übersprechens anhand von Superpositionszuständen (vgl. Abschnitt 6.3) wurde diese Phasenänderung durch einen Spin-Echo-Puls kompensiert. In dem Folgenden soll der Effekt nun für typische experimentelle Parameter genau vermessen werden.

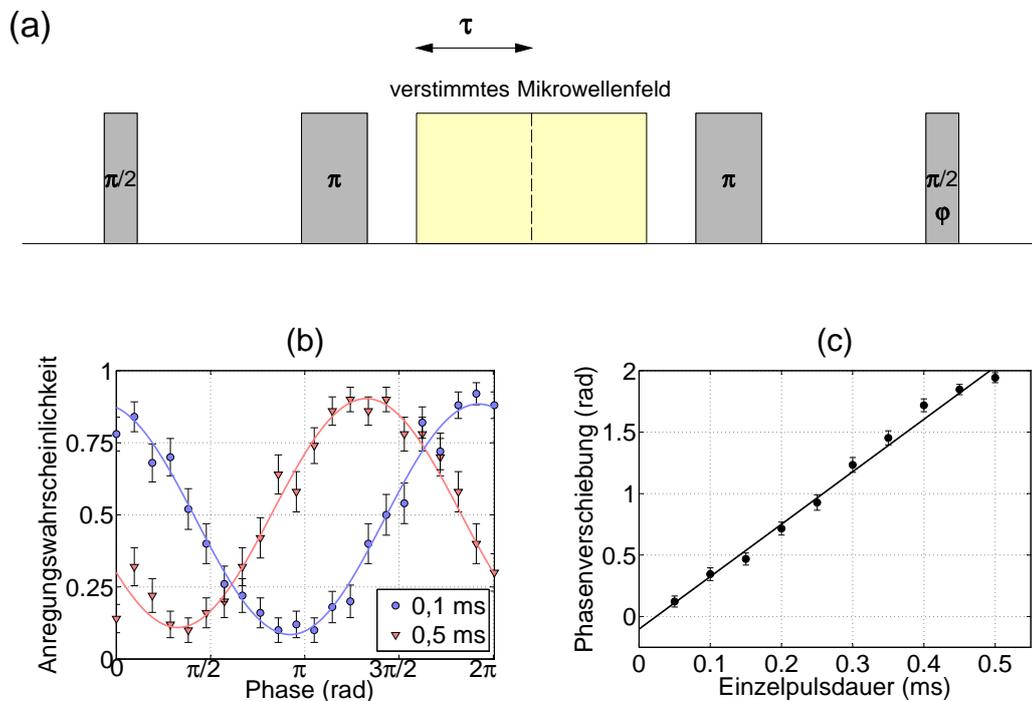
Nimmt man eine Verstimmung von  $2\pi \times 2$  MHz und eine Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 50$  kHz an, so ergibt sich mit Gleichung (6.6.1) eine Stärke von  $\omega^{(\text{ac})} = 2\pi \times 625$  Hz. Eine Methode mit der solch ein, im Vergleich zur Rabi-Frequenz schwacher, Effekt gemessen werden kann, ist ähnlich der Messung von Kopplungskonstanten der Einzelionen-Quanten-Lock-In-Verstärker [94] (vgl. Abschnitt 4.8). In der Abbildung 6.8 (a) ist die Messmethode für die Verwendung eines einzelnen Qubits dargestellt. Zuerst wird es in dem Zustand  $|0\rangle$  initialisiert und anschließend mit einem resonanten  $\pi/2$ -Puls in Superposition gebracht. Anschließend folgt eine CPMG-Pulssequenz (vgl. Abschnitt 7.1.4) mit zwei resonanten  $\pi$ -Pulsen, um störendes Rauschen zu unterdrücken (siehe auch Kapitel 7). Zwischen den beiden dynamischen Entkopplungspulsen kann für eine variable Dauer ein nicht-resonantes Mikrowellenfeld mit gegebener Verstimmung und Leistung eingestrahlt werden. Dieses Feld führt aufgrund der Mikrowellen-Lichtverschiebung zu einer Phasenänderung des Qubits. Da die Präsenz des Feldes vor bzw. nach einem Entkopplungspuls unterschiedlich ist, wird die Phasenänderung während der Sequenz kohärent aufsummiert, anstatt sie zu kompensieren. Am Ende der Sequenz wird die Phase des Qubits mit einem zweiten Ramsey-Puls und der Beobachtung von Interferenzstreifen bestimmt (vgl. Abschnitt 4.6).

Als Qubit dient für diese Messungen der in erster Ordnung magnetfeldunabhängige magnetische  $\pi$ -Übergang  $|0\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$  (siehe Abschnitt 2.2) und das Auslesen geschieht mit dem Photomultiplier. In Abbildung 6.8 (b) sind beispielhafte Ramsey-Streifen dargestellt. Für beide Streifen betrug die Verstimmung des Mikrowellenfeldes  $2\pi \times 2$  MHz und die Leistung entsprach einer Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 48,8$  kHz. Die einen Streifen wurden nach einer Einzelpulsdauer von  $\tau = 0,1$  ms und die anderen nach  $\tau = 0,5$  ms aufgezeichnet. Wie man ersehen kann, führt die Mikrowellen-Lichtverschiebung zu einer Phasenverschiebung von mehr als  $\pi/2$ . In der Abbildung 6.8 (c) ist der Betrag der Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Einzelpulsdauer dargestellt. Da die Leistung und die Verstimmung des Pulses gleich bleiben, ist die Mikrowellen-Lichtverschiebung konstant und die Phasenänderung verhält sich daher proportional zur Pulsdauer.

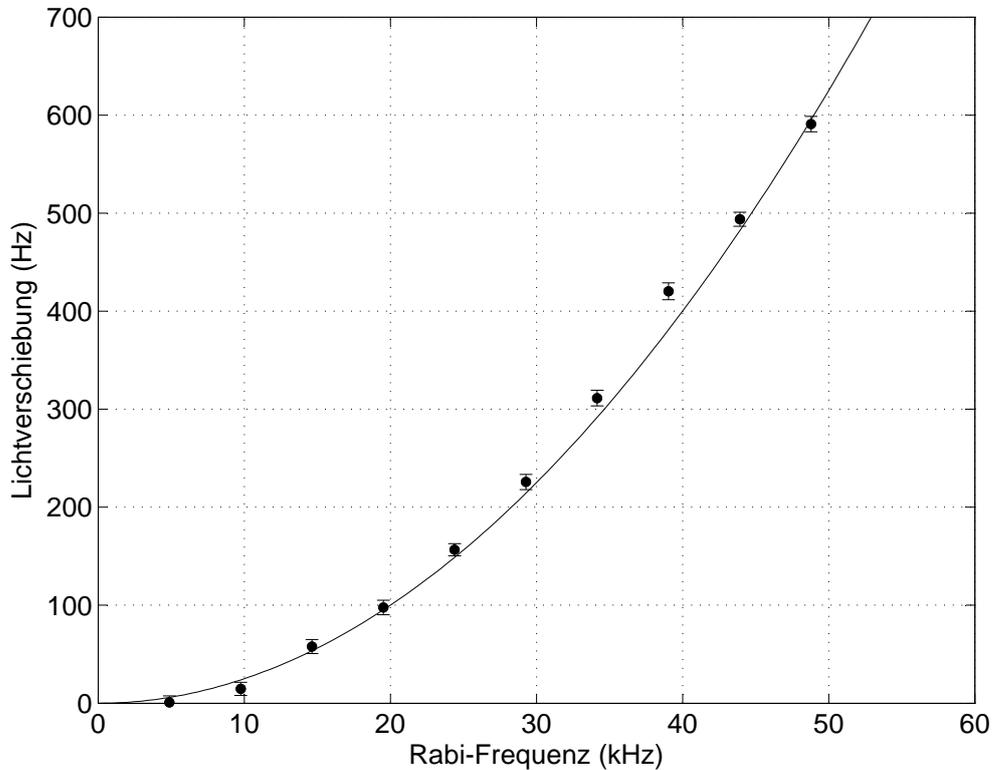
## 6. Adressierung mit Mikrowellenstrahlung

Entsprechend der Gleichung (6.6.2) ergibt die Anpassung einer Geraden an die Datenpunkte die Stärke der Lichtverschiebung zu  $\omega^{(ac)} = 680(20)$  Hz für die Verstimmung von  $2\pi \times 2$  MHz und die Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 48,8$  kHz.

Darüber hinaus wurde die Stärke der Mikrowellen-Lichtverschiebung in Abhängigkeit von der Leistung und der Verstimmung gemessen. Bei diesen Messungen wurde das Feld für eine Einzelpulsdauer von  $\tau = 0,5$  ms eingestrahlt und die anderen Parameter entsprechend variiert. Aus der Phasenverschiebung lässt sich danach die Stärke des Effekts bestimmen. In der Abbildung 6.9 ist die Stärke der Mikrowellen-Lichtverschiebung in Abhängigkeit von der Rabi-Frequenz des verstimmtten Feldes dargestellt. Die Verstimmung betrug hierbei  $2\pi \times 2$  MHz. Die durchgezogene Linie entspricht der Vorhersage aus Gleichung (6.6.1). Für die Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 20$  kHz, wie sie für das



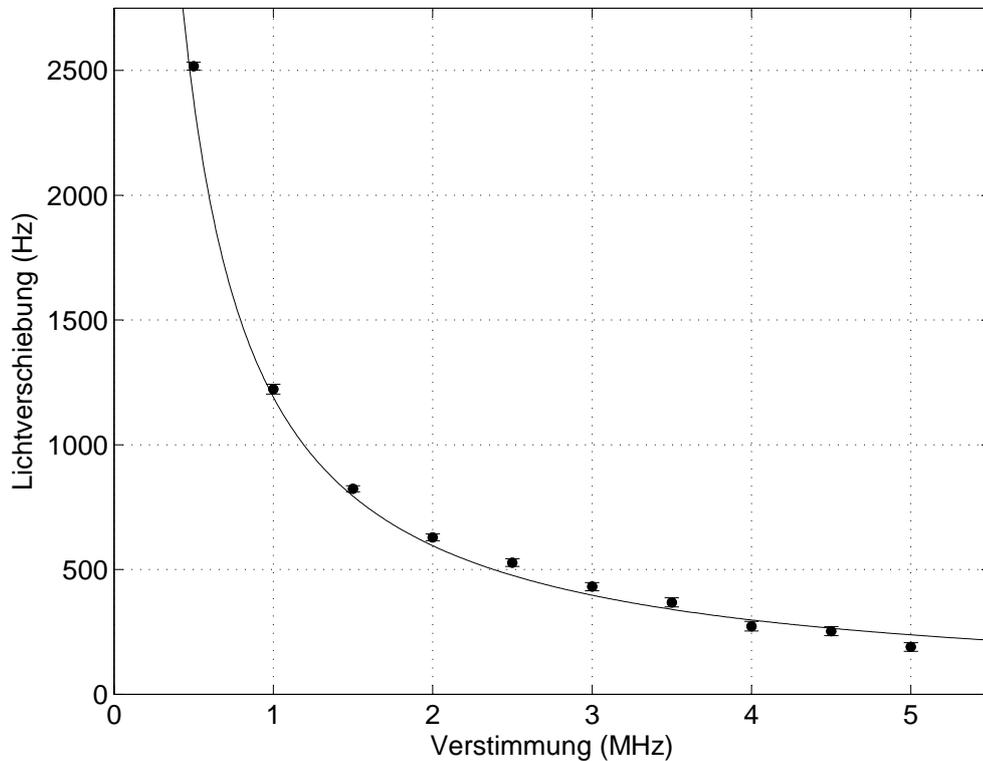
**Abbildung 6.8.:** Messmethode der Mikrowellen-Lichtverschiebung mit einem Ion. Die verwendete Pulssequenz (a) beruht auf einer Ramsey-Messung während der zwei dynamische Entkopplungspulse resonant eingestrahlt werden. Zwischen den Pulsen wird ein Mikrowellenfeld mit einer beliebigen Verstimmung und Leistung für eine variable Dauer eingestrahlt. Aufgrund der resultierenden Lichtverschiebung ändert das Qubit die Phase des Superpositionszustands. Die beobachteten Interferenzstreifen (b) zeigen somit eine Phasenverschiebung abhängig von der Dauer des verstimmtten Pulses (c).



**Abbildung 6.9.:** Die gemessene Mikrowellen-Lichtverschiebung in Abhängigkeit von der Rabi-Frequenz des verstimmtten Feldes. Die Verstimmung beträgt  $2\pi \times 2$  MHz. Jeder Datenpunkt ergibt sich aus der Phasenverschiebung nach zwei Pulsen mit einer Dauer von je 0,5 ms. Die durchgezogene Linie entspricht der theoretischen Vorhersage.

Quantenbyte benutzt wurde, ergibt sich eine Stärke der Mikrowellen-Lichtverschiebung von etwa  $2\pi \times 100$  Hz.

Die Abbildung 6.10 enthält die Ergebnisse für die Messung der Mikrowellen-Lichtverschiebung in Abhängigkeit von der Verstimmung des Feldes. Auch bei diesen Messungen betrug die Einzelpulsdauer  $\tau = 0,5$  ms. Die Mikrowellenleistung entsprach einer Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 48,8$  kHz. Bei der durchgezogenen Linie handelt es sich erneut um die theoretische Vorhersage. Man kann erkennen, wie die Lichtverschiebung mit steigender Verstimmung abfällt. Für die typischen Abstände des optimierten Drei-Qubit-Re-



**Abbildung 6.10.:** Die gemessene Mikrowellen-Lichtverschiebung in Abhängigkeit von der Verstimmung des Feldes. Die Leistung des Feldes entspricht einer Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 48,8$  kHz. Jeder Datenpunkt ergibt sich aus der Phasenverschiebung nach zwei Pulsen mit einer Dauer von je 0,5 ms. Die durchgezogene Linie entspricht der theoretischen Vorhersage.

gisters ( $\tilde{\Delta}/(2\pi) = 3,358$  MHz) beträgt sie für die gegebene Leistung weniger als 450 Hz.

Nachdem die Gültigkeit der theoretischen Vorhersage der Mikrowellen-Lichtverschiebung in Abhängigkeit von den experimentellen Pulsparametern wie der Leistung und der Verstimmung (vgl. Gleichung (6.6.1)) überprüft wurden, soll nun die hieraus resultierende Zustandsänderung abgeschätzt werden. Ein verstimmter Puls der Dauer  $\tau$  führt aufgrund der Lichtverschiebung zu einer Phasenänderung von  $\delta\varphi = \omega^{(ac)}\tau$ . Die

Fidelity (vgl. Abschnitt 4.7) des Zustands reduziert sich somit um

$$\epsilon_{(\text{ac})} = 1 - F = 1 - \frac{1}{2} (1 + \cos(\delta\varphi^{(\text{ac})})) \approx \left( \frac{\delta\varphi^{(\text{ac})}}{2} \right)^2, \quad (6.6.3)$$

wobei die Näherung für kleine Winkel ( $\delta\varphi^{(\text{ac})} \ll 1$ ) verwendet wurde. Im Falle des Quantenbytes, in dem die Rabi-Frequenz  $2\pi \times 20$  kHz betrug, ergibt sich für einen  $\pi$ -Puls eine Pulsdauer von  $\tau = 25$   $\mu\text{s}$ . Mit dem typischen Frequenzabstand von etwa 2 MHz, folgt eine Stärke der Lichtverschiebung von  $2\pi \times 98(6)$  Hz und somit ein Fehler von  $\epsilon^{(\text{ac})} = 5,9(7) \times 10^{-5}$ . Dieser Fehler ist von gleicher Größenordnung wie der Fehler, der aus nicht-resonanter Anregung herrührt (vgl. Abschnitt 6.4).

## 6.7. Zusammenfassung der Fehlerquellen und Ausblick

Im Folgenden werden die unterschiedlichen Fehlerquellen, die zu Übersprechen führen können, in der Tabelle 6.5 zusammengefasst. Für jede dieser Quellen werden für den verwendeten Aufbau typische Werte angegeben und die Abhängigkeit von den experimentellen Parametern diskutiert.

Der erste Effekt ist die nicht-resonante Anregung  $C$ , die mit der Gleichung (6.2.2) beschrieben wird. Sie ist abhängig von der Verstimmung und der Leistung eines Pulses. Die Verstimmung  $\Delta = b\delta z$  hängt vom Magnetfeldgradienten  $b$  und der räumlichen Trennung der Ionen ab. In einem harmonischen Potenzial hängt die räumliche Trennung  $\delta z$  von der Säkularfrequenz  $\nu_1$  ab und es gilt  $\delta z \propto \nu_1^{-2/3}$  [62]. Somit ist  $C \propto \Omega^2 b^{-2} \nu_1^{4/3}$ . Für ein Quantenbyte wurde dieser Effekt gemessen und der mittlere Fehler für zwei benachbarte Qubits beträgt hierbei (vgl. Tabelle 6.2)  $C = 3,8(13) \times 10^{-5}$ .

Im Gegensatz zu Energieeigenzuständen werden Superpositionszustände auch von einer Phasenänderung effektiv beeinflusst. Eine solche resultiert von der Mikrowellen-Lichtverschiebung, die in dem vorhergehenden Abschnitt gemessen wurde. Die Phasenänderung  $\delta\varphi_{(\text{ac})} = \frac{\Omega^2}{2\Delta}\tau$  (vgl. Gl. (6.6.1)) ist abhängig von der Pulsdauer, die invers proportional zur Rabi-Frequenz ist. Die sich ergebende Änderung der Fidelity beträgt somit  $\epsilon_{(\text{ac})} \propto \Omega^2 b^{-2} \nu_1^{4/3}$  (vgl. auch Gl. (6.6.3)) und wurde in dem vorherigen Abschnitt für die typischen experimentellen Parameter des Quantenbytes (Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 20$  kHz und Verstimmung von  $2\pi \times 2$  MHz) zu  $5,9(7) \times 10^{-5}$  abgeschätzt.

Ein weitere Effekt, der die Phase eines Qubits ändert, ist die vom Magnetfeldgradienten induzierte J-Kopplung. Wird ein Qubit in einem Register adressiert, so entwickeln sich die anderen Qubits entsprechend des Hamilton-Operators in Gleichung (2.5.18). Dieses entspricht einer Phasenänderung von  $\delta\varphi_{i,j}^{(j)} = J_{i,j}\tau$ , wobei  $J_{i,j}$  der Kopplungsstärke zwischen den Qubits  $i$  und  $j$  entspricht. Diese verhält sich wie  $J \propto b^2 \nu_1^{-2}$  (vgl. Gleichung (2.5.19)). Der hervorgerufene Fehler skaliert somit wie  $\epsilon_J \propto b^4 \nu_1^{-4} \Omega^{-2}$ . Für

den Fall eines Drei-Qubit-Quantenregisters beträgt die Nächstnachbar-Kopplung in unserem Aufbau  $2\pi \times 33(3)$  Hz [29] (vgl. auch Kapitel 8) und der zu erwartende Fehler ist daher  $4,3(8) \times 10^{-6}$ .

Im Folgenden werden nun Strategien vorgestellt, wie Fehler aus Übersprechen (vgl. auch Tabelle 6.5) reduziert bzw. vermieden werden können. Übersprechen, welches aus nicht-resonanter Anregung herrührt, kann durch einen stärkeren Magnetfeldgradienten  $b$  reduziert werden. Eine andere bzw. zusätzliche Möglichkeit den Fehler zu reduzieren ist, die Leistung der Mikrowellenpulse, welche die logischen Ein-Qubit-Gatter realisieren, abzuschwächen. In der Literatur spricht man dann von sogenannten weichen Pulsen (soft pulses) im Gegensatz zu harten Pulsen (hard pulses) [34]. Die Abschwächung der Mikrowellenleistung würde auch den Fehler  $\epsilon_{ac}$  durch Lichtverschiebung reduzieren, der Superpositionszustände betrifft. Eine Abschwächung der Mikrowellenleistung würde jedoch den Fehler aus einer Frequenzverstimmung auf dem adressierten Qubit erhöhen (vgl. Abschnitt 2.6.2). Ein kleineres axiales Fallenpotenzial  $\nu_1$  würde die Effekte aus nicht-resonanter Anregung und Mikrowellen-Lichtverschiebung reduzieren, jedoch skaliert der Fehler jeweils nur mit  $\nu_1^{4/3}$ . Der Fehler  $\epsilon_J$ , der durch unbeabsichtigte J-Kopplungen herrührt, würde bei einer Abschwächung der Mikrowellenleistung ansteigen, da die Kopplung während der längeren Pulsdauern auch länger wirken könnte. Ein geringeres

**Tabelle 6.5.:** Zusammenfassung der unterschiedlichen Quellen von Übersprechen. Nicht-resonante Anregung, die Mikrowellen-Lichtverschiebung und die J-Kopplung führen während der Ausführung von Ein-Qubit-Gattern zu Fehlern. Die Mikrowellen-Lichtverschiebung und die J-Kopplung beeinflussen hierbei jedoch ausschließlich Superpositionszustände. Die Größe des Fehlers aus nicht-resonanter Anregung  $C$  ist der Mittelwert für benachbarte Qubits innerhalb des Quantenbytes. Für eine Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 20$  kHz und einer Verstimmung von  $2\pi \times 2$  MHz folgt eine Mikrowellen-Lichtverschiebung von  $2\pi \times 98(6)$  Hz. Die Änderung, welche durch die J-Kopplung hervorgerufen wird, entspricht dem Fall eines Drei-Qubit-Registers in einem Gradienten von  $b = 18,8$  Tm $^{-1}$  und einer axialen Fallenfrequenz von  $\nu_1 = 2\pi \times 123,5(2)$  kHz [29; 56] und kann als Abschätzung einer oberen Grenze angesehen werden. Die rechte Spalte zeigt, wie dieser Fehler von der Rabi-Frequenz  $\Omega$  eines Rechteckpulses, dem axialen Fallenpotenzial  $\nu_1$  und dem Magnetfeldgradienten  $b$  abhängt.

Fehlerquelle	Messwert	Abhängigkeit
nicht-resonante Anregung	$C = 3,8(13) \times 10^{-5}$	$\Omega^2 b^{-2} \nu_1^{4/3}$
Mikrowellen-Lichtverschiebung	$\epsilon_{(ac)} = 5,9(7) \times 10^{-5}$	$\Omega^2 b^{-2} \nu_1^{4/3}$
J-Kopplung	$\epsilon_{(J)} = 4,3(8) \times 10^{-6}$	$\Omega^{-2} b^4 \nu_1^{-4}$

axiales Fallenpotenzial oder ein größerer Magnetfeldgradient würde die Kopplungsstärke erhöhen und somit auch das Übersprechen. Somit ist es nicht möglich alle drei Effekte gleichzeitig zu unterdrücken.

Eine weitere Fehlerquelle ist die mögliche Anregung von Bewegungsseitenbändern. Für die zuvor beschriebenen Experimente beträgt die axiale Fallenfrequenz  $\nu_1 = 2\pi \times 124$  kHz und die Bewegungsseitenbänder erster Ordnung der Schwerpunktsmode werden  $\pm\nu_1$  entfernt vom Träger beobachtet [30; 66]. Die Rabi-Frequenz bei Anregung des roten bzw. blauen Seitenbandes ist entsprechend den Gleichungen (2.5.16) und (2.5.13)  $\Omega_{n,n-1} = \eta_{\text{eff}}\sqrt{n}\Omega$  bzw.  $\Omega_{n,n+1} = \eta_{\text{eff}}\sqrt{n+1}\Omega$  mit der Besetzungszahl der axialen Schwingungsmode  $n$ . Die obigen Messungen werden mit thermisch angeregten Ionen durchgeführt und die mittlere Besetzungszahl des thermischen Zustands beträgt  $\langle n \rangle \approx 150$  [29; 30]. Die Rabi-Frequenzen der beiden Seitenbänder sind für diese thermische Anregung vergleichbar und mit dem effektiven Lamb-Dicke-Parameter von  $\eta_{\text{eff}} = 0,034$  folgt  $\Omega_{\text{RSB}} \approx \Omega_{\text{BSB}} \approx 0,42\Omega$ . Die Abschätzung des Einflusses der Seitenbänder erfolgt unter der Annahme von unabhängigen Anregungen (vgl. Gleichung 6.4.1). Da die Verstimmung des Pulses von dem Träger deutlich größer als der Abstand der Seitenbänder ist, wird für die Abschätzung davon ausgegangen, dass die Verstimmung zu diesen in etwa gleich ist. Da die nicht-resonante Anregung proportional zum Quadrat der Rabi-Frequenz ist, entspricht die Anregungswahrscheinlichkeit der Bewegungsseitenbänder in etwa 20% der des Trägers. Mittels Seitenbandkühlung (vgl. Abschnitt 4.1) [30; 66] kann die thermische Anregung und somit dieser Effekt weiter verringert werden, jedoch wird die nicht-resonante Anregung weiterhin von der Anregung des Trägers dominiert.

Ein anderer Ansatz, um den Fehler aus nicht-resonanter Anregung zu reduzieren, ist die Verwendung von unterschiedlichen Pulsformen. Ein gaußförmiger Puls ist im Frequenzraum deutlich schmaler als die verwendeten Rechteckpulse und somit könnte das Übersprechen weiter reduziert werden. Darüber hinaus sind auch Pulse mit einem komplizierteren Profil denkbar [124].

Eine weitere Methode, Fehler aus Übersprechen zu vermeiden, ist eine präzise Kenntnis dessen. Sobald die störenden systematische Effekte, die ein einzelner Puls bei allen nicht-adressierten Qubits hervorruft, einmal bekannt sind, können diese bei der Entwicklung von Pulssequenzen entweder kompensiert oder explizit berücksichtigt werden [125]. So ist es beispielsweise möglich, den Effekt aus der Lichtverschiebung mittels eines resonanten Spin-Echo Pulses zu kompensieren, wie es bei den hier diskutierten Messungen geschehen ist. Außerdem kann in der Realisierung eines Quantenalgorithmus die systematische Drehung um die  $z$ -Achse bei der Phasenwahl von darauffolgenden Pulsen explizit berücksichtigt werden, um die Drehung aus der Mikrowellen-Lichtverschiebung rückgängig zu machen [102]. Die Anregung von ungewollten Hyperfeinübergängen kann entweder durch ein stärkeres homogenes Magnetfeld oder durch eine Polarisation der Mikrowellenstrahlung unterdrückt werden.

In den beschriebenen Messungen wird das Übersprechen, welches durch die Anwendung eines  $\pi$ -Pulses hervorgerufen wird, charakterisiert. Für  $\pi/2$ -Pulse, welche zusammen mit den  $\pi$ -Pulsen und der Identität die Clifford-Gruppe für ein Qubit erzeugen [89], sind die Mechanismen, die zu Übersprechen führen, die gleichen. Die Pulsdauer ist zwar halbiert, aber die resultierenden Fehler sind weiterhin von gleicher Größenordnung und der gleichen Abhängigkeit von den experimentellen Parametern.

Ein Zwei-Qubit-Gatter, das zur Verschränkung benutzt werden kann und zusammen mit beliebigen Ein-Qubit-Operationen jeden beliebigen Algorithmus erlaubt, besteht in dem Aufbau aus der Einstrahlung von zwei  $\pi/2$ -Pulsen und einer bedingten Entwicklungszeit [29; 70]. Die nicht-adressierten Qubits eines Quantenregisters würden daher hauptsächlich von den Einzel-Qubit-Gattern beeinflusst. Der Fehler aufgrund ungewollter J-Kopplung während der Entwicklung kann mittels ausgewählter Ankopplung (selective recoupling) [126] und somit mittels Ein-Qubit-Operationen kompensiert werden (vgl. auch Abschnitt 7.1.5). Das Übersprechen eines solchen Gatters wäre somit auch wieder von der gleichen Größenordnung wie die detailliert untersuchten Ein-Qubit-Gatter.

## 6.8. Güte eines Ein-Qubit-Gatters

Neben der Charakterisierung des Übersprechens erlauben die Messungen des Übersprechens unter Verwendung des Benchmarking-Protokoll auch Rückschlüsse auf die Fidelity eines Ein-Qubit-Gatters. Jeder Pulsfehler führt dazu, dass sich im Bild der Bloch-Kugel der Zustandsvektor des adressierten Qubits sich nach einem Puls nicht exakt dort befindet, wo er im Falle eines perfekten Pulses wäre. Da die Phasen der Pulse und somit die Drehachsen zufällig gewählt werden, ist auch die Richtung der Abweichung zufällig. Somit folgt für die mittlere Fidelity der Zusammenhang

$$\langle F_i^{(\text{Gatter})}(N) \rangle = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\epsilon^{(\text{Gatter})}N}), \quad (6.8.1)$$

wobei  $\epsilon^{(\text{Gatter})}$  in diesem Fall den Pulsfehler beschreibt. Für den Abfall der Fidelity nach 250 Pulsen ergibt sich für den mittleren Fehler pro Gatter eine untere Grenze von  $5 \times 10^{-3}$ . Im Moment ist die Güte der Gatter vor allem durch die Drift der Adressierungsfrequenzen begrenzt. Eine mögliche Verbesserung wäre die Verwendung von robusten Pulsen [127; 128; 43]. Diese sind jedoch langsamer und durch die Verwendung unterschiedlicher Phasenlagen innerhalb eines Pulses kann sich der Fehler durch Übersprechen stärker aufaddieren. Die systematische Untersuchung wäre ein weiteres eigenständiges Forschungsvorhaben. Durch technische Verbesserungen an dem experimentellen Aufbau, wie beispielsweise einer thermischen Stabilisierung der Mikrowellenkette, scheinen in Zukunft Gatter mit einer Güte von mehr als 0,995 möglich, wie sie

für die Verwendung von Mikrowellenpulsen berichtet wurden [25; 26]

# 7

## Dynamische Entkopplung von Quantensystemen

Die Dephasierung - also der Verlust von Phaseninformation eines Superpositionszustands - ist ein bedeutendes Hindernis auf dem Weg zur Realisierung von quantenlogischen Operationen mit hoher Güte. Die Ursache ist die, dass in vielen physikalischen Systemen, in denen sich Quantengatter prinzipiell realisieren lassen, die Phaseninformation des Systems mit der Zeit verlorenght. Die Zeitskala dieses Zerfalls von Quanteninformation, die in einem Register von Qubits gespeichert und verarbeitet werden kann, wird dabei als Kohärenzzeit bezeichnet. Ist die Kohärenzzeit eines Systems also vergleichbar oder gar kürzer als die für die Ausführung der Quantengatter notwendige Dauer, so wird die Güte des Gatters stark reduziert oder eine Realisierung verhindert. Von besonderem Interesse sind hierbei die Ein-Qubit-Gatter (vgl. Abschnitt 2.1.2) und ein bedingtes Zwei-Qubit-Gatter (CNOT, siehe Abschnitt 2.1.3), denn aus diesen lassen sich beliebige Quantenalgorithmen zusammensetzen [129].

Da die Dephasierung auf einer unbeabsichtigten Wechselwirkung der Qubits mit ihrer Umgebung beruht, ist es erstrebenswert das Quantenregister während des Ausführens von Gatteroperationen von seiner Umgebung zu isolieren. Eine Möglichkeit hierfür ist die sogenannte dynamische Entkopplung (dynamical decoupling). Hierfür gibt es zwei unterschiedliche Ansätze. Der eine beruht auf Sequenzen von Pulsen, die auf das Quantensystem einwirken, und der andere beruht auf kontinuierlich wirkenden Feldern. Beide Methoden werden aktuell intensiv im Rahmen der experimentellen Realisierung von Techniken zur Quanteninformationsverarbeitung an gespeicherten Ionen erprobt

---

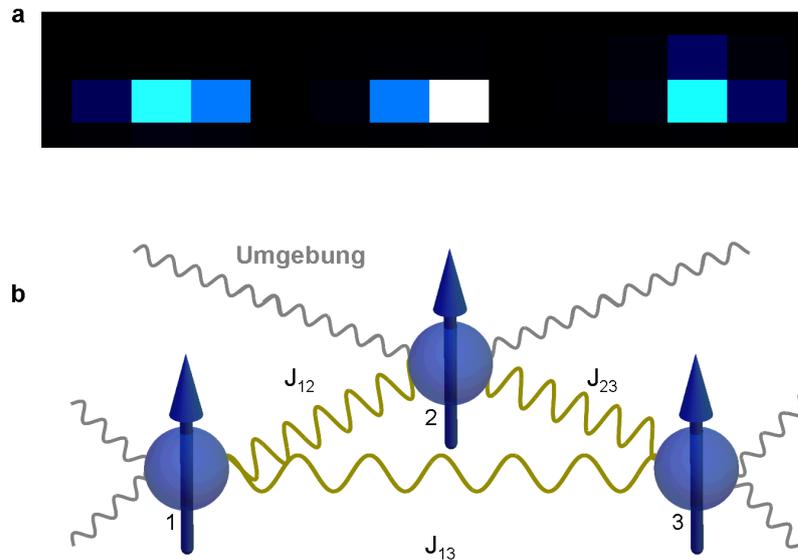
[130; 131; 70; 31]. Der Rest dieses Kapitels behandelt den ersten Ansatz, der auf Pulssequenzen basiert.

Die dynamische Entkopplung mittels Pulsen wurden ursprünglich im Kontext von Kernspinresonanz beobachtet [132] und weiterentwickelt [133; 134]. Dort dienten diese Techniken zur hochaufgelösten Magnetresonanzspektroskopie. Im Forschungsfeld der Quanteninformationsverarbeitung wurde später untersucht, wie die Dephasierung eines Qubits, die zu einem Verlust der Information führt, mittels dynamischen Entkopplungspulsen unterdrückt werden kann [135]. Anschließend wurden weitere neuartige Pulssequenzen vorgeschlagen, die in einer bestimmten Umgebung optimal sind [136] oder aber eine hohe Toleranz gegenüber Pulsfehlern aufweisen [137]. Ziel ist es hierbei, die in einem Register gespeicherte Quanteninformation während des Ausführens von Gatteroperationen vor einer Dephasierung zu schützen und so fehlertolerante Quanteninformationsverarbeitung zu realisieren [138].

Experimentell wurde die Leistungsfähigkeit von Pulssequenzen, den Zustand eines Einzelqubits zu schützen, in unterschiedlichen physikalischen Systemen erfolgreich demonstriert. Dieses entspricht der Realisierung eines Ein-Qubit-Quantenspeichers. Bei den untersuchten physikalischen Systemen handelt es sich beispielsweise um Systeme basierend auf Kernspinresonanzen in Festkörpern [139; 140; 141] bzw. NV-Zentren in Diamant [142] oder Quantendots [143]. Darüber hinaus wurde auch ein Ensemble aus gespeicherten Ionen [130] und Einzelionen verwendet [131]. Zusätzlich zur Realisierung von Ein-Qubit-Quantenspeichern wurden ebenfalls experimentelle Schritte unternommen, den verschränkten Zustand eines Zwei-Qubit-Systems zu speichern [144; 145]. Neben der Realisierung von Quantenspeichern wurde ebenfalls gezeigt, wie Ein-Qubit-Gatter mit Hilfe von dynamischen Entkopplungspulsen auch dann realisiert werden können, wenn die Dauer eines Gatter länger als die Kohärenzzeit des Systems ist [146].

Neben Ein-Qubit-Gattern wurden auch bedingte Zwei-Qubit-Gatter mittels dynamischer Entkopplungspulse stabilisiert. Hierbei handelt es sich um ein Hybridsystem, in dem die beiden Qubits in unterschiedlichen Spins realisiert sind und unterschiedlich schnell dephasieren [147]. Dabei war es ausreichend die Kohärenzzeit lediglich eines der Qubits zu verlängern. In einem System aus zwei Quantendots wurde die Güte eines Verschränkungsgatters mittels eines einfachen Spin-Echo-Pulses stabilisiert [148]. Darüber hinaus wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein Verschränkungsgatter zwischen zwei gespeicherten Ionen mittels dynamischen Entkopplungspulsen stabilisiert [70]. Dieses stellt, zusammen mit den beiden vorher genannten Experimenten, die erste gezielte Anwendung von dynamischen Entkopplungspulsen auf eine bedingte Dynamik in einem Zwei-Qubit-System dar.

In dem folgenden Kapitel sollen nun die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Experimente, die eine dynamische Entkopplung von Qubits betreffen, vorgestellt und diskutiert werden. Bei dem verwendeten physikalischen System handelt es sich um



**Abbildung 7.1.:** Übersicht der dephasierenden gekoppelten Qubits. (a) Das physikalische System besteht beispielsweise aus drei gespeicherten und lasergekühlten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen, deren zustandsabhängiges Resonanzfluoreszenzlicht beobachtet werden kann. (b) Die einzelnen Qubits können aufgrund der vom Magnetfeldgradienten induzierten Kopplungen ( $J_{12}$ ,  $J_{23}$  und  $J_{13}$ ) miteinander wechselwirken. Neben dieser Wechselwirkung koppeln die Qubits ebenfalls an die Umgebung, was zur Dephasierung führt. Ziel der dynamischen Entkopplung ist es nun, das System der untereinander gekoppelten Qubits effektiv von der Umgebung zu isolieren.

bis zu drei lasergekühlte  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen, die mit einer linearen Paul-Falle in einem Magnetfeldgradienten gespeichert sind (siehe die Abschnitte 2.5 und 4.1). Die Abbildung 7.1 enthält hierzu eine schematische Darstellung.

In der Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands jedes Ions ist ein einzelnes Qubit realisiert (siehe Abschnitt 2.2) und die Zustände sind  $|0\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  sowie  $|1\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 1\rangle$ . Fluktuationen des Magnetfelds, das ein jedes Ion erfährt, führen zu einer unkontrollierten und unbeabsichtigten Wechselwirkung mit der Umgebung, die, wie im nächsten Abschnitt erläutert, zu einer Dephasierung führt. Die Kohärenzzeit hierfür beträgt  $200(100)\ \mu\text{s}$ . Der lineare Zeeman-Effekt erlaubt es die Ionen innerhalb des Magnetfeldgradienten mit Mikrowellenpulsen im Frequenzraum einzeln zu manipulieren (vgl. Abschnitt 2.5). Aus den typischen experimentellen Parametern (ein Magnetfeldgradient von etwa  $19\ \text{Tm}^{-1}$  und einer axialen Fallenfrequenz von  $124\ \text{kHz}$ ) folgt eine Frequenzaufspaltung der einzelnen Qubitübergänge von mehreren

---

Megahertz. Die maximale Rabi-Frequenz, mit der jedes Qubit manipuliert und somit ein Ein-Qubit-Gatter realisiert werden kann, beträgt für den verwendeten Mikrowellenaufbau typischerweise 50 kHz. Somit lassen sich die einzelnen Qubits mit einem sehr geringen Übersprechen auf der Größenordnung von  $10^{-5}$  adressieren (vgl. [112] und Kapitel 6). Für ein NOT-Gatter beträgt dann die notwendige Pulsdauer  $10\ \mu\text{s}$ , was wesentlich kürzer als die Dekohärenzzeit ist. Aus diesem Grund sind die realisierten Quantenregister während der Ausführung einzelner Ein-Qubit-Gatter nur wenig von einer Dephasierung betroffen. Anders verhält es sich mit einem bedingten Zwei-Qubit-Gatter. Die Gatterzeit ist hierbei abhängig von der vom Magnetfeldgradienten induzierten J-Kopplung (siehe Abschnitt 2.5) zwischen den beiden Qubits. Für die experimentellen Parameter (siehe oben) beträgt diese für ein Zwei-Qubit-System aus zwei gespeicherten Ionen  $J_{12} = 2\pi \times 52(8)\ \text{Hz}$  und für ein Drei-Qubit-System aus drei Ionen gilt experimentell  $J_{12} = 2\pi \times 32(4)\ \text{Hz}$ ,  $J_{23} = 2\pi \times 33(3)\ \text{Hz}$  und  $J_{13} = 2\pi \times 18(2)\ \text{Hz}$  [29]. Die Kopplungsstärken von wenigen zehn Hertz führen nun zu Gatterdauern eines CNOT-Gatters von einigen Millisekunden (siehe Abschnitt 2.1.3). Dieses ist um mindestens eine Größenordnung länger als die Kohärenzzeit eines Qubits. Daher verhindert die Dephasierung eine Realisierung von Zwei- und Mehr-Qubit-Gattern in den verwendeten Quantenregistern.

Bevor nun in dem Abschnitt 7.3.4 demonstriert wird, wie mittels der Anwendung von dynamischen Entkopplungspulsen trotzdem ein CNOT-Gatter realisiert werden kann, werden in dem nächsten Abschnitt die theoretischen Grundlagen der dynamischen Entkopplung mittels Pulsen dargelegt. In dem Abschnitt 7.2 wird dann zuerst die experimentelle Realisierung von Ein-Qubit-Quantenspeichern basierend auf dynamischen Entkopplungspulsen präsentiert. Die möglichen Speicherzeiten überragen die Kohärenzzeit dabei um bis zu drei Größenordnungen. Ein besonderes Augenmerk ruht dabei auf möglichen Pulsfehlern der Entkopplungspulse und wie diese die Leistungsfähigkeit von Pulssequenzen beeinträchtigen können. Darüber hinaus wird eine neuartige Pulssequenz vorgestellt, die eine hohe Fehlertoleranz aufweist. In dem Abschnitt 7.3 wird dann gezeigt, wie Sequenzen von dynamischen Entkopplungspulsen es erlauben, die innere Dynamik in einem gekoppelten Zwei- und Drei-Qubit-System zu stabilisieren. Dabei wird die Leistungsfähigkeit unterschiedlicher Pulssequenzen verglichen und es wird untersucht, wie mögliche Pulsfehler die Dynamik des Systems beeinträchtigen können. Die experimentellen Resultate hierzu wurden in [70] publiziert und stellen die erste gezielte experimentelle Untersuchung der Wechselwirkung von fehlerbehafteten Pulssequenzen und einer bedingten Zwei-Qubit-Dynamik dar. Diese Ergebnisse haben darüber hinaus auch weitere theoretische Untersuchungen einer anderen Arbeitsgruppe angeregt [149]. Ebenfalls gehören diese Experimente zusammen mit [147; 148] zu den ersten Realisierungen einer mittels dynamischer Entkopplung stabilisierten bedingten Zwei-Qubit-Dynamik überhaupt. Danach werden die Erkenntnisse auf ein Drei-Qubit-System angewandt. Diese Ergebnisse sind neben anderen in [150] publiziert und bilden

die Grundlage der effektiven Ausführung eines Quantenalgorithmus, der in Kapitel 9 vorgestellt wird.

Wie man anhand der Literatur zur dynamischen Entkopplung ersehen kann, ist diese Technik in unterschiedlichen physikalischen Systemen anwendbar. Der Grund hierfür ist, dass es sich bei dynamischen Entkopplungspulsen um logische Operationen (NOT-Gatter) handelt, die auf die Qubits angewandt werden. Kann also in einem physikalischen System ein Qubit kodiert und kontrolliert werden, so ist dann auch immer eine dynamische Entkopplung möglich. Aus diesem Grund sind auch alle experimentellen Ergebnisse dieses Kapitels nicht nur auf gespeicherte Ionen, sondern auch auf andere physikalische Systeme anwendbar.

### 7.1. Theoretische Grundlagen

Der folgende Abschnitt enthält die notwendigen theoretischen Grundlagen, die für das Verständnis der durchgeführten Experimente notwendig sind. Er beginnt mit der Vorstellung der Dekohärenz bzw. der Dephasierung eines einzelnen Qubits. Danach wird eine erste Maßnahme gegen die Dephasierung vorgestellt - der Spin-Echo-Puls. Basierend auf diesem wird die Wirkungsweise einer Sequenz von Pulsen auf die Dephasierung eines Qubits erörtert, bevor unterschiedliche Pulssequenzen zur dynamischen Entkopplung vorgestellt werden. Am Ende dieser theoretischen Einführung wird die Wirkung der dynamischen Entkopplungspulse auf ein Mehr-Qubit-System diskutiert. Im Besonderen wird hier der mögliche Einfluss von Pulsen auf die von der J-Kopplung zwischen den Qubits hervorgerufenen Dynamik diskutiert.

#### 7.1.1. Dekohärenz

Der Effekt von Dekohärenz kann am einfachsten anhand der Zeitentwicklung eines einzelnen Qubits, das sich zum Zeitpunkt  $T_0$  in dem Superpositionszustand

$$|\psi\rangle = (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) \quad (7.1.1)$$

befindet, diskutiert werden. Hierbei sind  $c_0$  und  $c_1$  komplexe Zahlen, für welche die Normalisierungsbedingung  $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$  gilt.

Es gibt allgemein zwei unterschiedliche Arten der Dekohärenz. Zum einen die sogenannte longitudinale Energierelaxation und zum anderen die transversale Dephasierung [151]. Der erste Prozess führt zu einer zufälligen Änderung der Besetzungswahrscheinlichkeiten  $|c_0|$  und  $|c_1|$ . Die Zeitskala, auf der ein Qubit seine Information durch Energierelaxation verliert, wird in der Literatur longitudinale Relaxationszeit  $T_1$  genannt. In dem vorhandenen experimentellen Aufbau wurden in der Abwesenheit von Mikrowellenstrahlung oder Laserlicht keine Änderungen der Zustandsbesetzungen beobachtet und

die realisierten Qubits haben daher für alle experimentellen Belange eine unendliche longitudinale Relaxationszeit ( $T_1 \rightarrow \infty$ ). Anders verhält es sich mit der transversalen Dephasierung. Diese führt dazu, dass die relative Phaseninformation eines Superpositionszustands aufgrund der Wechselwirkung mit der Umgebung verändert wird. Für die Mittelung über viele Messsequenzen (vgl. Abschnitt 4.2) und eine zufällige oder unbekannte Wechselwirkung führt dies zu einem Verlust der Phaseninformation. Die Ursache dieser Dephasierung sind Fluktuationen des Magnetfeldes am Ort des Ions, in welchem ein Qubit realisiert ist. Beschrieben werden kann dieses für ein einzelnes Qubit in einem semi-klassischen Bild durch einen zusätzlichen Hamilton-Operator [152; 151; 153]

$$H_{\text{Deph}} = \frac{\hbar}{2} \xi(t) \sigma_z \quad (7.1.2)$$

in Gleichung (2.5.1). In diesem bezeichnet  $\sigma_z$  die Pauli-Matrix und  $\xi(t)$  eine klassische Zufallsvariable, welche die Fluktuation der Energieaufspaltung des Qubits aufgrund von Magnetfeldfluktuationen beschreibt. Die Änderung der Energieaufspaltung in Abhängigkeit von den Magnetfeldfluktuationen ergibt sich dabei aus der Breit-Rabi-Formel (2.5.2).

Die Zeitentwicklung des Superpositionszustands (7.1.1) in einem mit der ungestörten Energieaufspaltung rotierenden Bezugssystem (vgl. Abschnitt 2.5.3) ergibt sich aus

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{\text{Deph}}(t') dt'} \quad (7.1.3)$$

und entspricht einer (stochastischen) Drehung um die z-Achse (vgl. Gleichung (2.1.8)). In der Konsequenz sammelt der Zustand eine zusätzliche Phase

$$\phi_{\text{error}}(t, t_0) = -\frac{i}{2} \int_{t_0}^t \xi(t') dt' \quad (7.1.4)$$

auf. Der zeitabhängige Superpositionszustand folgt aus

$$|\psi\rangle(t, t_0) = U(t, t_0) |\psi\rangle(t_0) \quad (7.1.5)$$

zu

$$|\psi\rangle(t, t_0) = (e^{+\phi_{\text{error}}(t, t_0)} c_0 |0\rangle + e^{-\phi_{\text{error}}(t, t_0)} c_1 |1\rangle), \quad (7.1.6)$$

was der Dichtematrix

$$\rho(t, t_0) = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* e^{+2\phi_{\text{error}}(t, t_0)} \\ c_0^* c_1 e^{-2\phi_{\text{error}}(t, t_0)} & |c_1|^2 \end{pmatrix} \quad (7.1.7)$$

entspricht. Sind die Fluktuationen zufällig bzw. nicht mit der Messequenz synchronisiert, so ergibt sich für jede Einzelmessung eine unterschiedliche zusätzliche Phase  $\phi_{\text{error}}$  und die Mittelung führt zu einem effektiven Verlust der Phaseninformation. Ist der Zustand also beispielsweise im Bild der Bloch-Kugel (vgl. Abschnitt 2.1.1) entlang der  $y$ -Achse präpariert, dann folgt für die Kohärenz dieses Zustands [151]

$$W(t) = \overline{\langle \sigma_y \rangle(t)} = e^{-\chi(t)}, \quad (7.1.8)$$

wobei  $\langle \sigma_y \rangle(t)$  den zeitabhängigen Erwartungswert der Observablen  $\sigma_y$  beschreibt und der Überstrich bezeichnet die Mittelung über ein Ensemble aus mehreren Messungen. Für die Dichtematrix eines beliebigen Zustands (vgl. (7.1.1)) folgt

$$\bar{\rho}(t, t_0) = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* W(t) \\ c_0^* c_1 W(t) & |c_1|^2 \end{pmatrix}. \quad (7.1.9)$$

Der Verlust der Phaseninformation aufgrund der Dephasierung wird vollständig durch die zeitabhängige Funktion  $W(t)$  beschrieben. Phänomenologisch wird für diese häufig ein exponentieller Zerfall ( $W(t) = e^{-t/T_2^*}$ ) angenommen [17]. Die Zeitskala der Dephasierung wird als transversale Relaxationszeit  $T_2^*$  bezeichnet<sup>1</sup>.

### 7.1.2. Spin-Echo-Puls

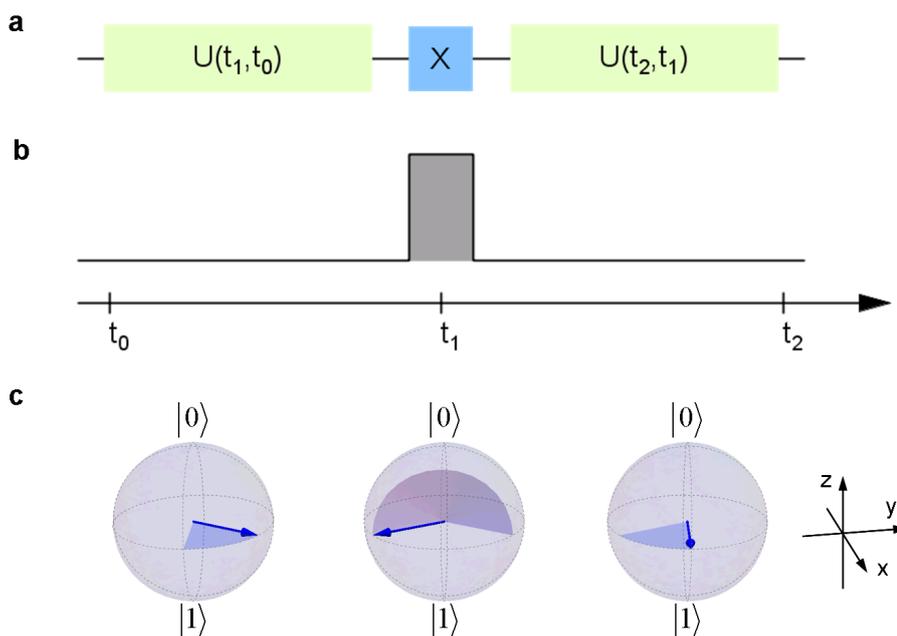
Nach der Einführung, wie vorhandene Magnetfeldfluktuationen in dem vorhandenen experimentellen Aufbau zu einer Dephasierung führen, soll nun eine mögliche Gegenmaßnahme präsentiert werden. Hierbei handelt es sich um den Spin-Echo-Puls, dessen Entwicklungsgeschichte kurz umrissen werden soll. Im Jahre 1950 beobachtete Erwin Hahn an einem Ensemble von Protonspins in Glycerin nach Anwendung einer Sequenz von Radiofrequenzpulsen ein Echosignal der Magnetisierung [132]. Das historische Experiment bestand aus der Anwendung von zwei  $\pi/2$ -Pulsen (vgl. Abschnitt 2.6) und einer Wartedauer  $\tau_0$  zwischen diesen Pulsen. Das Echo-Signal (auch Hahn-Echo genannt) konnte dann  $\tau_0$  nach dem zweiten Puls registriert werden. Die Ursache dieses Echos konnte anhand der Bloch-Kugel-Darstellung erklärt werden. Später entwickelten Carr und Purcell die Pulssequenz weiter und verwendeten als zweiten Puls einen  $\pi$ -Puls.

Heute bildet dieser sogenannte Spin-Echo-Puls den Grundbaustein der dynamischen Entkopplung mittels Pulssequenzen, wie sie im Abschnitt 7.1.4 vorgestellt werden. Zur Vereinfachung soll zuerst der Fall eines einzelnen Qubits betrachtet werden, bevor im Abschnitt 7.1.5 die Diskussion auf gekoppelte Mehr-Qubit-Systeme erweitert wird. Der Spin-Echo-Puls besteht aus der Anwendung eines logischen NOT-Gatters (vgl.

---

<sup>1</sup>Die Zeit  $T_2$  bezeichnet die Kohärenzzeit bei Anwendung eines Spin-Echo-Pulses.

Abschnitt 2.1.2) auf ein Qubit zwischen zwei Wartezeiten, in denen es sich frei und gegebenenfalls unter dem Einfluss von Fluktuationen gemäß des Hamilton-Operators (7.1.2) entwickelt. Die Darstellung in Form einer Quantenschaltung (quantum circuit diagram) ist in der Abbildung 7.2 (a) zu finden. Die Realisierung in Form eines resonanten  $\pi$ -Pulses (vgl. Abschnitt 2.6) zwischen den beiden Wartezeiten findet sich in der Teilabbildung (b). In der Teilabbildung (c) ist die Dynamik des Qubits im Bild der Bloch-Kugel dargestellt.



**Abbildung 7.2.:** Schematik der Spin-Echo-Sequenz. In der Darstellung einer Quantenschaltung (a) besteht die Sequenz aus zwei freien Entwicklungen  $U$  und einem NOT-Gatter  $X$  zwischen diesen beiden. Realisiert wird diese Sequenz durch einen resonanten  $\pi$ -Puls (b) und Wartezeiten. In der Blochkugeldarstellung (c) entspricht die Dynamik unterschiedlichen Drehungen. Nach der Präparation des Zustandsvektors beispielsweise entlang der  $x$ -Achse, rotiert er um die  $z$ -Achse. Die Geschwindigkeit dieser Präzession entspricht dabei der Fluktuation. Der  $\pi$ -Puls dreht den Zustandsvektor um die  $x$ -Achse und kehrt die Phasenänderung um. Während der zweiten Wartedauer präzediert der Zustandsvektor weiter. Ist die Fluktuation auf der Zeitskala der Wartedauern konstant und sind die beiden Wartedauern identisch, so befindet sich der Zustand am Ende der Sequenz nun wieder in seinem Anfangszustand. Der Einfluss der Magnetfeldfluktuationen ist damit kompensiert worden.

Die Zeitentwicklung eines Qubits unter dieser einfachsten Pulssequenz ergibt sich

aus denen der freien Entwicklung  $U(t_1, t_0)$  und  $U(t_2, t_1)$  (vgl. auch Gleichung (7.1.3)) und der des NOT-Gatters  $X$ , welches (bis auf eine Phase) durch einen resonanten  $\pi$ -Puls (vgl. Abschnitt 2.6) realisiert werden kann

$$U_{SE} = U(t_2, t_1) X U(t_1, t_0) \quad (7.1.10)$$

$$= e^{-\frac{i}{2} \int_{t_1}^{t_2} \xi(t) \sigma_z dt} i \sigma_x e^{-\frac{i}{2} \int_{t_0}^{t_1} \xi(t) \sigma_z dt} \quad (7.1.11)$$

$$= e^{-\frac{i}{2} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \xi(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \xi(t) dt \right] \sigma_z} i \sigma_x. \quad (7.1.12)$$

Hier wurde die Eigenschaften der Pauli-Matrizen (siehe Kapitel H) und die Gleichung (I.1.8) angewandt. Ein Vertauschen des Operators, der die freie Entwicklung des Qubits beschreibt, und der Pauli-x-Matrix führt somit zu einem Vorzeichenwechsel im Exponenten. Physikalisch entspricht dies einer Umkehrung der Drehrichtung. Für einen Spin-Echo-Puls sind die Zeitintervalle vor und nach dem Puls jeweils gleich lang ( $t_2 - t_1 = t_1 - t_0$ ). Ist darüber hinaus  $\xi(t)$  nicht zeitabhängig<sup>2</sup>, so wird ihr Einfluss vollständig von dem Spin-Echo-Puls kompensiert. Die resultierende Zeitentwicklung des Qubits entspricht dann lediglich der des Pulses.

$$U_{SE} \approx i \sigma_x. \quad (7.1.13)$$

Ist die Fluktuation zeitabhängig, so ergibt sich im Allgemeinen immer noch eine Kompensation, falls die Wartezeiten kurz auf der Zeitskala der zeitlichen Änderung von  $\xi(t)$  sind. Für jedes Einzelexperiment verschwindet somit die zusätzliche Phase  $\phi_{\text{error}}$  und bei der Mittelung über das Ensemble aus Einzelexperimenten (vgl. (7.1.8)) führt dies dazu, dass die Kohärenzen nicht länger mit der Zeit zerfallen.

### 7.1.3. Sequenzen von dynamischen Entkopplungspulsen

In dem vorherigen Abschnitt wurde die mögliche Kompensation des Effekts von Magnetfeldfluktuationen, die auf ein Qubit wirken, mittels eines einzelnen Spin-Echo-Pulses vorgestellt. Hierbei ergab sich eine effektive Kompensation der Störung für den Fall, dass sie während einer Messsequenz zeitlich konstant ist oder sich nur langsam ändert. Die letzte Bedingung stellt hiermit eine Grenze der Dauer dar, während der ein Qubit vor Dephasierung geschützt werden kann. Soll diese Dauer verlängert werden, so finden Sequenzen von dynamischen Entkopplungspulsen Anwendung. Bei diesen Sequenzen handelt es sich um mehrere resonante  $\pi$ -Pulse, die im Allgemeinen von unterschiedlichen Wartedauern unterbrochen sind. Zur Beschreibung einer solchen Sequenz wird

<sup>2</sup>Hierbei kann es sich auch um eine Verstimmung des antreibenden Mikrowellenfeldes während einer Messsequenz handeln. In dem rotierenden Bezugssystem führt dieses zu einer Drehung mit der Verstimmung um die z-Achse, was der gleichen Zeitentwicklung entspricht.

davon ausgegangen, dass  $N$  Pulse während einer Gesamtdauer von  $T$  zu den Zeitpunkten  $\alpha_1 T, \alpha_2 T, \dots, \alpha_N T$  angewandt werden. Hierbei bezeichnet  $\alpha_i : i = 1 \dots N$  den relativen Zeitpunkt, zu dem der  $i$ -te Puls während der Gesamtdauer  $T$  ausgeführt wird ( $\alpha_i \in [0,1]$ ). Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass die Pulse infinitesimal kurz sind. In dem vorherigen Abschnitt wurde erläutert, dass ein einzelner  $\pi$ -Puls die Drehrichtung des Qubits umkehrt bzw. das Vorzeichen im Exponenten des Zeitentwicklungsoperators ändert (siehe Anhang I). Die Beiträge zu der zusätzlichen Phase  $\phi_{\text{error}}$ , die während einer Messsequenz durch Fluktuationen aufgesammelt wird, ändern somit nach jedem dynamischen Entkopplungspuls ihr Vorzeichen und es gilt [131]

$$\phi_{\text{error}} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \xi(t) dt. \quad (7.1.14)$$

Die relativen Zeitpunkte  $\alpha_0$  und  $\alpha_{n+1}$  bezeichnen hierbei den Anfang der ersten bzw. das Ende der letzten freien Entwicklungsdauer. Für den Fall, dass die Fluktuationen  $\xi(t)$  während einer Messsequenz durch ein Polynom

$$\xi(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_{n-1} t(N-1) \quad (7.1.15)$$

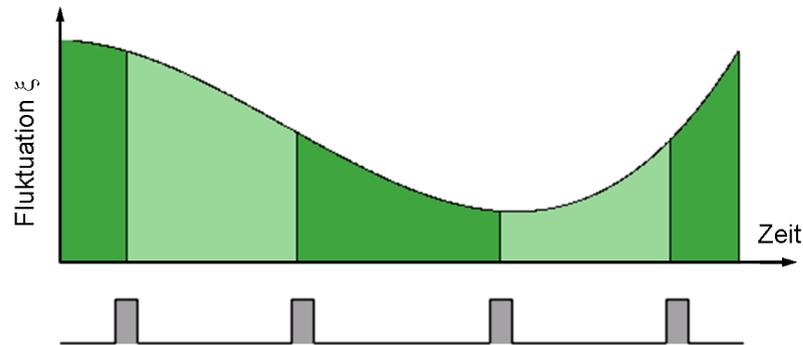
vom Grad  $N-1$  beschrieben werden kann, verschwindet die zusätzliche Phase, falls die Pulse zu den relativen Zeitpunkten

$$\alpha_i = \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{i}{n+1} \right) \quad (7.1.16)$$

ausgeführt werden [131]. Somit kann eine Sequenz aus  $N$  Pulsen eine Fluktuation in Form eines beliebigen Polynoms vom Grad  $N-1$  vollständig kompensieren und eine Dephasierung verhindern, was in der Abbildung 7.3 illustriert ist. In der Praxis lassen sich die Fluktuationen jedoch nur unzureichend durch ein Polynom annähern. Die obige Motivation nach [131] wurde lediglich aufgrund ihrer Anschaulichkeit gewählt. Die Gleichung (7.1.16) definiert die sogenannte UDD-Sequenz (Uhrig dynamical decoupling; benannt nach G. S. Uhrig), die basierend auf einem anderen analytischen Ansatz entdeckt worden ist [136].

Eine andere Betrachtungsweise, die einen tieferen Einblick in die Wirkungsweise einer Sequenz von dynamischen Entkopplungspulsen gewährt, ist die Interpretation der Pulssequenz als Filterfunktion [152; 151]. Hierbei wird die Fluktuation  $\xi(t)$  nicht länger im Zeitbereich, sondern im Spektralbereich betrachtet. Die Rauschleistungsdichte  $S_\xi(\omega)$  entspricht dabei der Fourier-Transformation der Korrelationen, welche den stochastischen Prozess der Fluktuationen beschreiben [152]. Für den Zerfall der Kohärenzen (vgl. Gleichung (7.1.8)) folgt dann [151]

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{S_\xi(\omega)}{\omega^2} F(\omega t) d\omega, \quad (7.1.17)$$



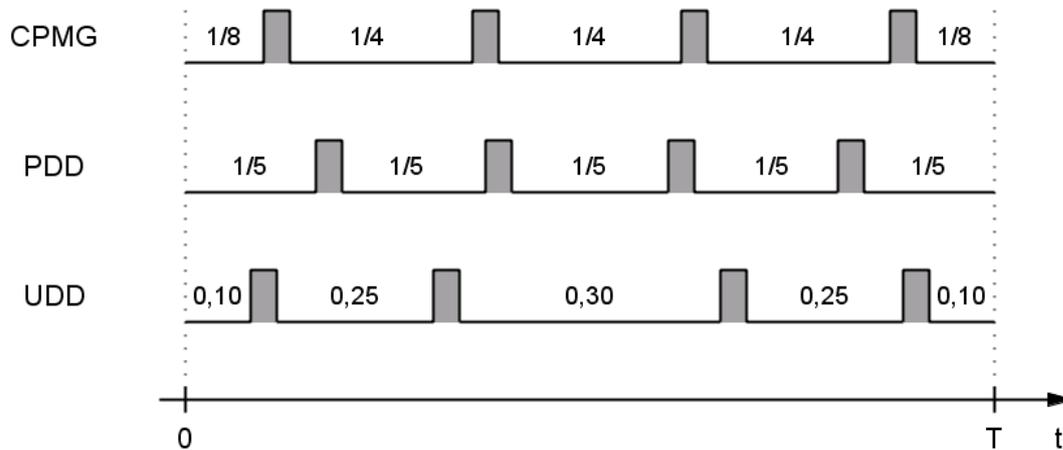
**Abbildung 7.3.:** Wirkungsweise der UDD-Sequenz. Die Störung wird beschrieben durch ein Polynom dritter Ordnung und die Sequenz hat vier Pulse. Die resultierende Phase  $\phi_{\text{error}}$  entspricht der Fläche unter dem Polynom. Jeder Puls ändert das Vorzeichen der unterschiedlichen Beiträge (unterschiedliche Grüntöne), die sich gegenseitig aufheben.

wobei  $F(\omega t)$  die Filterfunktion der verwendeten Pulssequenz bezeichnet. Analytische Ausdrücke für die Filterfunktionen von den im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Pulssequenzen finden sich beispielsweise in [152] und [151] und sind im Anhang K zusammengefasst.

Ist die Rauschleistungsdichte  $S_{\xi}(\omega)$  bekannt, dann lässt sich mittels der Gleichung (K.0.1) der Zerfall der Kohärenzen vorhersagen oder aber die Pulssequenz und damit die Filterfunktion optimieren [130]. Im Gegenzug erlaubt eine experimentelle Bestimmung des Zerfalls der Kohärenz die Charakterisierung der Rauschleistungsdichte [154; 155; 156]. Dabei wird der Umstand ausgenutzt, dass die Filterfunktion einer gegebenen Pulssequenz einige Rauschkomponenten besser als andere unterdrückt. Die beobachtete Dephasierung wird somit von den Komponenten, die weniger gut unterdrückt werden, dominiert und erlaubt somit Rückschlüsse auf deren Stärke. Anwendung findet dieser Ansatz ebenso in einem Einzelion-Quanten-Lock-In-Verstärker [94]. Bei diesem werden Pulssequenzen benutzt, die sehr empfindlich auf Fluktuationen bei Harmonischen einer bestimmten Frequenz  $\omega$  sind. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein solcher Einzelion-Quanten-Lock-In-Verstärker im Abschnitt 6.6 benutzt, um die Stärke der Mikrowellen-Lichtverschiebung zu messen.

#### 7.1.4. Verschiedene Pulssequenzen zur dynamischen Entkopplung

Wie in dem vorherigen Abschnitt erläutert, entspricht eine verwendete Pulssequenz einer Filterfunktion, die das Umgebungsrauschen, welches ein Qubit erfährt, unter-



**Abbildung 7.4.:** Pulstaktung dreier unterschiedlicher Sequenzen. Während einer Gesamtsequenzdauer  $T$  werden jeweils vier Entkopplungspulse verwendet. Die Dauer zwischen den Pulsen ist jeweils als Bruchteil der Gesamtdauer angegeben. Die CPMG-Sequenz entspricht einer Wiederholung der Spin-Echo-Sequenz. Die PDD-Sequenz hingegen zeichnet sich durch konstante Wartedauern aus. Die Taktung der UDD-Sequenz folgt aus der Gleichung (7.1.16).

drücken kann. Hierbei ist es die Pulstaktung, also die Zeitpunkte zu denen die Pulse ausgeführt werden, welche die Filterfunktion definiert. Die Phase der einzelnen Pulse und somit die Drehachsen im Bild der Bloch-Kugel haben hierbei keinen Einfluss auf die Rauschunterdrückung, so lange sie in der  $xy$ -Ebene liegen. Mathematisch lässt sich dieser Sachverhalt dadurch motivieren, dass weder  $\sigma_x$  noch  $\sigma_y$  mit der Zeitentwicklung der Fluktuationen (vgl. Gleichung 7.1.3) kommutieren. Für eine etwas detailliertere Rechnung soll hier auf den Anhang I verwiesen werden. Somit gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Sequenzen, die im Rahmen der dynamischen Entkopplung Verwendung finden können. Diese sind dabei entweder auf das vorhandene Rauschen hin optimiert, oder aus anderen praktischen Gründen vorteilhaft, da sie beispielsweise robust gegenüber Pulsfehlern sind. Die Auswahl einer geeigneten Sequenz kann somit ein umfangreiches Forschungsvorhaben darstellen, was im weiteren Verlauf dieses Kapitels dargelegt werden soll.

An dieser Stelle sollen nun die untersuchten Sequenzen vorgestellt werden. Sie lassen sich anhand der Pulstaktung und der relativen Phasen der einzelnen Pulse ordnen. Die erste Einteilung soll anhand der Taktung erfolgen und ist in der Abbildung 7.4 dargestellt. Insgesamt wurden drei unterschiedliche Pulstaktungen untersucht. Die erste ist

die der CPMG-Sequenz (benannt nach Herman Y. Carr, Edward M. Purcell, S. Meiboom und D. Gill) [133; 134], wobei es sich um Wiederholungen von Spin-Echo-Pulsen handelt. In einer formalen Schreibweise lässt sich diese Sequenz mit  $N$  Pulsen, wobei  $N$  gerade sei, und einer Gesamtsequenzdauer von  $T$  darstellen als

$$[\tau X \tau]^N = [\tau X \tau \tau X \tau]^{N/2}. \quad (7.1.18)$$

Hier entspricht  $\tau$  der Zeitentwicklung während einer Wartedauer  $\tau_0^{\text{CPMG}} = T/(2N)$  und  $X$  der eines Entkopplungspulses. Die Filterfunktion dieser Sequenz kann Harmonische von

$$\omega_0^{\text{CPMG}} = \frac{\pi}{2\tau_0^{\text{CPMG}}} \quad (7.1.19)$$

nicht unterdrücken [154]. Eine beobachtete Dephasierung erlaubt Rückschlüsse auf die Stärke dieser Rauschkomponenten.

Eine andere Taktung ist die einer sogenannten PDD-Sequenz (periodic dynamical decoupling). Sie entspricht konstanten Wartedauern zwischen zwei Pulsen und den gleichen Dauern auch am Anfang und am Ende der Sequenz. Formal lässt sich eine solche Sequenz mit  $N$  Pulsen und einer Gesamtdauer  $T$  darstellen als

$$[\tau X]^N \tau = [\tau X \tau X]^{N/2} \tau. \quad (7.1.20)$$

Bei dieser Sequenz sind es Harmonische der Frequenz

$$\omega_0^{\text{PDD}} = \frac{\pi}{\tau_0^{\text{PDD}}} \quad (7.1.21)$$

mit  $\tau_0^{\text{PDD}} = T/(N + 1)$ , die von der resultierenden Filterfunktion nicht unterdrückt werden können [94].

Die dritte untersuchte Taktung ist die der UDD-Sequenz. Bei dieser ergibt sich der Zeitpunkt, zu dem ein Puls ausgeführt wird aus der Gleichung (7.1.16).

Ein Spezialfall einer Pulssequenz ist das sogenannte Spin-Lock [34]. Bei diesem wird kontinuierlich ein Feld eingestrahlt, ohne dass es Wartedauern gibt. Man kann es somit als Grenzfall einer Pulssequenz mit unendlich vielen Pulsen und somit infinitesimal kurzen Wartezeiten zwischen den Pulsen auffassen.

Für jedes Pulstiming können die relativen Phasen der Einzelpulse frei gewählt werden, denn wie oben erwähnt haben sie keinen Einfluss auf die Filterfunktion und somit auf die Unterdrückung des Rauschens. Jedoch können mögliche Fehler der einzelnen Pulse den Zustand des Qubits unkontrolliert beeinflussen und zu einer Dekohärenz führen. Somit können Sequenzen, die sich lediglich in der Wahl der Phasen unterscheiden, zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. In den Abschnitten 7.2.2 und 7.3.2 wird dieser

Aspekt anhand eines Ein-Qubit-Zustands und einer bedingten Zwei-Qubit-Dynamik experimentell untersucht. Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Phasenlagen, die auf jeder der drei Timings angewendet werden können, lassen sich in zwei unterschiedliche Kategorien einteilen.

Die erste Kategorie entspricht der Wahl einer konstanten Phase und solche Sequenzen sollen als symmetrisch bezeichnet werden. Die Fehlertoleranz einer solchen Sequenz hängt von dem Zustand des Qubits ab. Für den Fall, dass die Drehachse der Pulse parallel oder anti-parallel zum Zustandsvektor ausgerichtet sind, ist eine solche Sequenz sehr robust gegenüber Pulsfehlern. Sind die Achsen jedoch senkrecht, so ist die Sequenz sehr pulsfehleranfällig. Ein Vergleich der Fehlertoleranz für zwei solcher symmetrischen Sequenzen angewandt auf den gleichen Superpositionszustand findet sich im Anhang J. Da der Qubitzustand in einem Quantenalgorithmus im Allgemeinen unbekannt ist oder sich während einer Dynamik ändert, ist die Leistungsfähigkeit einer solchen Sequenz unvorhersehbar.

Sequenzen, die für jeden beliebigen Superpositionszustand eine gleiche Fehleranfälligkeit besitzen, werden im weiteren als isotrop bezeichnet. Bei diesen Sequenzen wird der Zustand um unterschiedliche Drehachsen rotiert. Das einfachste Beispiel einer solchen Sequenz ist die Abwechslung von Drehungen um zwei orthogonale Achsen innerhalb der  $xy$ -Ebenen. Die sogenannte CPMG <sub>$xy$</sub> -Sequenz mit  $N$  Pulsen (wobei  $N$  gerade sei) lautet dann formal

$$[\tau \bar{X} \tau^2 Y \tau]^{N/2}, \quad (7.1.22)$$

wobei  $\bar{X}$  einer (negativen) Drehung um die  $x$ -Achse und  $Y$  einer positiven Drehung um die  $y$ -Achse entspricht. Eine andere Wahl der Phasen basiert auf einer Verschachtelung der Phasenlagen in einer iterativen Konstruktion. Die  $n$ -te Ordnung lässt sich dabei formal beschreiben als

$$\text{C-CPMG}_n = [\sqrt{\text{C-CPMG}_n} \tau Y \tau \text{C-CPMG}_n \tau \bar{X} \tau \sqrt{\text{C-CPMG}_n}]^2 \quad (7.1.23)$$

mit der Startsequenz  $\text{C-CPMG}_1 = [\tau Y \tau \tau \bar{X} \tau]^2$ . Der Name bezieht sich dabei auf die Verschachtelung der Phasen bei einer CPMG-Sequenz (concatenated CPMG). Neben Pulssequenzen, die lediglich aus Rotationen entlang zweier orthogonaler Achsen bestehen, lassen sich auch sehr fehlertolerante Sequenzen basierend auf mehreren unterschiedlichen Drehachsen konstruieren. Eine solche ist die sogenannte KDD-Sequenz (benannt nach E. Knill) [140]. Die Phasenlagen entsprechen hierbei der eines sehr robusten aus mehrere  $\pi$ -Pulsen zusammengesetzten Pulses [142]. Formal lässt sich diese Sequenz mit einem CPMG-Timing darstellen als

$$\text{KDD}_\phi = [\tau (\pi)_{\pi/6+\phi} \tau^2 (\pi)_\phi \tau^2 (\pi)_{\pi/2+\phi} \tau^2 (\pi)_\phi \tau^2 (\pi)_{\pi/6+\phi} \tau]. \quad (7.1.24)$$

Der Operator  $(\pi)_\varphi$  entspricht hierbei einem  $\pi$ -Puls mit einer Phase  $\varphi$ . Um die Fehlertoleranz für mehr Pulse zu erhöhen, wird die Sequenz

$$\text{KDD} = [\text{KDD}_\phi \text{ KDD}_{\phi+\pi/2}]^2 \quad (7.1.25)$$

mit 20 Pulsen genutzt. Sind weitere Entkopplungspulse notwendig, wird diese Sequenz wiederholt.

In Anhang J werden die Pulsfehlertoleranzen der unterschiedlichen Sequenzen mittels Simulationsrechnungen verglichen. Dabei stellt sich heraus, dass isotrope Sequenzen, die aus Drehungen um unterschiedliche Achsen zusammengesetzt sind, eine deutlich größere Pulsfehlertoleranz aufweisen als Pulse mit konstanten Phasen und somit konstanten Drehachsen.

Bisher wurde immer davon ausgegangen, dass die dynamischen Entkopplungspulse infinitesimal kurz sind. Die Gesamtentwicklungsdauer, während der sich ein Qubit entwickelt, ist dann einfach die zeitliche Sequenzlänge. Für endliche Pulsdauern entspricht die gesamte Entwicklungsdauer der Summe der Wartezeiten zwischen den Pulsen. Eine detaillierte Diskussion des Einflusses von endlichen Pulsdauern (auch auf die Filterfunktionen) findet sich zum Beispiel in [151].

### 7.1.5. Dynamische Entkopplungspulse und J-Kopplungen

In den vorherigen Abschnitten wurde die Dephasierung und die Anwendung von dynamischen Entkopplungspulsen an einem einzelnen Qubit erörtert. Nun wird ein System von  $N$  miteinander gekoppelten Qubits angenommen. Realisiert wird dieses System durch eine lineare Kette von  $N$  Ionen in einem Magnetfeldgradienten (siehe Abschnitt 2.5). Der Hamilton-Operator dieses System ist in der Gleichung (2.5.18) gegeben. Die Magnetfeldfluktuationen, welche die Dephasierung eines einzelnen Qubits zur Folge haben, führen für jedes Qubit zu einem zusätzlichen Beitrag der Form (7.1.2). In Gleichung (2.5.18) lautet der zusätzliche Hamilton-Operator, der die Dephasierung beschreibt

$$H_{\text{Deph}} = \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \sigma_z^{(i)}. \quad (7.1.26)$$

Eine zu dem Abschnitt 7.1.1 analoge Betrachtungsweise führt zur Dephasierung eines jeden einzelnen Qubits<sup>3</sup> und die Anwendung von dynamischen Entkopplungspulsen auf

---

<sup>3</sup>Typischerweise beträgt die Länge der Ionenkette weniger als 100  $\mu\text{m}$ . Daher kann man in der Praxis davon ausgehen, dass das von Geräten außerhalb des Vakuumrezipienten hervorgerufene Magnetfeldrauschen in einem Quantenregister homogen ist. Das Rauschen und somit die Dephasierung, die ein jedes Qubit erfährt ist dann identisch.

jedes einzelne Qubit kann dessen Kohärenz stabilisieren. In dem Anhang I.2 wird dieses genauer diskutiert. An dieser Stelle soll nun der Einfluss von dynamischen Entkopplungspulsen auf die J-Kopplung in den Vordergrund der Betrachtung rücken. Explizit wird dieses anhand der im Rahmen dieser Arbeit experimentell untersuchten vollständig gekoppelten Zwei- und Drei-Qubit-Systeme diskutiert.

Der Hamilton-Operator der Kopplung zwischen den beiden Qubits  $i$  und  $j$  lautet (vgl. Gleichung (2.5.18))

$$\tilde{H}_{\text{sys}} = -\frac{\hbar}{2} J_{ij} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(j)} \quad (7.1.27)$$

und die resultierende Zeitentwicklung eines Zeitintervalls  $\tau_0$  ist somit

$$\Theta_{ij} = e^{\frac{i}{2} J_{ij} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(j)} \tau_0}. \quad (7.1.28)$$

Die elementaren Bausteine einer Pulssequenz sind somit die Wartedauern  $\Theta_{ij}$ , während denen eine gekoppelte Dynamik stattfindet, und das NOT-Gatter  $X_i$  auf dem Qubit  $i$ . Im Anhang I.2 findet sich die Berechnung, aus der folgt, dass die Vertauschung eines Einzelpulses mit der Wartedauer das Vorzeichen des Exponenten in Gleichung (7.1.28) ändert und somit die Zeitentwicklung unter dem Einfluss der J-Kopplung umkehrt. Im Weiteren wird hierfür die Notation

$$\Theta_{ij} X_i = X_i \bar{\Theta}_{ij} \quad (7.1.29)$$

verwendet und es gilt

$$\bar{\Theta}_{ij} = e^{-\frac{i}{2} J_{ij} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(j)} \tau_0}. \quad (7.1.30)$$

und somit

$$\Theta_{ij} \bar{\Theta}_{ij} = \mathbb{1}. \quad (7.1.31)$$

Ein Puls auf ein Qubit  $k \neq i, j$  vertauscht hingegen mit der Zeitentwicklung aufgrund der Kopplung, da die Operatoren auf unterschiedliche Vektorräume wirken (vgl. Abschnitt H).

Wird nun ein Entkopplungspuls auf lediglich eines der beiden Qubits angewandt, so lautet die Zeitentwicklung (siehe auch beispielsweise [126] und Abschnitt I)

$$\Theta_{ij} X_i \Theta_{ij} = \Theta_{ij} \bar{\Theta}_{ij} X_i = X_i \quad (7.1.32)$$

und der Einfluss der J-Kopplung wird kompensiert<sup>4</sup>. Wird auf jedes der Qubits simultan ein Puls angewandt, so folgt analog

$$\Theta_{12} X_1 X_2 \Theta_{12} = \Theta_{12} X_1 \bar{\Theta}_{12} X_2, \quad (7.1.33)$$

$$= \Theta_{12}^2 X_1 X_2 \quad (7.1.34)$$

<sup>4</sup>Hierbei wird das andere Qubit  $j$  jedoch nicht vor einer Dephasierung geschützt.

und die J-Kopplung bleibt erhalten (siehe auch beispielsweise [34] und Abschnitt I). Die Anwendung einer Sequenz von dynamischen Entkopplungspulsen kann somit die Kohärenzen der beiden Qubits gegenüber Magnetfeldfluktuationen stabilisieren und dabei die Dynamik aufgrund der J-Kopplung unbeeinflusst lassen, falls die Pulse simultan erfolgen. Technisch ist an dem vorhandenen Mikrowellenaufbau eine solche simultane Ausführung nicht möglich, da zu einer bestimmten Zeit immer nur ein Signal einer Frequenz erzeugt werden kann. Aus diesem Grund werden die Pulse, die an unterschiedliche Qubits adressiert werden, unmittelbar nacheinander ausgeführt. Weil die Pulsdauern eine Größenordnung kürzer als die typischen Wartedauern zwischen den Pulsen sind, entspricht dieses einer simultanen Ausführung der Pulse in guter Näherung.

Die Eigenschaft eines  $\pi$ -Pulses, den Effekt der J-Kopplung zwischen Qubits zu kompensieren, kann bei der Methode der sogenannten selektiven Ankopplung (selective recoupling) genutzt werden [126]. Hierbei handelt es sich um die Konstruktion von Pulssequenzen, bei denen in einem  $N$ -Qubit-System durch einzelne  $\pi$ -Pulse die Effekte aller oder ausgewählter Kopplungen im Zeitmittel unterdrückt werden kann. Soll diese Technik auf ein dephasierendes System übertragen werden, so müssen die dynamischen Entkopplungspulssequenz und die Ankoppelpulse miteinander kombiniert werden. Solches wird im Folgenden anhand eines Drei-Qubit-Systems demonstriert.

In einem vollständig gekoppelten Drei-Qubit-System ergeben sich auf den Gleichungen (7.1.29) bis (7.1.34) aufbauende Überlegungen. Der Hamilton-Operator lautet hier (vgl. Gleichung (2.5.18))

$$H = -\frac{\hbar}{2} (J_{12}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} + J_{23}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)} + J_{13}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(3)}) \quad (7.1.35)$$

und führt zu der Zeitentwicklung der Form

$$U = \Theta_{12}\Theta_{23}\Theta_{13} \equiv \Theta, \quad (7.1.36)$$

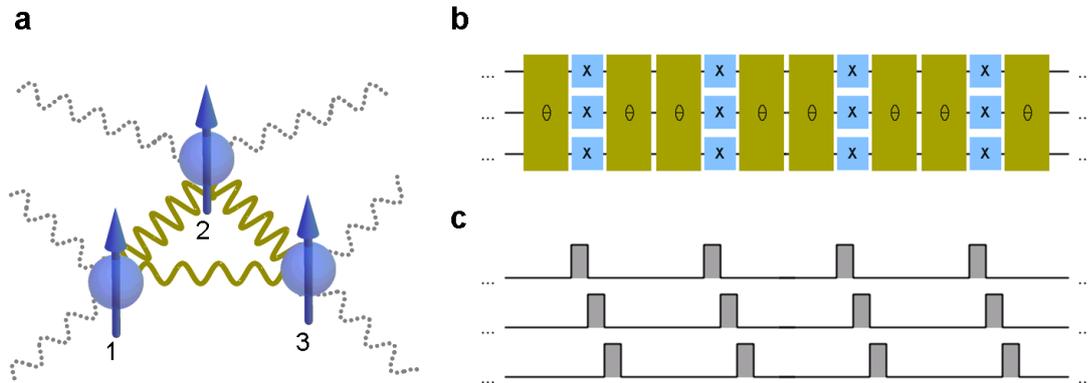
wobei die  $\Theta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) sich jeweils aus der Gleichung (7.1.28) ergeben. Diese Zerlegung der Zeitentwicklung ist gültig, da die auftretenden Pauli-Matrizen entweder identisch sind, oder sich auf unterschiedliche Vektorräume beziehen und somit alle kommutieren. Wie für das gekoppelte Zwei-Qubit-System ergeben sich unterschiedliche effektive Zeitentwicklungen, je nachdem auf welchem Qubit Pulse angewandt werden.

Die erste Möglichkeit sind  $N$  Pulse (wobei  $N$  gerade sei), die simultan auf alle drei Qubits angewandt werden. Die Zeitentwicklung ist nun

$$[(\Theta_{12}\Theta_{23}\Theta_{13})X_1X_2X_3(\Theta_{12}\Theta_{23}\Theta_{13})]^N = (\Theta_{12}\Theta_{23}\Theta_{13}X_1X_2X_3)^{N/2} \quad (7.1.37)$$

$$= (X_1X_2X_3\Theta_{12}\Theta_{23}\Theta_{13})^{N/2} \quad (7.1.37)$$

$$= (\Theta_{12}\Theta_{23}\Theta_{13})^{2N}. \quad (7.1.38)$$



**Abbildung 7.5.:** Pulssequenz um alle J-Kopplungen zu erhalten. (a) Die Pulssequenz führt dazu, dass ein System aus drei gekoppelten Qubits von der Umgebung effektiv isoliert wird (gepunktet dargestellt), während die J-Kopplungen der Qubits untereinander erhalten bleiben. (b) Die Sequenz hierfür basiert im Bild Quantenschaltung auf der simultanen Ausführung von NOT-Gattern (X) zwischen der bedingten Dynamik aufgrund der J-Kopplungen ( $\Theta$ ). (c) Realisiert wird diese Sequenz durch simultane  $\pi$ -Pulse und Wartezeiten.

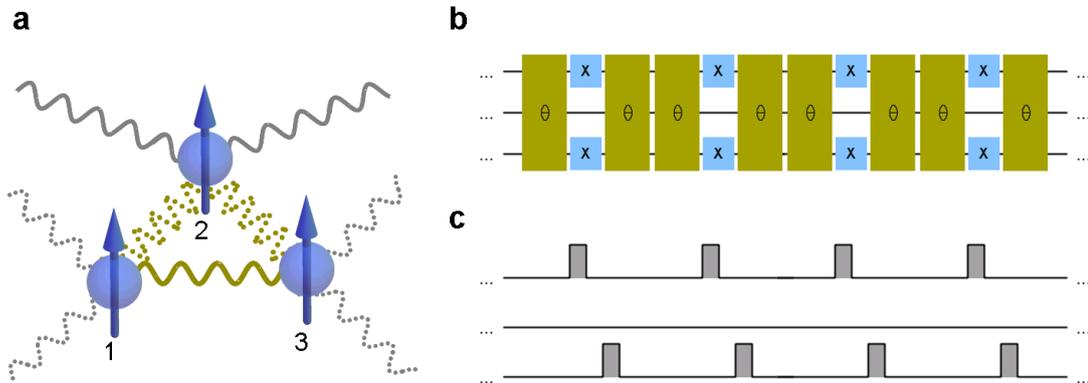
Hier kommutiert  $\Theta_{ij}$  mit  $X_i X_j$  und mit  $X_k$  für  $k \neq i, j$  und daher bleibt die Wirkung aller J-Kopplungen erhalten (siehe auch Gleichung (I.2.13)). Eine hierauf basierende Pulssequenz wird in der Abbildung 7.5 vorgestellt. Die Sequenz besteht dabei aus einer Wiederholung von Wartedauern und simultanen Pulsen, die auf alle Qubits angewandt werden. Die Zeitentwicklung entspricht hierbei (bis auf die lokalen Ein-Qubit-Rotation der Pulse) der eines vollständig gekoppelten Systems, wobei die (Ein-Qubit-)Kohärenzen aller Qubits vor einer Dephasierung geschützt werden. Eine solche Sequenz wird in dem Abschnitt 7.3.5 und dem Kapitel 9 verwendet.

Eine andere Sequenz ist die, in welcher die dynamischen Entkopplungspulse nur auf zwei Qubits (beispielsweise 1 und 3) angewandt werden. Die Zeitentwicklung einer Sequenz ist dann

$$[(\Theta_{12}\Theta_{23}\Theta_{13})X_1X_3(\Theta_{12}\Theta_{23}\Theta_{13})]^N = (\Theta_{13}X_1X_3)^{N/2}(X_1X_3\Theta_{13})^{N/2} \quad (7.1.39)$$

$$= \Theta_{13}^{2N}. \quad (7.1.40)$$

Einzig der Beitrag  $\Theta_{13}$  bleibt erhalten, da er mit  $X_1X_3$  kommutiert. Die Beiträge  $\Theta_{12}$  und  $\Theta_{23}$  werden hingegen kompensiert, da sie nicht mit  $X_1$  bzw.  $X_3$  kommutieren (siehe auch Gleichung (I.2.17)). Somit bleibt einzig die Kopplung zwischen den beiden Qubits



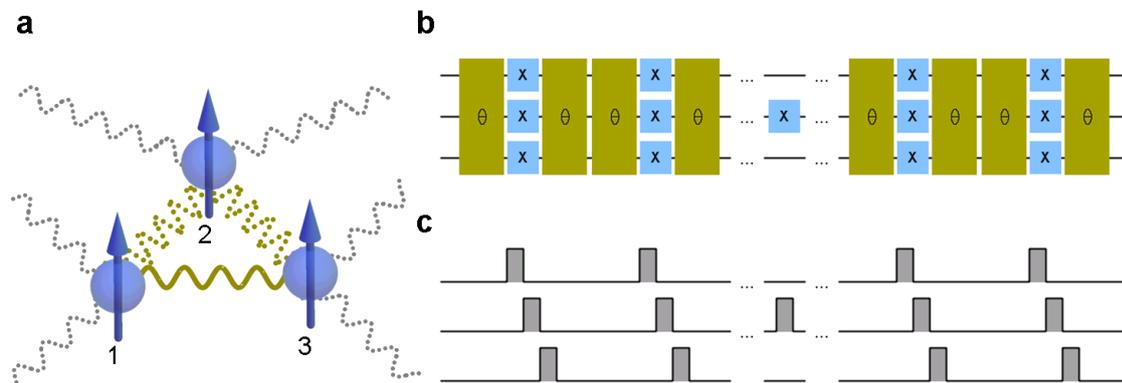
**Abbildung 7.6.:** Pulssequenz um ein gekoppeltes Zwei-Qubit-System zu isolieren. (a) Die Pulssequenz isoliert hier das erste und dritte Qubit sowohl von dem zweiten Qubit als auch von der Umgebung. Das zweite Qubit ist während dieser Sequenz nicht vor Dephasierung geschützt und wechselwirkt mit der Umgebung. (b) In der Darstellung einer Quantenschaltung entspricht diese Sequenz der Anwendung von NOT-Gattern auf dem ersten und dem dritten Qubit. (c) Die Realisierung entspricht  $\pi$ -Pulsen, die nur an diese beiden Qubits adressiert werden. Das zweite Qubit wird nicht manipuliert.

erhalten, auf denen die Entkopplungspulse ausgeführt werden. Eine hierauf basierende Sequenz ist in der Abbildung 7.6 dargestellt. Lediglich die Qubits 1 und 3 werden mit Pulsen adressiert und somit werden auch nur ihre Kohärenzen stabilisiert. Das Qubit 2 hingegen dephasiert, da keine Pulse an es adressiert werden. Während der Sequenz wird es effektiv zu einem Teil der Umgebung, von dem das verbleibende gekoppelte Zwei-Qubit-System isoliert wurde. Diese Sequenz wurde in [29; 56] verwendet um in einem Drei-Qubit-System zwischen zwei Qubits ein CNOT-Gatter zu realisieren und diese zu verschränken.

Eine dritte Sequenz, bei der effektiv nur die Kopplung zwischen zwei Qubits wirkt und zugleich alle Qubit gegen Dephasierung geschützt werden, ist in der Abbildung 7.7 dargestellt. Diese basiert auf der Anwendung eines zusätzlichen Spin-Echo-Pulses auf lediglich einem der Qubits (beispielsweise dem zweiten). Die Zeitentwicklung für eine Pulssequenz mit  $N$  simultanen Pulsen und diesem zusätzlichen Puls lautet dann (siehe auch Gleichung (7.1.38))

$$(\Theta_{12}\Theta_{23}\Theta_{13})^N X_2 (\Theta_{12}\Theta_{23}\Theta_{13})^N = X_2 (\Theta_{13})^{2N}. \quad (7.1.41)$$

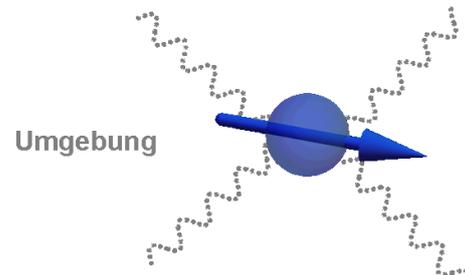
Da nur  $\Theta_{13}$  mit  $X_2$  kommutiert, werden die Beiträge  $\Theta_{12}$  und  $\Theta_{23}$  kompensiert (sie-



**Abbildung 7.7.:** Kombination aus dynamischer Entkopplung und ausgewählter Ankopplung. (a) Die Pulssequenz soll dazu führen, dass die drei Qubits von der Umgebung isoliert werden und gleichzeitig nur die J-Kopplung zwischen dem ersten und dritten Qubit wirkt. (b) Die Kombination von dynamischer Entkopplung und ausgewählter Ankopplung basiert hierbei auf einem NOT-Gatter, das zusätzlich auf dem zweiten Qubit in der Mitte der dynamischen Entkopplungssequenz ausgeführt wird. (c) Die Umsetzung entspricht einem einfachen zusätzlichen  $\pi$ -Puls.

he auch Gleichung (I.2.18)). Während der Sequenz in Abbildung 7.7 werden an allen Qubits simultan dynamische Entkopplungspulse adressiert. Zusätzlich wird nun genau in der Mitte der Sequenz nur an das zweite Qubit ein zusätzlicher Spin-Echo-Puls adressiert. Die Zeitentwicklung vor und nach diesem wird von allen J-Kopplungen bestimmt. Der zusätzliche Puls kompensiert nun alle Beiträge der Kopplungen  $J_{12}$  und  $J_{23}$ , wodurch das zweite Qubit effektiv von den verbleibenden gekoppelten Zwei-Qubit-System entkoppelt wird. Jedoch sorgt diese Sequenz dafür, dass die Kohärenz des entkoppelten Qubits auch von der Umgebung isoliert wird und seine Kohärenzen somit vor Dephasierung geschützt werden. Diese Sequenz wird in dem Abschnitt 7.3.5 und dem Kapitel 9 verwendet, wo sie die simultane Realisierung eines Quantenspeichers und eines bedingten Zwei-Qubit-Gatters erlaubt. Darüber hinaus dient sie in Kapitel 8 dazu, die Kopplung zwischen jeweils zwei Qubits in einem Drei-Qubit-Register zu messen (vgl. auch Abschnitt 4.8).

**Abbildung 7.8:** Übersicht der dynamischen Entkopplung eines Ein-Qubit-Zustands. Ziel ist es hierbei mittels dynamischer Entkopplungspulse die Wechselwirkung des Qubits mit der Umgebung zu unterdrücken (gepunktet dargestellt).



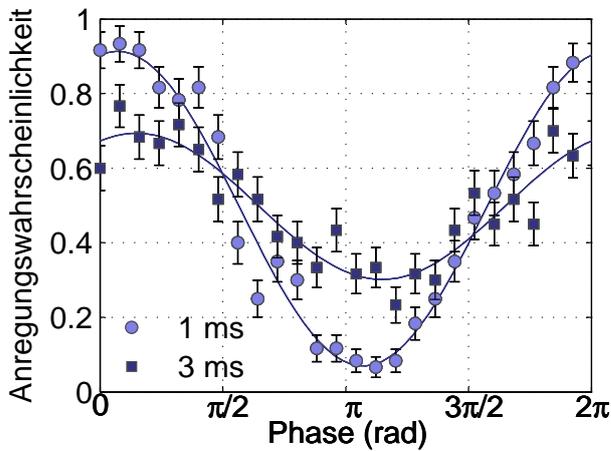
## 7.2. Dynamische Entkopplung eines Einzelqubits

Im folgenden Abschnitt werden nun Experimente, in denen der Zustand eines einzelnen Qubits vor Magnetfeldrauschen geschützt wird, präsentiert. Das einzelne Qubit ist hierbei in der magnetfeldabhängigen Basis des magnetischen  $\sigma^+$ -Übergangs (vgl. Abschnitt 2.2) realisiert und die Qubitzustände sind  $|0\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  bzw.  $|1\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 1\rangle$ . Der spezielle Zustand, an dem die dynamische Entkopplung untersucht wird, ist der Superpositionszustand  $1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ . Im Kontext der Quanteninformationsverarbeitung entspricht dieses der Realisierung eines Einzelqubit-Quantenspeichers mit einer möglichen Speicherdauer, die mittels dynamischen Entkopplungspulsen verlängert worden ist. Die Abbildung 7.8 illustriert diesen Sachverhalt. Es wird dabei ebenfalls explizit untersucht, wie fehlerhafte Pulssequenzen den Zustand unkontrolliert beeinflussen können.

### 7.2.1. Dynamische Entkopplung eines Ein-Qubit-Zustands

Als Erstes wird die Kohärenzeitverlängerung aufgrund der Anwendung dynamischer Entkopplungspulse demonstriert. Hierfür werden Ramsey-artige Messungen genutzt (vgl. Abschnitt 4.6). Das Qubit wird dabei in dem Superpositionszustand initialisiert, anschließend wird während einer freien Entwicklungsdauer eine Entkopplungssequenz angewandt. Bei dieser Sequenz handelt es sich um eine CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz mit vier Pulsen (vgl. Abschnitt 7.1.4). Im Anschluss wird mit einem  $\pi/2$ -Puls die Kohärenz des Zustands untersucht. Die Phase dieses  $\pi/2$ -Pulses wird dabei variiert, was die Beobachtung von Ramsey-Streifen erlaubt.

In Abbildung 7.9 sind die Resultate für freie Entwicklungsdauern von 1 ms und 3 ms dargestellt. Nach 1 ms zeigt sich ein deutlicher Kontrast der Ramsey-Streifen, die ihr Minimum wie zu erwarten bei  $\pi$  aufweisen. Die Fidelity des Zustands nach 1 ms lässt sich zu 0.91(4) bestimmen (vgl. Abschnitt 4.7). Vergleicht man dieses mit der eingangs erwähnten Kohärenzeit von  $T_2^* = 200(100) \mu\text{s}$ , so zeigt sich hier die Fähigkeit der dynamischen Entkopplungspulse die Kohärenzeit zu verlängern. Wird die freie Ent-

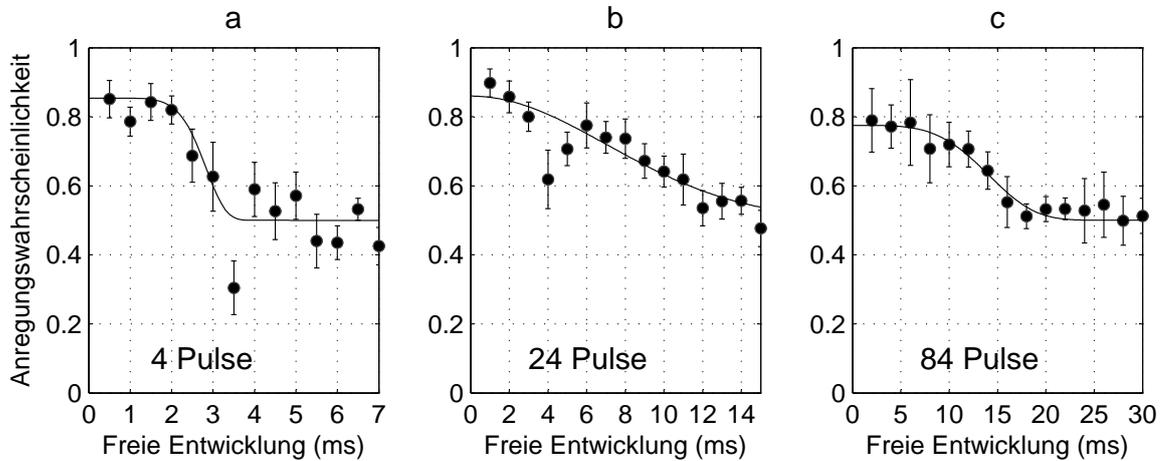


**Abbildung 7.9:** Beobachtete Ramsey-Streifen. Während der freien Entwicklungsdauer von entweder 1 ms oder 3 ms wird eine CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz mit vier Entkopplungspulsen ausgeführt. Der Kontrast der Streifen nach 1 ms demonstriert die erhaltene Kohärenz des Quantenzustandes. Für eine freie Entwicklungsdauer von 3 ms hingegen ist der Kontrast bereits reduziert.

wicklungsdauer weiter auf 3 ms erhöht, so reduziert sich der Streifenkontrast und die Fidelity sinkt auf 0.68(7). Somit geschieht die Dephasierung nun auf einer Zeitskala von wenigen Millisekunden.

Zur näheren Untersuchung der Leistungsfähigkeit von Entkopplungssequenzen und der möglichen Kohärenzzeiten, die sich erzielen lassen, wird nun die freie Entwicklungsdauer für eine feste Anzahl von Pulsen einer CPMG-Sequenz variiert. Mit der Gesamtentwicklungsdauer  $T$  ändert sich auch die Zeitkonstante  $\tau_0^{\text{CPMG}} = T/(2N)$  zwischen den Pulsen, was einer Änderung der resultierenden Filterfunktion entspricht. Aus diesem Grund erlauben die Ergebnisse auch Rückschlüsse auf die Rauschleistungsdichte und starke Rauschkomponenten bei Harmonischen von  $\omega_0^{\text{CPMG}} = \pi/(2T)$  lassen sich gegebenenfalls identifizieren. Die Phasen der Pulse sind konstant und entsprechen Rotationen um Drehachsen parallel zum Zustandsvektor. Diese CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz ist für den verwendeten Superpositionszustand robust und somit ist ihre Leistungsfähigkeit hier unabhängig von möglichen Pulsfehlern, deren Einfluss in dem Abschnitt 7.2.2 explizit untersucht wird. Um den experimentellen Aufwand zu reduzieren, wird die Phase des zweiten  $\pi/2$ -Puls im Ramsey-Experiment gleich der des ersten gewählt ( $\varphi = 0$ ). Die gemessene Anregungswahrscheinlichkeit entspricht dann idealerweise der des Maximums der Interferenzstreifen und erlaubt somit die Bestimmung des Streifenkontrasts.

In der Abbildung 7.10 (a) bis (c) sind einige exemplarische Ergebnisse für 4, 24 und 84 Pulse dargestellt. Wie man erkennen kann, nimmt die Zeitskala, während der eine deutliche Anregungswahrscheinlichkeit beobachtet werden kann, mit der Anzahl an Pulsen zu. An die Daten ist das phänomenologischen Modell (siehe zum Beispiel



**Abbildung 7.10.:** Verlängerte Kohärenzzeiten für steigende Anzahl von dynamischen Entkopplungspulsen einer CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz. Für eine konstante Phase  $\varphi = 0$  des zweiten Ramsey-Pulses werden die Streifenmaxima detektiert. Die freie Entwicklungsdauer wird dabei für eine feste Anzahl von Pulsen variiert (a) - (c). Für vier Pulse (a) beträgt die Kohärenzzeit bereits 2,9(6) ms. Für 24 Pulse (b) ist sie weiter auf 10(1) ms erhöht und für 84 Pulse (c) beträgt sie 15(2) ms.

[142; 156])

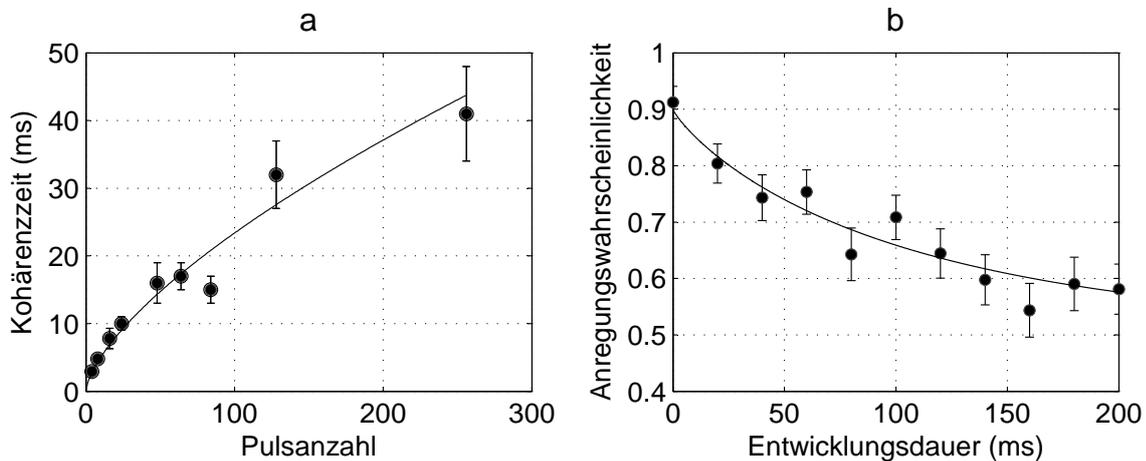
$$P(T) = \frac{1}{2} (1 + C e^{-(T/\tau_{\text{coh}})^n}) \quad (7.2.1)$$

angepasst. Hierbei entspricht  $T$  der verwendeten freien Entwicklungsdauer,  $C$  dem Streifenkontrast,  $\tau_{\text{coh}}$  der zu bestimmenden Kohärenzzeit und  $n$  einem Parameter zwischen 2 und 7<sup>5</sup>. So folgt für die drei unterschiedlichen Sequenzlängen  $\tau_{\text{coh}}^{4\text{Pulse}} = 2.9(6)$  ms,  $\tau_{\text{coh}}^{24\text{Pulse}} = 10(1)$  ms und  $\tau_{\text{coh}}^{84\text{Pulse}} = 15(2)$  ms. Bei einer genaueren Betrachtung fallen die deutlich reduzierten Anregungswahrscheinlichkeiten bei 3,5 ms für vier Pulse und bei 4 ms für 24 Pulse auf. Die CPMG-Sequenz verstärkt den Einfluss von Fluktuationen bei bestimmten Frequenzen (vgl. Gleichung (7.1.21)) und somit lässt sich schließen, dass die beobachteten Rauschkomponenten bei Harmonischen von  $2\pi \times 571$  Hz bzw.  $2\pi \times 3$  kHz liegen.

Neben der CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz wurden auch Entkopplungssequenzen mit einem jeweils anderen Timing untersucht (vgl. Abschnitt 7.1.4). Hier hat sich jedoch gezeigt, dass

<sup>5</sup>Dieser Parameter hängt von dem Spektrum der Rauschleistungsdichte ab, ist jedoch nur schwer durch eine Anpassung an die Daten zu bestimmen. Siehe [156] für eine weitere Diskussion.

sowohl die  $PDD_{xy}$ - als auch die  $UDD_{yy}$ -Sequenz für eine ähnliche Pulsanzahl und die gleiche freie Entwicklungsdauer weniger effektiv sind. So lag die erzielte Kohärenzzeit für die  $PDD_{xy}$ -Sequenz mit 25 Pulsen bei lediglich 6(1) ms und somit deutlich unter den 10(1) ms, die sich für die  $CPMG_{yy}$  mit 24 Pulsen ergaben. Für die  $UDD$ -Sequenz waren die erzielten Kohärenzzeiten ebenfalls nur halb so lang wie die für  $CPMG$ -Sequenzen. Die praktische Überlegenheit der  $CPMG$ -Sequenz über die  $UDD$ -Sequenz wurde auch in anderen experimentellen Aufbauten beobachtet (zum Beispiel in [142]) und lässt sich durch schnelle Komponenten im Rauschspektrums begründen, die von einem  $UDD$ -Filter nicht unterdrückt werden [152; 151]. Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass es auch Experimente gibt, in denen die  $UDD$ -Sequenz leistungsfähiger als die  $CPMG$ -Sequenz war. In [130] findet sich hierzu eine detaillierte experimentelle Gegenüberstellung für unterschiedliche Rauschleistungsspektren.



**Abbildung 7.11.:** Verhalten der Kohärenzzeit für unterschiedliche Pulsanzahlen. In (a) ist die ermittelte Kohärenzzeit für unterschiedliche Pulsanzahlen  $N$  einer  $CPMG_{yy}$ -Sequenz dargestellt. Sie skaliert wie  $\tau_{\text{coh}} \propto N^{2/3}$ . Zur Abschätzung der maximal möglichen Kohärenzzeit ist in (b) die Anregungswahrscheinlichkeit für den Fall des Spin-Locks und unterschiedlichen Entwicklungsdauern dargestellt. Zwischen zwei Ramsey-Pulsen wird kontinuierlich das Mikrowellenfeld mit einer Rabi-Frequenz von etwa 50 kHz eingestrahlt. Die Phasenbeziehung zwischen den Ramsey-Pulsen und dem Feld beträgt dabei  $\pi/2$ . Die Anpassung eines exponentiellen Zerfalls des Kontrasts an die Daten ergibt eine Kohärenzzeit von 110(20) ms.

Um herauszufinden, wie in unserem experimentellen Aufbau die erzielbare Kohärenzzeit mit der Anzahl der Entkopplungspulse skaliert, wird für unterschiedliche Pulsanzahlen

die freie Entwicklungszeit variiert und mit Gleichung (7.2.1) die Kohärenzzeit bestimmt. Die Ergebnisse sind in der Abbildung 7.11 (a) dargestellt. Man erkennt, dass die Kohärenzzeit nicht-linear von der Pulsanzahl  $N$  abhängt. Eine Anpassung der Form (siehe beispielsweise [156])

$$\tau_{\text{coh}}(N) = T_2 N^\gamma \quad (7.2.2)$$

an die Datenpunkte ergibt die Kohärenzzeit unter Verwendung eines einzelnen Spinecho-Pulses  $T_2 = 1,09(5)$  ms und den Exponenten  $\gamma = 0,680(12)$ . Von dem Exponenten, der mit  $\gamma = 2/3$  verträglich ist, lässt sich auf eine Rauschleistungsdichte der Form  $S(\omega) \propto \omega^{-2}$  [156] schließen. Hierbei wird ebenfalls die Beobachtung genutzt, dass die Kohärenzzeit für eine gerade bzw. ungerade Zahl an dynamischen Entkopplungspulsen vergleichbar ist. Der untersuchte Frequenzbereich hängt von den Pulsabständen ab und liegt zwischen 1 kHz und 50 kHz. Kleinere Frequenzen lassen sich mit verlängerten Dauern zwischen den Pulsen untersuchen. In dem vorhandenen Aufbau dephasiert ein Qubit jedoch zu schnell, als das dieser Bereich experimentell zugänglich wäre. Höhere Frequenzen hingegen lassen sich mittels kürzeren Abständen zwischen den Entkopplungspulsen untersuchen. Da sich jedoch dann die Pulsabstände den Pulsdauern annähern, ist der Frequenzbereich an dem vorhandenen Aufbau somit begrenzt.

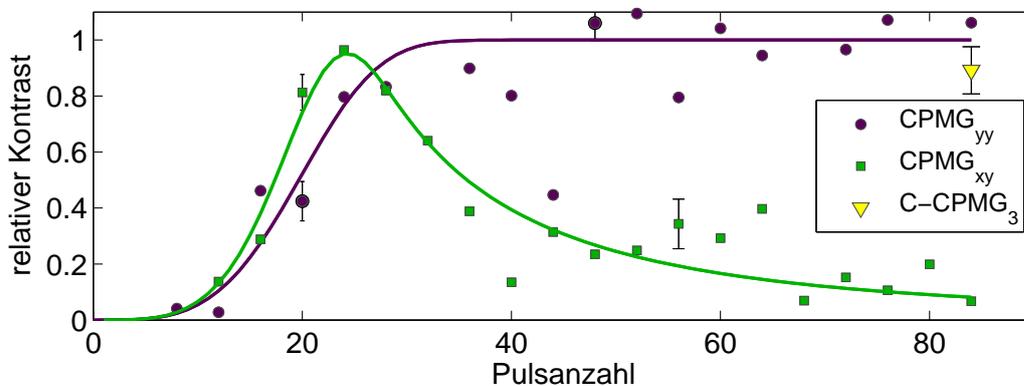
Die maximal erzielbare Kohärenzzeit bei Verwendung von dynamischen Entkopplungspulsen ergibt sich aus dem Grenzfall für eine verschwindende freie Entwicklungsdauer. In diesem Fall wird das Qubit kontinuierlich einem antreibenden Feld ausgesetzt. Dieser Grenzfall ist der sogenannte Spin-Lock (vgl. Abschnitt 7.1.4). In der Abbildung 7.11 (b) ist die beobachtete Anregungswahrscheinlichkeit für unterschiedliche Entwicklungsdauern zwischen den beiden Ramsey-Pulsen dargestellt. Während dieser Zeit wird das Qubit kontinuierlich mit einer Rabi-Frequenz von etwa 50 kHz angetrieben und die Phasenlage des antreibenden Feldes relativ zum ersten  $\pi/2$ -Puls beträgt  $\pi/2$ . An die Daten wird analog zu (7.2.1) ein exponentieller Zerfall der Form

$$P(T) = \frac{1}{2} \left( 1 + C e^{-T/\tau_{\text{coh}}^{\text{SL}}} \right) \quad (7.2.3)$$

angepasst. Für die Kohärenzzeit des Spin-Locks folgt  $\tau_{\text{coh}}^{\text{SL}} = 110(20)$  ms. Diese ist drei Größenordnungen länger als für den Fall, dass keine dynamische Entkopplungsmethode verwendet wird. Somit wird das Potenzial dieser Methoden, an dem vorhandenen experimentellen Aufbau die Kohärenzzeit eines Qubits zu verlängern, nachgewiesen. Begrenzt wird die Kohärenzzeit im Fall des Spin-Locks im Allgemeinen durch die Stabilität des antreibenden Feldes, ein mögliches Aufheizen der Ionenbewegung in dem Magnetfeldgradienten und der möglichen unbeabsichtigten Streuung von ultravioletten Photonen, die den Übergang  ${}^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow {}^2S_{1/2}, F = 1$  (siehe Abschnitt 2.2) treiben und zu einem effektiven Zerfall nach  $|0\rangle$  führen. Da die Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $|1\rangle$

vorzufinden in der Abbildung 7.11 (b) jedoch asymptotisch nach  $1/2$  zerfällt, kann letztgenanntes als begrenzender Faktor ausgeschlossen werden. An dieser Stelle soll des Weiteren darauf hingewiesen werden, dass sich mit dem Spin-Lock ein Qubit lediglich in einem bestimmten und bekannten Zustand speichern lässt. Befindet sich das Qubit in einem anderen als dem untersuchten Superpositionszustand  $1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ , so muss die relative Phase des antreibenden Feldes entsprechend angepasst werden, bis im Bild der Bloch-Kugel, der Feldvektor und der Zustandsvektor wieder parallel zueinander ausgerichtet sind.

### 7.2.2. Robustes dynamisches Entkoppeln eines Qubits



**Abbildung 7.12.:** Toleranzen von drei unterschiedlichen Sequenzen mit einem CPMG-Timing gegenüber Pulsfehlern. Während einer freien Entwicklungsdauer von 5 ms werden dynamische Entkopplungssequenzen ausgeführt und der Endzustand des Qubits untersucht. Die Phase eines zweiten Ramsey-Pulses ist dabei  $\varphi = 0$ , um das Maximum der Streifen zu detektieren. Von diesem wird auf den Kontrast der Ramsey-Streifen geschlossen. Die CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz ist für den gewählten Zustand des Qubits robust und dient daher als Vergleichsreferenz für die anderen beiden Sequenzen. Die CPMG<sub>xy</sub>-Sequenz ist weniger robust. Pulsfehler können sich somit aufaddieren und zu einem scheinbar chaotischen Verhalten führen, was den Kontrast für viele Pulse wieder reduziert. Im Gegensatz dazu erlaubt die C-CPMG<sub>3</sub>-Sequenz die Beobachtung eines deutlichen Streifenkontrastes auch noch nach 84 Pulsen. Die Datenpunkte sind eine Mittelung von zehn Experimenten mit jeweils 100 Wiederholungen. Exemplarisch sind Fehlerbalken, welche die Standardabweichung repräsentieren, eingezeichnet. Die durchgezogenen Linien dienen der besseren Übersicht.

Für jede Realisierung dynamischer Entkopplungsmethoden, die auf Sequenzen von Entkopplungspulsen beruhen, sind mögliche Pulsfehler (vgl. Abschnitt 2.6.2) ein bedeutender Aspekt, der zu berücksichtigen ist. In dem experimentellen Aufbau resultieren Pulsfehler aus einer Drift der Qubitübergänge (vgl. Abschnitt G), die effektiv zu einer Verstimmung der Pulse führt. Darüber hinaus kann die Rabi-Frequenz der Übergänge aufgrund der Drift nur mit einer endlichen Genauigkeit bestimmt werden, was zu möglichen systematischen Pulsflächenfehlern führt.

Prinzipiell gibt es nun zwei unterschiedliche Strategien, um die Toleranz einer Sequenz gegenüber Pulsfehlern zu erhöhen. Die erste basiert auf der Konstruktion einer Pulssequenz, in der jeder einzelne Puls tolerant gegenüber der möglichen Fehlerquellen ist. Dies kann zum einen mittels zusammengesetzter Pulse [127; 157; 128] erreicht werden, oder aber durch Pulse, die auf optimaler Kontrolltheorie [158; 128] beruhen. Der Nachteil dieser beiden Methoden ist jedoch, dass diese Pulse eine längere Zeit benötigen als ein einfacher Rechteckpuls. Bei solchen komplexen Pulsen geschieht es dann leicht, dass die Dauer der Mikrowellenpulse vergleichbar mit der freien Entwicklungsdauer zwischen den Pulsen wird. Für die Pulssequenz gilt dann nicht länger die idealisierte Annahme von verschwindend kurzen Pulsen. Dieses Problem verschärft sich für ein System aus mehreren Qubits, wie es in dem Abschnitt 7.3 vorgestellt wird, wenn zwischen dynamischen Entkopplungspulsen eine bedingte Dynamik geschehen soll. Für eine gegebene Gesamtlänge der Sequenz wird dann die Dauer dieser Dynamik zwischen den Pulsen verkürzt. Ein Aufheizen der Ionenbewegung und eine mögliche Instabilität der Mikrowellenquelle wird dann die Dauer, während der eine Dynamik geschützt werden kann, stärker begrenzen.

Im Weiteren wird daher eine andere Strategie verfolgt, die darauf beruht, dass sich die Fehler von einzelnen Rechteckpulsen nicht aufsummieren, sondern sich gegenseitig aufheben [140]. In Simulationsrechnungen der Pulsfehlertoleranz von unterschiedlichen Sequenzen (vgl. Kapitel J) hat sich auch gezeigt, dass selbstkorrigierende Sequenzen mit einfachen Pulsen robuster sein können als fehleranfällige Sequenzen mit robusten Einzelpulsen.

Um nun die Robustheit von unterschiedlichen Pulssequenzen gegenüber den vorhandenen Fehlerquellen zu vergleichen, werden sie erneut mit einem Ramsey-Experiment kombiniert. Die Taktung der Pulse entspricht dabei immer dem einer CPMG-Sequenz und es sind nur die Anzahl und die relativen Phasenlagen der Pulse, die variiert werden. Die freie Entwicklungsdauer beträgt immer 5 ms und die beiden  $\pi/2$ -Pulse haben wie zuvor die gleiche Phasenlage ( $\varphi = 0$ ). Die Experimente werden während mehrerer Stunden kontinuierlich wiederholt, wobei die einzelnen Sequenzen immer wechselnd nacheinander untersucht werden. In Abbildung 7.12 sind die Ergebnisse für die Sequenzen  $\text{CPMG}_{yy}$ ,  $\text{CPMG}_{xy}$  und  $\text{C-CPMG}_3$  dargestellt (vgl. Abschnitt 7.1.4). Für vier dynamische Entkopplungspulse beträgt die Kohärenzzeit 2,9(6) ms (vgl. Abbildung 7.10 (a)) und somit ist für die freie Entwicklungsdauer von 5 ms und wenigen Pulsen

der beobachtete Kontrast verschwindend gering. Für eine sich vergrößernde Pulsanzahl steigt auch die Kohärenzzeit und für 24 Pulse beträgt sie 10(1) ms (vgl. Abbildung 7.10 (b)). Der relative Kontrast ist nun deutlich erkennbar und nahe eins. Für den gewählten Zustand des Qubits ( $1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ ) ist die CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz robust gegenüber Pulsfehlern (siehe zum Beispiel [140] oder die Simulationsrechnung in J). Daher ändert sich der Kontrast für noch mehr Pulse nicht weiter und erreicht ein Plateau, das als Vergleichsmaßstab dient. Die isotrope CPMG<sub>xy</sub>-Sequenz ist weniger robust (siehe zum Beispiel [140] oder die Simulationsrechnung in J) und für eine steigende Pulsanzahl reduziert sich der Kontrast erneut. Der Grund ist der, dass weitere Pulse durch ihre Fehler klassisches Rauschen beitragen und so im Mittel zu einem scheinbar chaotischen Verhalten des Qubits führen. Die verschachtelte Sequenz C-CPMG<sub>3</sub> hingegen zeigt für die 84 Pulse, aus der sie besteht, nahezu den maximalen Kontrast. Dieses demonstriert deutlich den Umstand, dass sich einzelne Pulsfehler in dieser Sequenz kaum aufaddieren, sondern sich gegenseitig kompensieren. Da eine größere Pulsanzahl auch eine längere Kohärenzzeit bedeutet (vgl. Abbildung 7.11), erlaubt diese Sequenz längere Speicherzeiten in einem Quantenspeicher. In dem folgenden Abschnitt wird die dynamische Entkopplung von bedingter Quantendynamik und im Speziellen von einem CNOT-Gatter beschrieben. Hier führt diese Sequenz dazu, dass sich auch langsamere Gatter noch realisieren lassen als dies mit CPMG<sub>xy</sub>-Sequenzen möglich wäre.

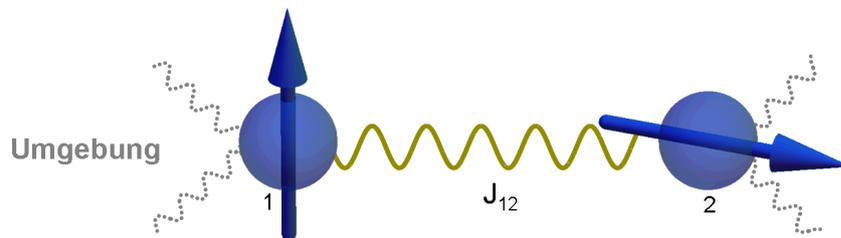
### 7.2.3. Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse

Bevor in dem nächsten Abschnitt die dynamische Entkopplung eines gekoppelten Mehr-Qubit-Systems experimentell untersucht wird, sollen die experimentellen Erkenntnisse des vorliegenden Abschnitts resümiert werden. Es wurde gezeigt, wie mittels dynamischer Entkopplungspulse der Quantenzustand eines einzelnen Qubits vor der Dephasierung geschützt werden kann. Ist der Zustand bekannt, können hierfür Pulssequenzen mit einer passenden konstanten Phase benutzt werden, die gegenüber Pulsfehlern robust sind. Die Kohärenzzeit des Qubits lässt sich dann um drei Größenordnungen auf bis zu 110(20) ms verlängern. Darüber hinaus konnte das Spektrum des in dem experimentellen Aufbau vorhandenen Magnetfeldrauschens charakterisiert werden. Über einen Bereich von 1 kHz bis 50 kHz verhält sich die Rauschleistungsdichte wie  $S(\omega) \propto \omega^{-2}$  und darüber hinaus wurden ausgeprägte Komponenten bei wenigen Kilohertz nachgewiesen. Die Stärke der einzelnen Rauschkomponenten wurde jedoch nicht bestimmt. Bei der Untersuchung, wie die unvermeidlichen Pulsfehler den Qubitzustand unkontrolliert beeinflussen, wurden für verschiedene Sequenzen Unterschiede beobachtet. So konnte die hohe Fehlertoleranz einer symmetrischen CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz nachgewiesen werden. Für die isotrope CPMG<sub>xy</sub>-Sequenz hingegen führten individuelle Pulsfehler, die sich während der Sequenz aufsummieren, zu einem scheinbar chaotischen Verhalten des Qubits und somit zu einer effektiven Dekohärenz. Die ebenfalls isotrope C-CPMG<sub>3</sub>-Sequenz

hingegen offenbarte hier ihre überlegene Fehlertoleranz, die darauf beruht, dass die Pulsfehler sich gegenseitig kompensieren.

### 7.3. Dynamische Entkopplung eines Mehr-Qubit-Systems

In dem vorherigen Abschnitt wurde die dynamische Entkopplung eines einzelnen Qubits experimentell untersucht. In diesem Abschnitt soll die Diskussion nun auf Mehr-Qubit-Systeme erweitert werden. Realisiert werden diese Systeme durch eine Kette von zwei bis drei gespeicherten und lasergekühlten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen. In dem Grundzustand eines jeden Ions wird hierbei ein Qubit kodiert ( $|0\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  und  $|1\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 1\rangle$ ). Der vorhandene Magnetfeldgradient erlaubt dann, wie eingangs erwähnt, eine Adressierung der einzelnen Qubits mit Mikrowellenpulsen im Frequenzraum und führt darüber hinaus zu einer J-Kopplung zwischen den Qubits (vgl. Abschnitt 2.5). In dem Folgenden soll nun experimentell untersucht werden, wie mittels dynamischen Entkopplungspulsen die Kohärenzen der Einzelqubits vor einer Dephasierung geschützt werden können, und gleichzeitig die bedingte Dynamik aufgrund der J-Kopplung beobachtet werden kann. In der Abbildung 7.13 ist diese Problemstellung für ein System aus zwei Qubits illustriert.



**Abbildung 7.13.:** Übersicht der dynamischen Entkopplung eines gekoppelten Zwei-Qubit-Systems. Ziel ist es den Einfluss der Umgebung effektiv zu unterdrücken (gepunktet dargestellt), während die J-Kopplung erhalten bleibt (durchgezogen dargestellt).

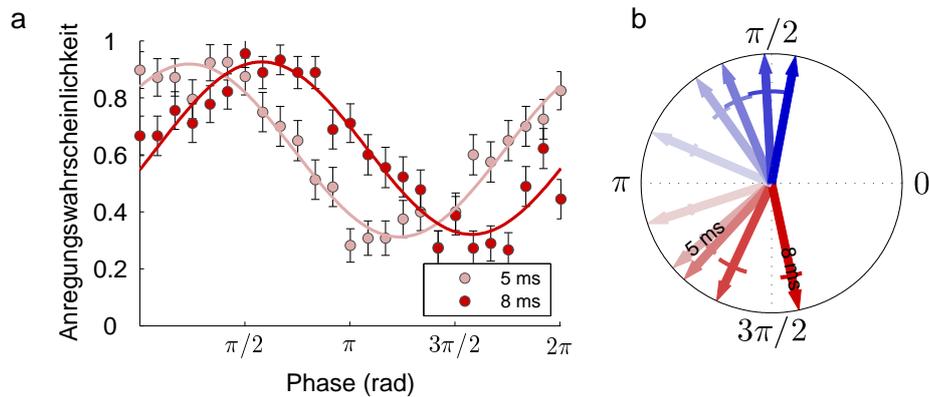
Die Untersuchung beginnt mit der Stabilisierung der bedingten Zwei-Qubit-Dynamik. Anhand dieser wird dann experimentell verglichen, wie robust unterschiedliche Pulssequenzen gegenüber Pulsfehlern sind. Mittels dynamischen Entkopplungspulsen wird die Kohärenzzeit des Systems gezielt verlängert, bis die Realisierung eines vollständigen

CNOT-Gatters möglich ist. Im Vergleich zu vorhergehenden Experimenten in dem selben Aufbau [29; 56] steht bei den hier präsentierten Messungen eine EMCCD-Kamera zur Zustandsdetektion zur Verfügung (vgl. Abschnitt 4.3). Somit kann der Zustand jedes Qubits einzeln ausgelesen werden, was bei den vorherigen Experimenten mit einem Photomultiplier nicht möglich war. Die Fidelity des CNOT-Gatters wird dann durch die Erzeugung eines verschränkten Bell-Zustands charakterisiert. Den Abschluss dieses Kapitels bildet dann Erweiterung der dynamischen Entkopplung auf ein Drei-Qubit-System.

#### 7.3.1. Dynamische Entkopplung von bedingter Zwei-Qubit-Dynamik

In der weiteren Diskussion von bedingter Zwei-Qubit-Dynamik wird zwischen den beiden Qubits hinsichtlich ihrer Rolle unterschieden. Das eine Qubit, dessen Dynamik von dem Zustand des anderen abhängt, ist das Ziel-Qubit (target qubit). Das andere Qubit, dessen Zustand die Dynamik des Ziel-Qubits bedingt, ist das Kontroll-Qubit (control qubit). Um nun die bedingte Dynamik des Ziel-Qubits zu untersuchen, werden erneut Ramsey-Experimente (vgl. Abschnitt 4.6) an diesem Qubit durchgeführt. Die Phase  $\varphi$  des zweiten  $\pi/2$ -Pulses wird hierbei variiert, um Ramsey-Streifen zu beobachten. Das Kontroll Qubit ist dabei entweder in dem Grundzustand  $|0\rangle$  oder in dem angeregten Zustand  $|1\rangle$  initialisiert. Die Zeit zwischen den beiden Ramsey- $\pi/2$ -Pulsen, während der die beiden Qubits mittels der J-Kopplung wechselwirken, ist die bedingte Entwicklungszeit  $T$ . Während dieser Zeit werden dynamische Entkopplungspulssequenzen eingestrahlt. Wie in Abschnitt 7.1.5 diskutiert wurde, ist es dabei notwendig die Entkopplungspulse an beide Qubits gleichzeitig zu adressieren. Da der vorhandene Mikrowellenaufbau (vgl. Abschnitt 3.4) jedoch zu einer gegebenen Zeit nur eine Frequenz erzeugen kann, ist dies praktisch nicht möglich. Aus diesem Grund werden die Entkopplungspulse der verwendeten C-CPMG<sub>3</sub>-Pulssequenz unmittelbar nacheinander ausgeführt.

Die Abbildung 7.14 enthält die Resultate dieser Experimente. In (a) ist ersichtlich, dass die beobachteten Streifen des Ziel-Qubits sich mit einer ändernden bedingten Entwicklungsdauer verschieben. Für eine verschwindende Dauer ( $T = 0$ ; nicht gezeigt) ist das Minimum der Interferenzstreifen bei  $\varphi = \pi$  zu finden. Ist das Kontroll-Qubit in  $|0\rangle$  initialisiert und wird die bedingte Entwicklungsdauer  $T$  auf 5 ms bzw. 8 ms verlängert, so verschieben sich die Streifen zu größeren Ramsey-Phasen  $\varphi$  hin. Die Zustandsdetektion mittels des Photomultipliers führt zu einem Offset der Anregungswahrscheinlichkeit. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Kontroll-Qubit am Ende der Sequenz aufgrund von Pulsfehlern nicht exakt in  $|0\rangle$  ist und somit Resonanzfluoreszenz dieses Qubits die Beobachtung verfälscht. Der Umstand, dass ein klarer Kontrast der Interferenzstreifen



**Abbildung 7.14.:** Bedingte Zwei-Qubit-Dynamik. (a) Ein Ramsey-artiges Experiment wird auf dem Ziel-Qubit ausgeführt, während dynamische Entkopplungspulse nahezu simultan an beide Qubits adressiert werden. Das Minimum der Ramsey-Streifen, welches für eine verschwindende bedingte Entwicklungsdauer bei  $\pi$  zu finden ist (nicht dargestellt), verschiebt sich, wenn die bedingte Entwicklungsdauer von 5 ms auf 8 ms verlängert wird. Jeder Datenpunkt repräsentiert 50 Wiederholungen und Fehlerbalken entsprechen der Standardabweichung. (b) Die Lage der Minima, welche für Ramsey-Streifen nach einer bedingten Entwicklungsdauer von 2 ms, 5 ms, 6 ms, 7 ms und 8 ms beobachtet werden. Ist das Kontroll-Qubit in  $|0\rangle$  initialisiert (rote Pfeile), so verschieben sich die Minima hin zu größeren Ramsey-Phasen  $\varphi$ . Ist das Kontroll-Qubit hingegen in  $|1\rangle$  präpariert (blaue Pfeile), präzediert das Ziel-Qubit entgegengesetzt. Jeder Pfeil repräsentiert zehn Ramsey-Streifen mit je 50 Wiederholungen und Fehlerbalken kennzeichnen die Standardabweichung.

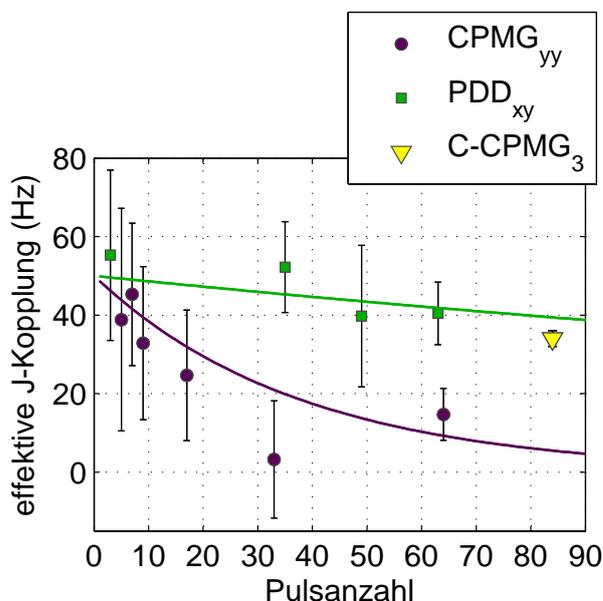
nach 8 ms beobachtet werden kann, verdeutlicht, dass das Ziel-Qubit nun während dieser Dauer von der rauschbehafteten Umgebung entkoppelt wird. Diese Zeit ist mit der Kohärenzzeit von  $10(1)$  ms, die für einen Ein-Qubit-Zustand mit einer vergleichbaren Pulssequenz ermittelt wurde (vgl. Abbildung 7.10), veträglich. Die Geschwindigkeit der Dynamik, bei der es sich um eine Präzession des Spins handelt, entspricht der Stärke der J-Kopplung und somit lässt sich diese aus der Verschiebung der Streifen bestimmen (vgl. Abschnitt 4.8). Aus der Verschiebung in Abbildung 7.14 (a) folgt eine Kopplungsstärke von  $J_{12} = 2\pi \times 35(5)$  Hz. Die Abhängigkeit dieser Dynamik von dem Eingangszustand des Kontroll-Qubits wird nachgewiesen, indem die Experimente wiederholt werden, nachdem das Kontroll-Qubit jeweils in  $|1\rangle$  initialisiert worden ist. Die Minima der Streifen werden nun für sich verlängernde bedingte Entwicklungsdauern zu kleineren Ramsey-Phasen  $\varphi$  hin verschoben (vgl. Abb. 7.14 (b)). Aus diesem lässt sich schließen, dass die Präzession nun in die andere Richtung erfolgt.

Für eine Dauer von 8 ms folgt eine bedingte Phasenverschiebung von etwa  $\pi/2$  und die Minima der Interferenzstreifen sind bei  $\varphi = 3\pi/2$  oder bei  $\varphi = \pi/2$  zu finden. Ein Ramsey- $\pi/2$ -Puls mit der Phase  $3\pi/2$  würde somit das Ziel-Qubit in den Zustand  $|0\rangle$  bzw.  $|1\rangle$  überführen, je nachdem wie das Kontroll-Qubit präpariert worden ist. Aus dieser bedingten Dynamik wird dann im Abschnitt 7.3.4 ein CNOT-Gatter realisiert.

### 7.3.2. Robuste dynamische Entkopplung von bedingter Quantendynamik

Um nun zu untersuchen, wie Pulsfehler der dynamischen Entkopplungspulse gegebenenfalls die zu stabilisierende Dynamik beeinträchtigen, wird die Pulsanzahl variiert und die Verschiebung der Interferenzstreifen beobachtet. Aus der Phasenlage der Streifen nach einer bestimmten bedingten Entwicklungsdauer ergibt sich die zeitliche Änderung der Ramsey-Streifen und somit die Präzessionsgeschwindigkeit des Ziel-Qubits. Diese entspricht der effektiven J-Kopplung, die somit gemessen werden kann (vgl. Abschnitt 4.8). Im Detail werden nun zwei unterschiedliche Arten von dynamischen Entkopplungssequenzen untersucht. Die eine ist die symmetrische  $\text{CPMG}_{yy}$  und die andere die isotrope  $\text{PDD}_{xy}$  (vgl. Abschnitt 7.1.4). Die Pulsanzahlen sind für beide Sequenzen jeweils ungerade, was die Ergebnisse jedoch nicht einschränkt. Außerdem wird ebenfalls die C- $\text{CPMG}_3$ -Sequenz mit ihren 84 Pulsen angewandt und die Resultate verglichen.

Wie man in Abbildung 7.15 erkennen kann, wird die effektive Kopplungsstärke bei



**Abbildung 7.15:** Einfluss von Pulsfehlern auf die bedingte Zwei-Qubit-Dynamik. Für unterschiedliche Arten von dynamischen Entkopplungssequenzen wird die Anzahl der Pulse variiert und die effektive Kopplungsstärke zwischen den beiden Qubits gemessen. Für die  $\text{CPMG}_{yy}$ -Sequenz reduziert sich die J-Kopplung mit steigender Pulsanzahl aufgrund von Pulsfehlern. Für die  $\text{PDD}_{xy}$ - und die C- $\text{CPMG}_3$ -Sequenz hingegen wird die effektive Kopplung von den Pulsen nur wenig beeinträchtigt.

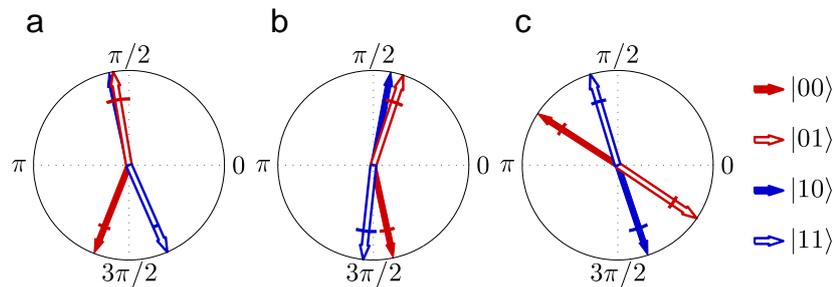
Verwendung der  $\text{CPMG}_{yy}$ -Sequenz mit steigender Pulsanzahl deutlich verringert. Aus der Anpassung eines exponentiellen Zerfalls an die Daten ergibt sich eine charakteristische Pulszahl von 38(14) Pulsen, mit der die anfängliche Kopplung von  $2\pi \times 50$  Hz zerfällt. Darüber hinaus ließ sich beobachten, dass der Kontrast der Ramsey-Streifen nach 2 ms für 5 bzw. 33 Pulse statistisch nicht signifikant abweicht (0,68(8) bzw. 0,75(8)). Daraus lässt sich schließen, dass die Pulsfehler zwar die Dynamik unterdrücken, jedoch die Kohärenz des Zustands nicht beeinträchtigen. Somit führen die Pulsfehler der untersuchten Sequenz dazu, dass das Qubit in seinem Anfangszustand  $1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$  festgehalten wird. Für die Verwendung der  $\text{PDD}_{xy}$ -Sequenz lässt sich ein völlig anderes Verhalten beobachten. Die effektive Kopplungsstärke bleibt nahezu konstant und die Anpassung eines exponentiellen Zerfalls führt zu einer charakteristischen Pulsanzahl von mehr als 200 Pulsen. Somit führen Pulsfehler hier nicht zu einer Beeinträchtigung der Dynamik. Der beobachtete Streifenkontrast hingegen verringerte sich nach 5 ms von 0,50(13) für 35 Pulse zu 0,22(13) für 63 Pulse. Daran zeigt sich, dass die Pulsfehler hier zu einem scheinbar chaotischen Verhalten führen können (analog zur  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz in Abbildung 7.12). Wird die C- $\text{CPMG}_3$ -Sequenz angewandt, so zeigt sich auch hier eine deutliche effektive Kopplung und darüber hinaus auch ein deutlicher Kontrast von 0,58(6). Die grundlegenden Erkenntnisse, dass für die  $\text{CPMG}_{yy}$ -Sequenz Pulsfehler die Dynamik aufgrund der J-Kopplung unterdrücken können und die C- $\text{CPMG}_3$ -Sequenz in dieser Hinsicht robuster ist, konnten ebenfalls in Simulationsrechnungen bestätigt werden. Bei diesen werden für den experimentellen Aufbau typische Pulsfehler wie eine Verstimmung und Pulsflächenfehler angenommen. Weitere Informationen dazu finden sich in dem Anhang J.

Im Anschluss werden drei Sequenzen anhand ihrer Leistungsfähigkeit, eine bedingte Dynamik zu stabilisieren, mit Hilfe von Ramsey-Messungen verglichen. Zuerst wird das Zwei-Qubit-System in einem der Basiszustände  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle \text{ und } |11\rangle\}$ <sup>6</sup> initialisiert und dann das Ramsey-Experiment an dem Ziel-Qubit durchgeführt. Während einer bedingten Entwicklungsdauer wird eine Sequenz von dynamischen Entkopplungspulsen eingestrahlt. Die Lage der beobachteten Streifenminima wird schließlich für die vier unterschiedlichen Anfangszustände in einem Zeigerdiagramm dargestellt, was in der Abbildung 7.16 zu finden ist.

Für die  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz mit 24 Pulsen (a) sind die Interferenzstreifen nach 5 ms abhängig vom Eingangszustand des Kontroll-Qubits um etwa  $\pi/2$  verschoben. Die Minima für die Anfangszustände, in denen das Ziel-Qubit in  $|0\rangle$  präpariert ist ( $|00\rangle$  und  $|10\rangle$ ) finden sich somit bei  $\varphi \approx 3\pi/2$  bzw.  $\varphi \approx \pi/2$  (ähnlich wie in Abbildung 7.14 b). Ist das Ziel-Qubit in  $|1\rangle$  initialisiert, so liegt das Minimum der Interferenzstreifen für eine verschwindende bedingte Entwicklungszeit bei  $\varphi = 0$  (nicht dargestellt) und nach 5 ms ist das Minimum zu  $\varphi \approx \pi/2$  ( $|01\rangle$ ) bzw.  $\varphi \approx 3\pi/2$  ( $|11\rangle$ ) verschoben. Ein

---

<sup>6</sup>Das erste Qubit ist hierbei das Kontroll- und das zweite das Ziel-Qubit.



**Abbildung 7.16.:** Bedingte Quantendynamik während drei unterschiedlicher dynamischer Entkopplungssequenzen. Ramsey-Streifen werden detektiert und die Phasenlage der Minima in je einem Zeigerdiagramm dargestellt. Bei Verwendung der  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz (a, 24 Pulse) oder der  $\text{C-CPMG}_3$  (b, 84 Pulse) während der bedingten Entwicklungsdauer sind die Minima entweder bei  $\varphi = 3\pi/2$  oder  $\varphi = \pi/2$  zu finden, je nachdem, wie das Kontroll-Qubit initialisiert worden ist. Wird hingegen die  $\text{PDD}_{xy}$ -Sequenz verwendet, so sind alle Minima zusätzlich um 0,8 rad verschoben (siehe Text für Details) und die relative Phasenverschiebung für unterschiedliche Eingangszustände des Kontroll-Qubits ist kleiner als  $\pi$ . Die Daten entsprechen dem Durchschnitt von 10 Ramsey-Messungen (jeweils 25 Datenpunkte und 100 Wiederholungen); Fehlerbalken entsprechen der Standardabweichung.

Ramsey-Puls mit der Phase  $\varphi = 3\pi/2$  führt dann zu einer bedingten Zustandsänderung des Ziel-Qubits.

Für die  $\text{C-CPMG}_3$ -Sequenz mit 84 Pulsen sind die Phasenlagen qualitativ vergleichbar, falls die bedingte Entwicklungsdauer auf 8 ms erhöht wird. Dies ist notwendig, weil die erhöhte Pulszahl die effektive Kopplungsstärke reduziert (siehe Abbildung 7.15). Im Gegenzug erlaubt die höhere Pulszahl eine längere Kohärenzzeit (vgl. Abbildung 7.11 a). Die  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz erlaubt es hingegen nicht, die Pulsanzahl entsprechend zu erhöhen, da das klassische Rauschen aufgrund von Pulsfehlern den Effekt der dynamischen Entkopplung überwiegt (vgl. Abbildung 7.12).

Für die  $\text{PDD}_{xy}$ -Sequenz sind 49 Pulse notwendig um nach 5,5 ms noch einen guten Streifenkontrast beobachten zu können. In der größeren Zahl von notwendigen Pulsen zeigt sich die schlechtere Leistungsfähigkeit dieser Sequenz, das Quantensystem vom Umgebungsrauschen zu entkoppeln. Die relative Phase zwischen den Streifen für die unterschiedliche Eingangszustände des Kontroll-Qubits (zum Beispiel  $|00\rangle$  und  $|10\rangle$ ) ist dann noch kleiner als  $\pi$ . Mögliche Pulsfehler führen auch hier zu einer verringerten effektiven Kopplungsstärke und somit einer effektiv verlangsamten Dynamik. Eine Verlängerung der bedingten Entwicklungsdauer war nicht möglich, da mehr Pulse zu

einem verschwindenden Streifenkontrast führten. Es fällt außerdem auf, dass die Lage der Minima nicht symmetrisch um  $\pi$  angeordnet sind, sondern das Ziel-Qubit eine zusätzliche relative Phase von 0,8 rad erhält. Eine Erklärung dieser zusätzlichen Drehung um die  $z$ -Achse ist eine starke Rauschkomponente. Die PDD-Sequenz entspricht einer Filterfunktion, die Harmonische einer Frequenz von  $\omega = 1/(2\tau)$  nicht unterdrückt (vgl. Abschnitt 7.1.4). Mit dem Pulsabstand  $\tau = 110 \mu\text{s}$  folgt somit eine dominante Rauschkomponente bei Harmonischen von etwa 4,5 kHz. Die anderen untersuchten Pulssequenzen hatten andere Pulsabstände und somit waren sie auf diese Störquelle, bei der es sich beispielsweise um Regelschwingungen der Stromtreiber für die Helmholtz-Spulen (vgl. Abschnitt 3.2) handeln kann, nicht sensitiv. Neben dieser zusätzlichen Phase muss bei der PDD<sub>xy</sub>-Sequenz auch die ungerade Pulszahl beachtet werden. Diese führt effektiv zu einem zusätzlichen NOT-Gatter und verschiebt die Lage aller Minima um  $\pi$ .

### 7.3.3. Zwischenfazit der experimentellen Ergebnisse

Bevor in dem nächsten Unterabschnitt die Realisierung eines CNOT-Gatters vorgestellt und in dem darauffolgenden die Betrachtung auf ein Drei-Qubit-System erweitert wird, sollen die wesentlichen experimentellen Erkenntnisse der vorhergehenden Unterabschnitte kurz zusammengefasst werden. Es wurde gezeigt, wie mittels dynamischen Entkopplungspulsen eine bedingte Zwei-Qubit-Dynamik während einer Entwicklungsdauer beobachtet werden kann, welche mehr als eine Größenordnung länger als die Kohärenzzeit des Systems ist. Bei einem Vergleich von unterschiedlichen Pulssequenzen zeigte sich, dass für Sequenzen, die auf Pulsen konstanter Phase beruhen, die beobachtete effektive Kopplung mit steigender Pulszahl mehr und mehr beeinträchtigt wird. Der Grund hierfür sind fehlerhafte Pulse, welche die Dynamik beeinträchtigen. Isotrope Sequenzen hingegen (vgl. Abschnitt 7.1.4) reduzieren die effektive Kopplung nicht. Jedoch ist es möglich, dass Pulsfehler weiterhin zu einem scheinbar chaotischen Verhalten führen und somit klassisches Rauschen hervorrufen, das wiederum die Kohärenz des Systems verringert. In diesem Zusammenhang zeigte sich, dass die PDD<sub>xy</sub>-Sequenz nur unzureichend effektiv ist. Die beschriebene C-CPMG<sub>3</sub>-Sequenz hingegen ist sehr robust gegenüber Pulsfehlern und gleichzeitig sehr effektiv darin, die Auswirkung von Magnetfeldrauschen zu unterdrücken. Aus diesem Grund wird sie im nächsten Unterabschnitt für die Realisierung eines CNOT-Gatters und zur Verschränkungserzeugung benutzt.

### 7.3.4. Realisierung eines CNOT-Gatters

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die dynamische Entkopplung von bedingter Zwei-Qubit-Dynamik demonstriert wurde, behandelt dieser Abschnitt eine mögliche

Anwendung. Konkret handelt es sich dabei um die Realisierung eines CNOT-Gatters (vgl. Abschnitt 2.1.3). Hierbei wird der Zustand des Ziel-Qubits dann und nur dann geändert, falls sich das Kontroll-Qubit im Zustand  $|1\rangle$  befindet. Die Umsetzung beruht auf einer bedingten Spin-Präzession (vgl. Abbildung 7.16). Im Kontext der Quanteninformationsverarbeitung ist dieses Gatter bedeutsam, da es zusammen mit beliebigen Ein-Qubit-Gattern die Konstruktion beliebiger Quantenalgorithmen erlaubt [129]. Zum Nachweis des bedingten Gatters wird das Zwei-Qubit-Register jeweils in einem der vier Basis-Zustände  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  initialisiert und die bedingte Spin-Präzession des Ziel-Qubits beobachtet. Stabilisiert wird die Dynamik des Systems mittels einer C-CPMG<sub>3</sub>-Sequenz mit 84 Pulsen. Die notwendige Gatterdauer  $T_{\text{CNOT}}$ , die der bedingten Entwicklungsdauer entspricht, nach der sich eine Phasenverschiebung von  $\pi/2$  beobachten lässt, beträgt hierbei 8 ms (vgl. Abbildung 7.16 b). Sie hängt von der Stärke der J-Kopplung ab und es gilt

$$J_{12}T_{\text{CNOT}} = \frac{\pi}{2} \quad (7.3.1)$$

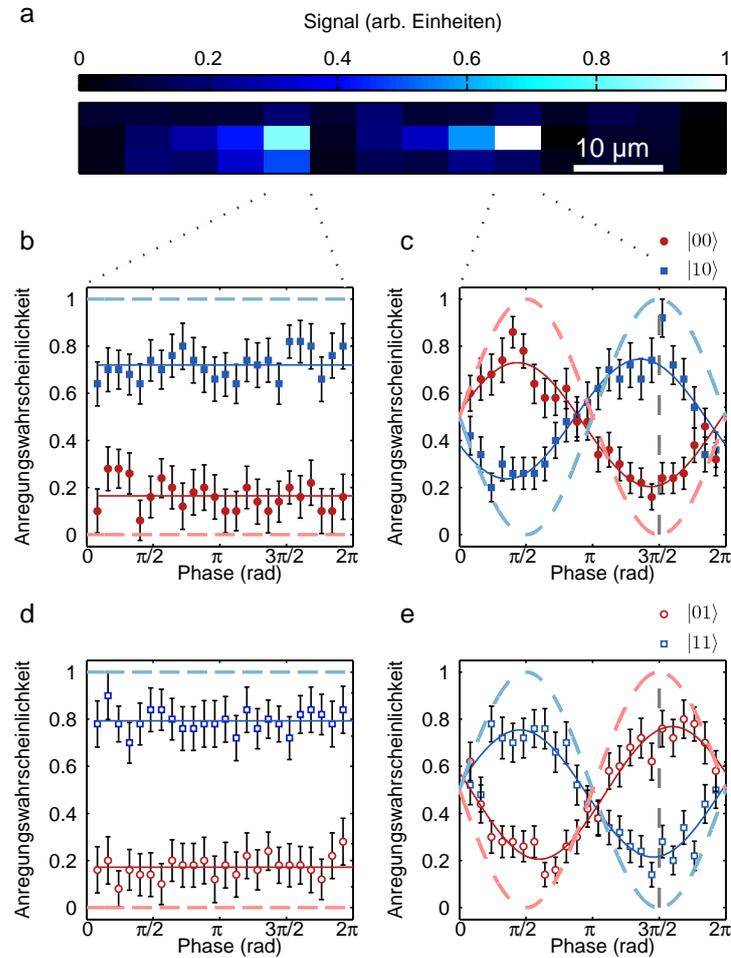
und somit

$$T_{\text{CNOT}} = \frac{\pi}{2J_{12}}. \quad (7.3.2)$$

Am Ende folgt ein  $\pi/2$ -Puls mit variabler Phase, der die Kohärenz des Ziel-Qubits untersucht. Der Zustand eines jeden Qubits wird schließlich mit der EMCCD-Kamera ausgelesen (vgl. Abschnitt 3.5), was an dem vorherigen Detektionssystem, das auf einem Photomultiplier basierte, nicht möglich war (vgl. [29; 56]).

Die Abbildung 7.17 enthält die experimentellen Ergebnisse der Messungen, die an zwei gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen durchgeführt wurden (a). Die linken Plots (b und d) zeigen die Anregungswahrscheinlichkeit des Kontroll-Qubits und die rechten (c und e) die des Ziel-Qubits für die unterschiedlichen Eingangszustände. Es ist zu erkennen, dass die Phasenlage der Ramsey-Streifen, die von dem Ziel-Qubit aufgezeichnet werden, gut mit dem Ideal übereinstimmen und eine bedingte Phasenverschiebung von  $\pi/2$  zu beobachten ist. Der Streifenkontrast hingegen weicht, wie auch die Anregungen des Kontroll-Qubits, deutlich von dem Ideal ab. Die Gründe hierfür sind Pulsfehler, Detektionsfehler der verwendeten EMCCD-Kamera<sup>7</sup> und im Falle des Ziel-Qubits eine Dephasierung. Wird die Phase des zweiten Ramsey-Pulses zu  $\varphi = 3\pi/2$  gewählt (gepunktete Linie), so folgt ein Zustandswechsel des Ziel-Qubits, der abhängig von dem Zustand des Kontroll-Qubits ist. In der Abbildung 7.17 c beispielsweise ändert sich der Zustand des Ziel-Qubits nur, falls das Kontroll-Qubit in  $|1\rangle$  initialisiert war. Der Zustand

<sup>7</sup>Bei diesen Messungen wurde das Modell iXon DU-897 (back illuminated) der Firma Andor verwendet. Im Vergleich zu dem Modell iXon Ultra DU-897U-CS0-EXF der gleichen Firma führte dies zu einem größeren Detektionsfehler (vgl. auch Abschnitt 4.3).



**Abbildung 7.17.:** Realisierung eines CNOT-Gatters. In (a) ist die Resonanzfluoreszenz der beiden beteiligten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen dargestellt. Die Anregungswahrscheinlichkeiten des Kontroll- (b und d) bzw. des Ziel-Qubits (c und e) nach Ausführen eines Ramsey-Experiments zeigt die bedingte Dynamik. Für eine Phase des zweiten Ramsey-Pulses von  $\varphi = 3\pi/2$  (gestrichelte vertikale Linie) ergibt sich die Realisierung eines CNOT-Gatters. Jeder Datenpunkt entspricht 50 Wiederholungen und Fehlerbalken repräsentieren die Standardabweichung. Die durchgezogenen Linien entsprechen einer Anpassung an die Daten und die gestrichelten Linien entsprechen der idealen Vorhersage. Abweichungen der Messdaten von der Vorhersage beruhen auf technischen Ungenauigkeiten.

**Tabelle 7.1.:** Zustands-Fidelities nach Anwendung des CNOT-Gatters. Für die unterschiedlichen Eingangszustände wird nach Anwendung des Gatters die Zustandsfidelity zwischen dem resultierenden und dem idealen Zustand ermittelt. Die Auswertung beinhaltet die einzelnen Fidelities des Kontroll- und Ziel-Qubits und die des vollständigen Zwei-Qubit-Systems.

Eingangszustand	$F_{\text{Kontroll}}$	$F_{\text{Ziel}}$	$F_{\text{Kontroll}} \times F_{\text{Ziel}}$	$F$
$ 00\rangle$	0,74(6)	0,76(3)	0,56(5)	0,65(8)
$ 10\rangle$	0,83(4)	0,79(6)	0,66(7)	0,60(5)
$ 01\rangle$	0,72(6)	0,75(4)	0,54(7)	0,62(6)
$ 11\rangle$	0,79(5)	0,77(4)	0,61(6)	0,57(6)
$ +0\rangle$	-	-	-	0,59(7)

des Kontroll-Qubits wird durch die Dynamik nicht geändert. Da diese Realisierung des CNOT-Gatters lediglich Mikrowellenpulsen und Wartezeiten entspricht, kann die Rolle der beiden Qubits ohne großen experimentellen Aufwand getauscht werden. In einem solchen Fall würden lediglich die beiden  $\pi/2$ -Pulse mit den Phasen 0 bzw.  $3\pi/2$  an das andere Qubit adressiert.

Die Güte des Gatters lässt sich mit der Zustands-Fidelity nach der Pulssequenz charakterisieren. Aus den Ramsey-Streifen des Ziel-Qubits und den mittleren Anregungswahrscheinlichkeiten des Kontroll-Qubits können die Fidelities der Ein-Qubit-Zustände  $F_{\text{Kontroll}}$  bzw.  $F_{\text{Ziel}}$  ermittelt werden (vgl. Abschnitt 4.7). Diese Ergebnisse sind in der Tabelle 7.1 zusammengefasst und es ergibt sich eine mittlere Ein-Qubit-Fidelity von 0,77(3). Unter der Voraussetzung, dass der resultierende Zwei-Qubit-Zustand am Ende der Pulssequenz nicht verschränkt ist, beschreibt das Produkt  $F_{\text{Kontroll}} \times F_{\text{Ziel}}$  der Ein-Qubit-Fidelities auch die Fidelity des Zwei-Qubit-Zustands. Das Produkt findet sich daher ebenfalls in der Tabelle und es ergibt sich hierfür ein Mittelwert von 0,59(5).

Bisher wurde der bedingte Zustandswechsel des Ziel-Qubits untersucht. Bei allen Zuständen handelte es sich dabei um klassische Energieeigenzustände. Zum Nachweis der Quanteneigenschaften des CNOT-Gatters wird es zur Erzeugung eines verschränkten Bell-Zustands (vgl. Abschnitt 2.1.5) verwendet. Das Kontroll-Qubit wird hierzu in einem Superpositionszustand initialisiert und das Ziel-Qubit im Grundzustand. Das CNOT-Gatter führt dann zu dem verschränkten Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\alpha}|1\rangle)|1\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + e^{i\alpha}|11\rangle). \quad (7.3.3)$$

Experimentell wird eine nahezu gleiche Pulssequenz wie zuvor ausgeführt, aber erst nachdem das Kontroll-Qubit mittels eines zusätzlichen  $\pi/2$ -Pulses in einem Superpo-

sitionszustand initialisiert worden ist. Die Phase des letzten  $\pi/2$  Pulses, der an das Ziel-Qubit adressiert wird beträgt  $3\pi/2$ , was zu dem bedingten Zustandswechsel führt (vgl. Abbildung 7.17). Der Nachweis der Verschränkung des resultierenden Zustand erfolgt aus der Beobachtung von nicht-klassischen Korrelationen. Die Korrelationen werden dabei durch die Parität

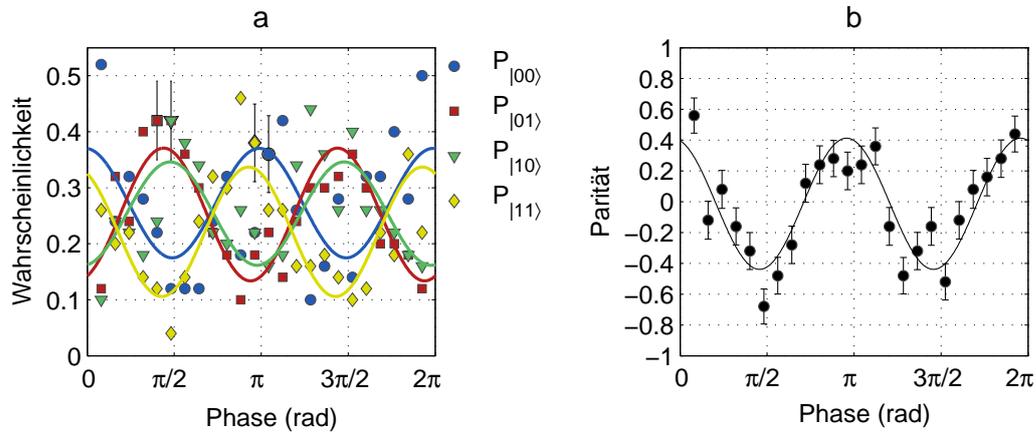
$$\Pi = P_{|00\rangle} + P_{|11\rangle} - (P_{|01\rangle} + P_{|10\rangle}) \quad (7.3.4)$$

beschrieben [93]. Hierbei bezeichnet  $P_{|nm\rangle}$ ,  $n, m = 0,1$  die Wahrscheinlichkeit, nach der Detektion den Zustand  $|nm\rangle$  vorzufinden.

Als erstes wird die Parität in der  $z$ -Basis gemessen. Hierzu erfolgt unmittelbar nach Ende der Pulssequenz, die das CNOT realisiert, die Projektionsmessung und der Zustandsnachweis jedes einzelnen Qubits. Aus der Wiederholung dieser Messungen lässt sich die Parität  $\Pi_z$  entlang der  $z$ -Basis bestimmen. Aus den Daten folgt der Messwert  $\Pi_z=0.52(10)$ , der die Korrelation in einer Messbasis nachweist. Der Nachweis des nicht-klassischen Charakters dieser Korrelationen erfolgt durch ihre Beobachtung in unterschiedlichen Messbasen. Experimentell wird diese Messung in unterschiedlichen Basen durch zusätzliche Drehungen der Qubits realisiert. Hierfür wird unmittelbar nach der Pulssequenz zur Erzeugung des verschränkten Zustands zusätzlich jeweils ein  $\pi/2$ -Pulse an jedes Qubit adressiert. Die Phasen dieser beiden Pulse sind identisch aber variabel. Im Anschluss an diese Drehungen der Messbasis folgt der Zustandsnachweis und die Beobachtung von Korrelationen, die erneut durch die Parität (vgl. (7.3.4)) beschrieben werden. In der Abbildung 7.18 sind die experimentellen Daten enthalten. Die Wahrscheinlichkeiten die einzelnen Basiszustände zu detektieren sind in (a) zu finden. Die Tatsache, dass die Zustände  $|01\rangle$  und  $|10\rangle$  mit der EMCCD-Kamera unterschieden werden können, ist eine Weiterentwicklung im Vergleich zu den vorherigen Experimenten, bei denen die Zustandsdetektion auf einem Photomultiplier basierte [29; 56]. Man kann deutlich erkennen, dass die Wahrscheinlichkeiten  $P_{|00\rangle}$  und  $P_{|11\rangle}$  bzw.  $P_{|01\rangle}$  und  $P_{|10\rangle}$  sich jeweils gleich verhalten. In der Teilabbildung (b) ist die resultierende Parität in Abhängigkeit von der Phase dargestellt. Die für einen verschränkten Zwei-Qubit-Zustand typische Oszillation mit der doppelten Phase ist deutlich erkennbar, wodurch die nicht-klassische Natur der Korrelationen experimentell nachgewiesen werden kann [93]. Zur weiteren Quantifizierung dient die Fidelity des erzeugten Bell-Zustands. Diese lässt sich aus der Parität entlang der  $z$ -Basis  $\Pi_z$  und der für unterschiedliche Basen bestimmen und es gilt [93]

$$F_{\text{Bell}} = \frac{\Pi_z + 1}{4} + \frac{V}{2}. \quad (7.3.5)$$

Hierbei bezeichnet  $V$  die Amplitude der oszillierenden Parität  $\Pi(\phi)$  für unterschiedliche Basen entlang  $\cos(\phi)\sigma_x + \sin(\phi)\sigma_y$  (vgl. Abbildung 7.18 b; hier ist  $V=0,42(6)$ ). Experi-



**Abbildung 7.18.:** Beobachtung von nicht-klassischen Korrelationen. (a) Die Wahrscheinlichkeiten die Zustände  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  oder  $|11\rangle$  zu detektieren hängen von der Wahl der Messbasis ab. (b) Die Parität (vgl. Gleichung (7.3.4)) in unterschiedlichen Messbasen zeigt die für einen verschränkten Zwei-Qubit-Zustand zu erwartende Oszillation mit der doppelten Phase. Jeder Datenpunkt entspricht 50 Wiederholungen. In (a) wurden zur besseren Übersicht nur exemplarische Fehlerbalken, welche die Standardabweichung repräsentieren, gezeigt.

mentell folgt  $F_{\text{Bell}}=0,59(7)$  (siehe auch Tabelle 7.1). Eine beobachtete Bell-Zustandsfidelity größer als 0,5 beweist die Erzeugung von Verschränkung in dem Zwei-Qubit-System [93].

Die gemessenen Zustandsgüten größer als 0,57(6) (vgl. Tab. 7.1) bilden eine untere Schwelle für die Güte des CNOT-Gatters, da sie auch Fehler der Zustandspräparation und der Detektion beinhalten. Darüber hinaus erlauben sie den Vergleich der Leistungsfähigkeit unterschiedlicher dynamischer Entkopplungssequenzen. Bei Verwendung eines Photomultipliers statt der verwendeten EMCCD-Kamera ergab sich beispielsweise für die C-CPMG<sub>3</sub>-Sequenz eine Bell-Zustandsgüte von 0,59(4) und für die CPMG<sub>xy</sub>-Sequenz mit 24 Pulsen (während nur 5 ms) eine von 0,64(4) [70]. Diese beiden Ergebnisse sind miteinander verträglich und demonstrieren, dass beide Sequenzen in der Lage sind, die Erzeugung von Verschränkung während 8 ms bzw. 5 ms zu stabilisieren. Die C-CPMG<sub>3</sub>-Sequenz mit den 84 Pulsen ist darüber hinaus in der Lage auch langsamere CNOT-Gatter, die 11 ms benötigen, zwischen nicht-benachbarten Qubits in einem Drei-Qubit-System zu stabilisieren [29; 56].

### 7.3.5. Dynamische Entkopplung in einem Drei-Qubit-System

In dem Folgenden wird die dynamische Entkopplung eines Drei-Qubit-Systems diskutiert. Hierbei sind alle drei Qubits miteinander gekoppelt und für eine axiale Fallenfrequenz von  $\nu_1 = 2\pi \times 123,5$  kHz ergeben sich die Kopplungskonstanten [29]

$$J_{12} = 2\pi \times 32(4) \text{ Hz}, \quad (7.3.6)$$

$$J_{23} = 2\pi \times 33(3) \text{ Hz}, \quad (7.3.7)$$

$$J_{13} = 2\pi \times 18(2) \text{ Hz}. \quad (7.3.8)$$

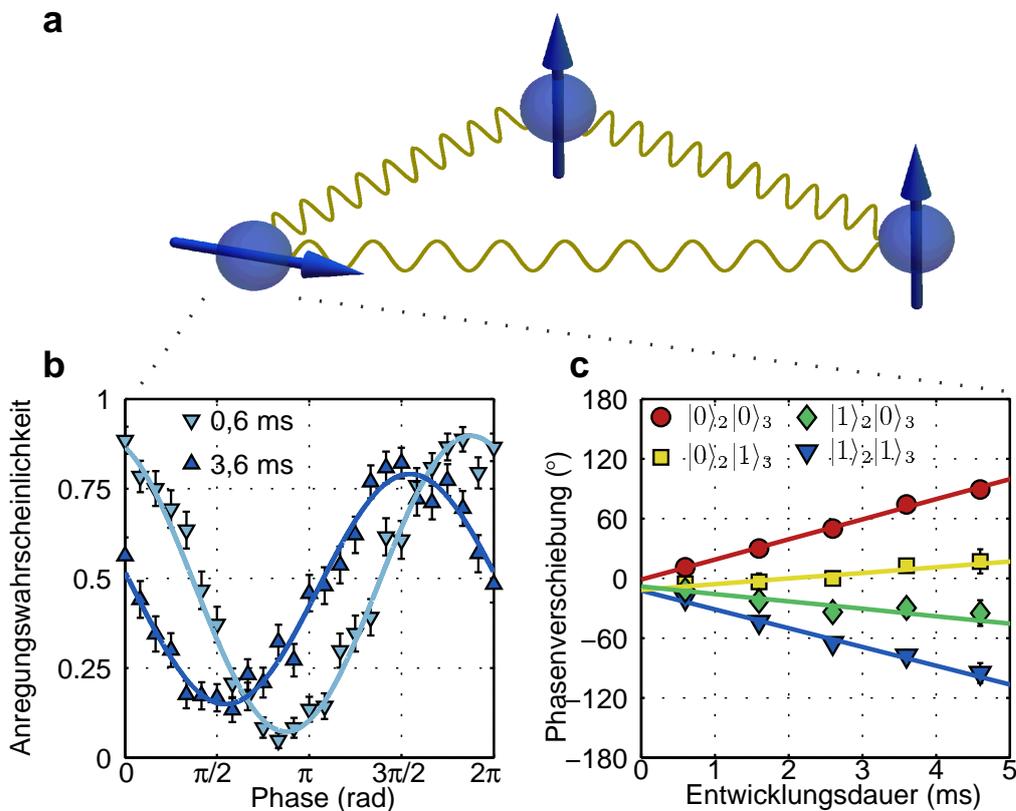
Die experimentelle Diskussion des Drei-Qubit-Systems dient der exemplarischen Untersuchung von grundlegenden Operationen innerhalb eines größeren Mehr-Qubit-Systems. Diese sind das Ausnutzen von mehreren Zwei-Qubit-Kopplungen und das gezielte effektive Unterdrücken der Kopplungen eines Qubits an die anderen Qubits. Diese Methoden, die in diesem Abschnitt unter dem Gesichtspunkt der dynamischen Entkopplung diskutiert werden, finden Anwendung bei der optimierten Realisierung eines Quantenalgorithmus, der in Kapitel 9 vorgestellt wird.

Als Erstes wird nun die simultane Wirkung von mehreren Zwei-Qubit-Kopplungen auf ein einzelnes Qubit untersucht. Um die Kopplungen zu ermitteln, wird wie zuvor die Dynamik des Systems für unterschiedliche Anfangszustände untersucht. Alle Qubits sind hierbei in Hyperfeinzuständen kodiert und die Zustände lauten  $|0\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  bzw.  $|1\rangle \equiv |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1\rangle$ . Die interne Dynamik des System wird mittels Ramsey-Experimenten untersucht (vgl. Abschnitt 4.6), bei denen eines der Qubits in einem Superpositionszustand und die anderen in Energieeigenzuständen initialisiert sind. Die Zeitentwicklung des Qubits im Superpositionszustand entspricht dann - im Bild der Bloch-Kugel - einer Präzession des Zustandsvektors. Die Zustände der Qubits in den Energieeigenzuständen ändern sich bis auf einen Phasenfaktor nicht. Wie zuvor wird die Spinpräzession mittels der Beobachtung von Ramsey-Streifen nachgewiesen. Um die Dephasierung zu unterdrücken wird eine KDD-Sequenz von 20 dynamischen Entkopplungspulsen verwendet (siehe Abschnitt 7.1.4). Diese Sequenz ist robust gegenüber Pulsfehlern und erlaubt eine Stabilisierung der bedingten Dynamik. Da sie außerdem die Konstruktion von Pulssequenzen mit einer variableren Pulsanzahl erlaubt<sup>8</sup>, wird sie hier gegenüber der C-CPMG<sub>3</sub>-Sequenz bevorzugt. Damit alle Kopplungen innerhalb des Systems erhalten bleiben und nicht etwa von dynamischen Entkopplungspulsen effektiv unterdrückt werden, werden die Pulse nahezu simultan an jedes der Qubits adressiert (vgl. Abbildung 7.5).

In der Abbildung 7.19 sind die experimentellen Ergebnisse dargestellt, wenn das erste Qubit des Registers mittels Ramsey-Experimenten untersucht wird. Für die Initia-

---

<sup>8</sup>Die Pulsanzahl kann ein beliebiges Vielfaches von 20 sein.



**Abbildung 7.19.:** Untersuchung der simultanen Kopplung von Qubit 1 an die anderen beiden. (a) Das erste Qubit befindet sich in einer Superposition und die anderen jeweils in einem Energieeigenzustand. (b) Anhand der Beobachtung von Ramsey-Streifen nach unterschiedlich langen Entwicklungsdauern lässt sich auf die Präzision schließen. (c) Für die Initialisierung der Qubits 2 und 3 in unterschiedlichen Eingangszuständen offenbart sich die Abhängigkeit der Dynamik des ersten Qubits von den Zuständen der anderen Qubits. Für die unterschiedlichen Eingangszustände der Qubits 2 und 3 erfolgt die Spinpräzession von Qubit 1 mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten.

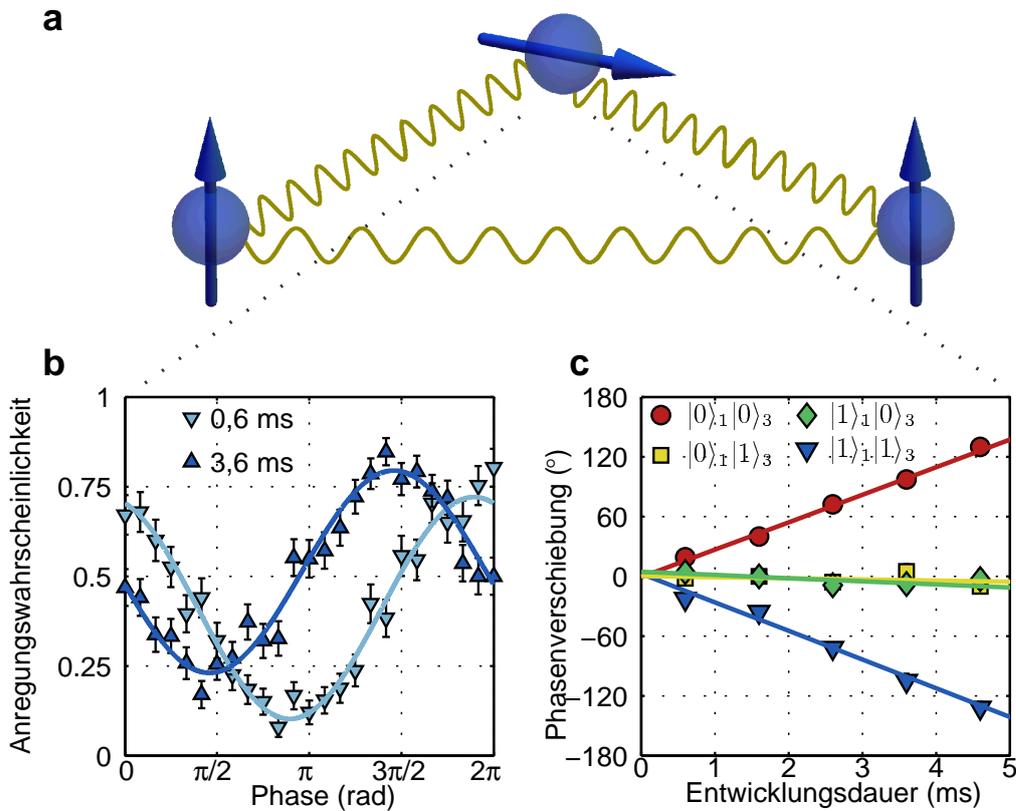
Initialisierung der anderen beiden Qubits in dem Zustand  $|1\rangle_2|1\rangle_3$  (der Index bezeichnet das Qubit) werden die Ramsey-Streifen nach zwei unterschiedlichen bedingten Entwicklungsdauern von 0,6 ms bzw. 3,6 ms beobachtet. Wie sich in der Teilabbildung b zeigt, verschieben sich die Ramsey-Streifen des ersten Qubits. Für eine verschwindende Entwicklungsdauer ist das Minimum bei einer Phase von  $\pi$  zu finden (nicht

dargestellt). Für eine längere Entwicklungsdauer wird das Minimum zu immer kleineren Phasen hin verschoben und nach 3,6 ms beträgt die Phasenverschiebung knapp  $\pi/2$ . Der Kontrast der Interferenzstreifen wird mit der Zeit geringer, was auf die Dephasierung zurückzuführen ist. Eine Verwendung von mehr als den 20 dynamischen Entkopplungspulsen kann die Kohärenz des Qubits auch entsprechend länger schützen (vgl. auch Abbildung 7.11). Eine genauere Betrachtung der Kohärenzzeiten findet sich am Ende des Abschnitts. Die Abhängigkeit der Phasenverschiebung von den Anfangszuständen der Qubits 2 und 3 wird bei Wiederholung dieser Ramsey-Experimente für unterschiedliche Eingangszustände  $\{|0\rangle_2|0\rangle_3, |0\rangle_2|1\rangle_3, |1\rangle_2|0\rangle_3, |1\rangle_2|1\rangle_3\}$  und unterschiedliche bedingte Entwicklungsdauern offenbar. In der Teilabbildung c ist die resultierende Phasenverschiebung des ersten Qubits in einem linearen Plot aufgetragen. Zeigerdiagramme, wie sie für die Darstellung in Abbildung 7.14 b verwendet wurden, wären hier zu unübersichtlich. Es sind deutlich vier unterschiedliche Präzessionen zu identifizieren. Die Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Entwicklungsdauer ist nahezu symmetrisch um die Zeitachse angeordnet, was auf zwei Drehrichtungen mit je zwei Präzessionsgeschwindigkeiten schließen lässt. Aus dem Hamiltonoperator (2.5.18) folgt, dass der Verlauf für den Eingangszustand  $|0\rangle_2|0\rangle_3$  auf der effektiven Kopplung  $J_{12} + J_{13}$  basiert. Für den Eingangszustand  $|1\rangle_2|1\rangle_3$  erfolgt die Präzession mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit in die Gegenrichtung. Ist nur eines der beiden Qubits angeregt und das andere in seinem Grundzustand ( $|0\rangle_2|1\rangle_3$  bzw.  $|1\rangle_2|0\rangle_3$ ), so wirken die Kopplungen gegeneinander und führen zu einer verlangsamten Präzession mit der Winkelgeschwindigkeit  $|J_{12} - J_{13}|$ . Aus den unterschiedlichen Fällen, in denen die Spin-Präzession mit der Summe oder der Differenz der Kopplungskonstanten  $J_{12}$  und  $J_{13}$  erfolgt, können diese aus den Steigungen in der Abbildung 7.19 c bestimmt werden (siehe auch die Beschreibung dieser Methode im Abschnitt 4.8). Experimentell folgt  $J_{12} + J_{13} = 2\pi \times 54(6)$  Hz und  $J_{12} - J_{13} = 2\pi \times 18(7)$  Hz<sup>9</sup>. Aus diesem Gleichungssystem lassen sich auch die einzelnen Kopplungskonstanten bestimmen und es folgt  $J_{12} = 2\pi \times 36(5)$  Hz bzw.  $J_{13} = 2\pi \times 18(5)$  Hz, was im Einklang mit den Resultaten aus [29] ist.

In gleicher Weise wird das mittlere Qubit untersucht und die Ergebnisse finden sich in der Abbildung 7.20. Nun wirken die beiden Nächst-Nachbar-Kopplungen  $J_{12}$  und  $J_{23}$  auf Qubit 2. Da diese stärker als die langreichweitige Kopplung  $J_{13}$  aus dem vorherigen Fall sind, ist die Phasenverschiebung in 7.20 b nun größer als die in der Abbildung 7.19 b. Bei der Untersuchung der Zustands- und Zeitabhängigkeit (vgl. Teilabbildung c) wird dieses ebenfalls offenbar. Für die Eingangszustände  $|0\rangle_1|0\rangle_3$  bzw.  $|1\rangle_1|1\rangle_3$  erfolgt die Präzession des Qubits 2 mit der Summe der Kopplungen, für die nun experimentell

---

<sup>9</sup>Hierbei wird über die resultierenden Phasenverschiebungen für die beiden symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anfangszustände gemittelt.



**Abbildung 7.20.:** Untersuchung der simultanen Kopplung von Qubit 2 an die anderen beiden. (a) Das zweite Qubit befindet sich in einer Superposition und die anderen jeweils in einem Energieeigenzustand. (b) Anhand der Beobachtung von Ramsey-Streifen nach unterschiedlich langen Entwicklungsdauern lässt sich auf die Präzession schließen. (c) Für die Initialisierung der Qubits 1 und 3 in unterschiedlichen Eingangszuständen offenbart sich die Abhängigkeit der Dynamik.

aus den Steigungen  $J_{12} + J_{23} = 2\pi \times 78(5)$  Hz folgt. Für die Eingangszustände  $|0\rangle_1|1\rangle_3$  bzw.  $|1\rangle_1|0\rangle_3$  kompensieren sich die Kopplungen und da die beiden Kopplungsstärken  $J_{12}$  und  $J_{23}$  in dem harmonischen globalen Fallen-Potenzial identisch sind, präzediert der Spin von Qubit 2 nicht. Experimentell folgt für die Differenz der Kopplungsstärken  $J_{12} - J_{23} = 2\pi \times 3(6)$  Hz. Aus dem Gleichungssystem folgen analog zum vorhergehenden Fall die einzelnen Kopplungsstärken  $J_{12} = 2\pi \times 41(4)$  Hz und  $J_{23} = 2\pi \times 38(4)$  Hz, die verträglich mit vorherigen Messungen sind [29].

Nachdem die Wirkung von mehreren simultanen Kopplungen untersucht worden ist, wird im Weiteren die gezielte Unterdrückung der Kopplung eines ausgewählten Qubits erörtert werden. Eine einfache Methode hierfür ist das Auslassen von dynamischen Entkopplungspulsen an diesem Qubit, während eine Pulssequenz weiterhin an die verbleibenden beiden Qubits adressiert wird (vgl. Abbildung 7.6). In dieser Situation wird das ausgewählte Qubit zu einem Teil der Umgebung, von der das verbleibende gekoppelte Zwei-Qubit-System isoliert wird. Diese Methode wurde in [29] verwendet, um in dem gleichen Drei-Qubit-System CNOT-Gatter zwischen den Qubits 1 und 2 bzw. 1 und 3 auszuführen und verschränkte Zustände zu erzeugen. Der Nachteil dieser Methode besteht darin, dass das entkoppelte Qubit als Teil der Umgebung nicht von ihr isoliert wird und somit schnell dephasiert. Näher wurde diese Methode ebenfalls an einem Zwei-Qubit-System untersucht. Hierbei wurde ein Ramsey-Experiment an einem der Qubits durchgeführt und das andere entweder in  $|0\rangle$  oder  $|1\rangle$  initialisiert. Eine dynamische CPMG<sub>xy</sub>-Entkopplungssequenz mit 24 Pulsen, die in der Lage ist, die bedingte Dynamik zu schützen, wurde dabei lediglich an das Qubit adressiert, an dem auch die Ramsey-Messung stattfand. Aus der auch nach einer bedingten Entwicklungszeit von 5 ms noch verschwindenden Phasenverschiebung ließ sich eine effektiv verschwindende Kopplung von 3(12) Hz zwischen den beiden Qubits nachweisen.

Eine Methode<sup>10</sup>, mit der nun die Kopplung eines Qubits unterdrückt werden kann und dieses aber gleichzeitig weiterhin von der Umgebung isoliert wird, ist die ausgewählte Wiederankopplung [126]. Hierbei handelt es sich um ein Schema, in dem eine Pulssequenz konstruiert wird, die während einer bestimmten Zeit nur ausgewählte Kopplungen wirken lässt. Der Einfluss der anderen Kopplungen wird unterdrückt und die Qubits somit effektiv entkoppelt. Das Problem, ein einzelnes Qubit aus einem Drei-Qubit-System effektiv zu entkoppeln, ist ein Spezialfall und die geeignete Pulssequenz besteht aus einem einzelnen zusätzlichen Spin-Echo-Puls, der an das zu entkoppelnde Qubit adressiert wird. Dieser Einzelpuls wird, wie in der Abbildung 7.7, in der die Entkopplung des zweiten Qubits dargestellt ist, mit der Sequenz aus dynamischen Entkopplungspulsen kombiniert.

In weiteren Experimenten wird die gezielte Entkopplung des ersten Qubits von dem verbleibenden gekoppelten Zwei-Qubit-System untersucht. Die Entkopplung geschieht hierbei mittels eines zusätzlichen Spin-Echo-Pulses, der an das erste Qubit adressiert wird. Hierzu werden auf dem ersten und dem zweiten Qubit wie zuvor Ramsey-Experimente während unterschiedlicher bedingter Entwicklungsdauern und für unterschiedliche Eingangszustände des dritten Qubits durchgeführt. Die experimentellen Ergebnisse sind in der Abbildung 7.21 zu finden. Wie man erkennen kann, zeigen sich für die beiden Qubits Interferenzstreifen mit einem deutlichen Kontrast auch noch nach 5,6 ms, was

---

<sup>10</sup>Eine andere Methode ist die Umkodierung eines Qubits in der magnetfeldunabhängigen Basis des magnetischen  $\pi$ -Übergangs. In dem folgenden Kapitel 8 wird dieser Ansatz experimentell untersucht.

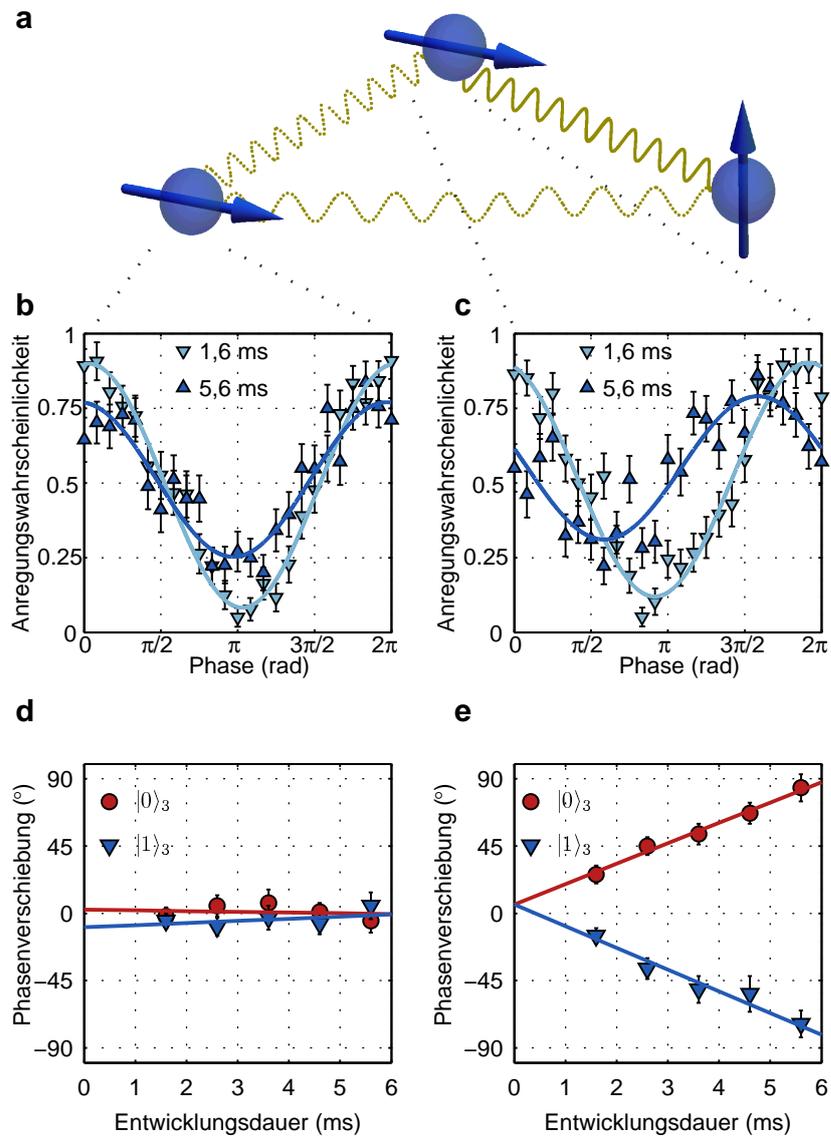
die Leistungsfähigkeit der dynamischen Entkopplungssequenz der Dephasierung entgegenzuwirken demonstriert. Darüber hinaus verschiebt sich die Lage der Interferenzstreifen von Qubit 1 nicht für den Fall, dass das zweite Qubit in dem Superpositionszustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2 + i|1\rangle_2)$  und das dritte in einem der beiden Zustände  $|0\rangle_3$  bzw.  $|1\rangle_3$  initialisiert wurde (vgl. Abbildung 7.21 b und d). Aus der Beobachtung der Streifen lässt sich die Kopplungsstärke  $J_{13} = 2\pi \times (-4(7))$  Hz bestimmen, die somit die Entkopplung der beiden Qubits 1 und 3 nachweist.

Um eine mögliche Kopplung an das Qubit 2 auszuschließen, wurden Experimente wie in Abbildung 7.19 durchgeführt und die Ramsey-Streifen von Qubit 1 für unterschiedliche Eingangszustände ( $\{|0\rangle_2|0\rangle_3, |0\rangle_2|1\rangle_3, |1\rangle_2|0\rangle_3, |1\rangle_2|1\rangle_3\}$ ) des verbleibenden Zwei-Qubit-Systems untersucht. Auch hier konnten wie in der Abbildung 7.21 b keine Phasenverschiebungen von Qubit 1 registriert werden. Experimentell ergaben sich Kopplungsstärken von  $J_{12} = 2\pi \times (-1(6))$  Hz und  $J_{13} = 2\pi \times 1(6)$  Hz. Die effektive Entkopplung von Qubit 1 ist somit experimentell nachgewiesen.

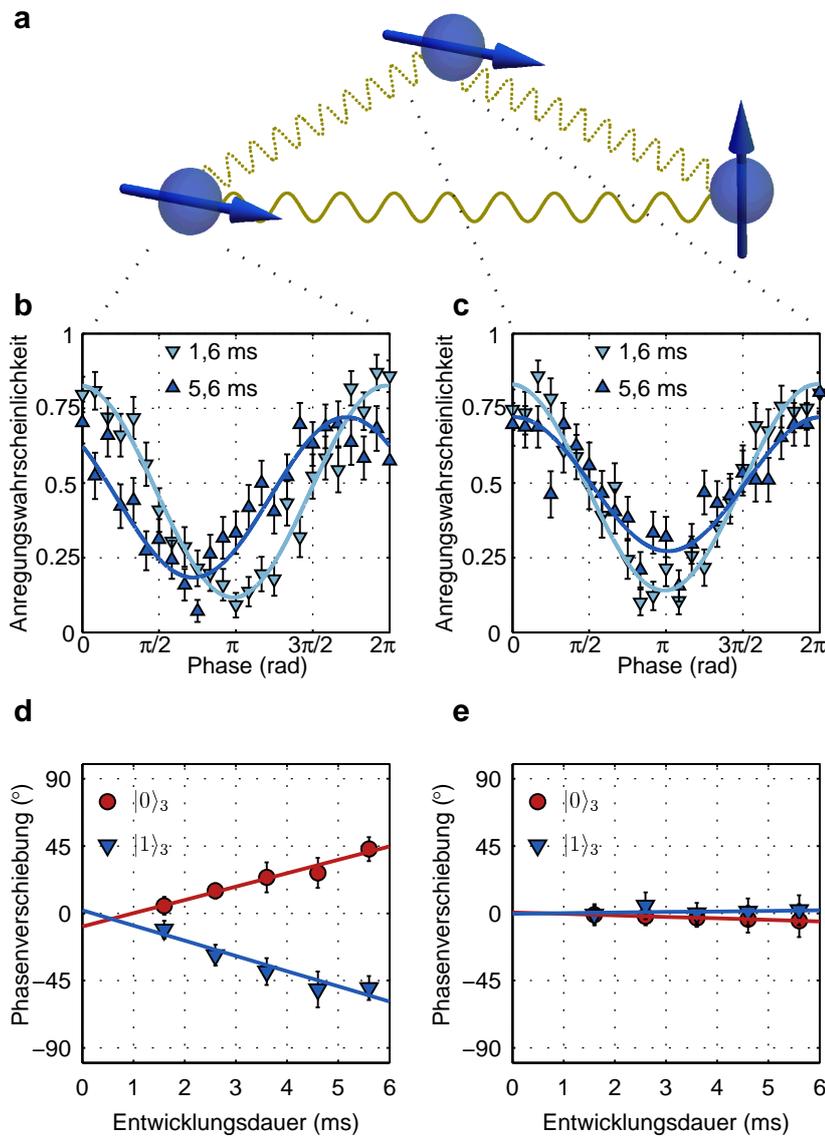
Die erhaltene Kopplung zwischen den beiden Qubits 2 und 3 ist durch die bedingte Zwei-Qubit-Dynamik in den Abbildungen 7.21 c und e ersichtlich. Die Verschiebung der Interferenzstreifen des zweiten Qubits ist einzig abhängig von dem Eingangszustand von Qubit 3. Die Kopplungsstärke ergibt sich zu  $J_{23} = 2\pi \times 39(7)$  Hz, was im Einklang mit den vorherigen Ergebnissen ist.

In ähnlicher Weise kann auch mit einem zusätzlichen Spin-Echo-Puls das mittlere Qubit effektiv entkoppelt werden. Die Abbildung 7.22 enthält die Ergebnisse, falls die Pulssequenz aus der Abbildung 7.7 verwendet wird. Nun ist es das Qubit 2, das keine Phasenverschiebung der Ramsey-Streifen aufweist (vgl. c und e). Die gemessene Kopplungsstärke von  $J_{23} = 2\pi \times (-2(8))$  Hz demonstriert hierbei die Unterdrückung der Kopplung dieses Qubits. In den Teilabbildungen b und d ist die zustandsabhängige Dynamik aufgrund der erhaltenen langreichweitigen Kopplung  $J_{13} = 2\pi \times 27(7)$  Hz offensichtlich.

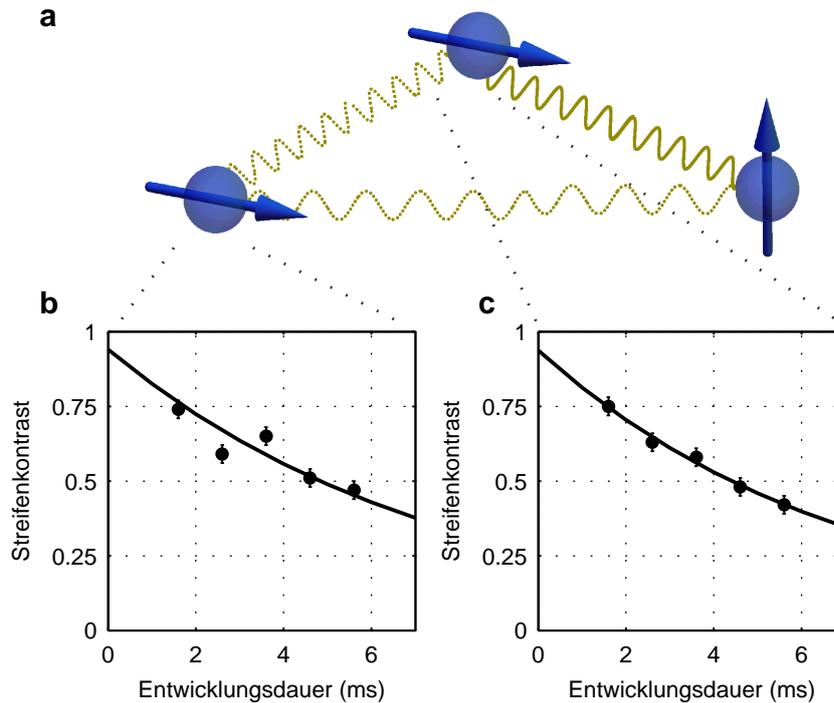
Im Kontext der Quanteninformationsverarbeitung handelt es sich bei den diskutierten Experimenten um die simultane Realisierung eines bedingten Zwei-Qubit-Gatters (siehe das CNOT-Gatter in Abschnitt 7.3.4) und eines Ein-Qubit-Quantenspeichers. Das demonstrierte Entkoppeln eines Qubits (vgl. Abbildungen 7.21 und 7.22) erlaubt ebenfalls die gezielte Untersuchung einzelner Zwei-Qubit-Kopplungen. Somit kann in einem vollständig gekoppelten Drei-Qubit-System erst Qubit 1 isoliert und die Kopplungskonstante  $J_{23}$  gemessen werden. Die Entkopplung von Qubit 3 erlaubt die Bestimmung der Konstanten  $J_{12}$  und die von Qubit 2 dann die von der Konstanten  $J_{13}$ . In dem nächsten Kapitel 8 werden so gezielt unterschiedliche Kopplungstopologien untersucht.



**Abbildung 7.21.:** Untersuchung der effektiven Entkopplung des ersten Qubits von den anderen beiden. (a) Das erste und zweite Qubit befindet sich jeweils in einer Superposition und das dritte in einem Energieeigenzustand. Anhand der Beobachtung von Ramsey-Streifen nach unterschiedlich langen Entwicklungsdauern lässt sich die Dynamik der Qubits 1 und 2 beobachten. Das erste Qubit (b und d) zeigt hierbei keine Präzession und verbleibt im Anfangszustand. Das zweite Qubit hingegen ist weiterhin mit dem dritten gekoppelt und zeigt eine bedingte Dynamik (c und e).



**Abbildung 7.22.:** Untersuchung der effektiven Entkopplung von Qubit 2 von den anderen beiden. (a) Die ersten beiden Qubits befindet sich jeweils in einer Superposition und das dritte in einem Energieeigenzustand. Anhand der Beobachtung von Ramsey-Streifen nach unterschiedlich langen Entwicklungsdauer lässt sich die Dynamik der Qubits 1 und 2 beobachten. Das erste Qubit (b und d) zeigt eine Dynamik, die vom Eingangszustand des dritten abhängt. Das zweite Qubit hingegen verbleibt in seinem Anfangszustand und ist effektiv entkoppelt (c und e).



**Abbildung 7.23.:** Messung der Kohärenzzeiten eines entkoppelten und eines gekoppelten Qubits. Die ersten beiden Qubits befinden sich in Superpositionszuständen (a) und Ramsey-Experimente untersuchen ihre Kohärenz nach einer variierenden Entwicklungsdauer (b und c). Beide Qubits zeigen eine vergleichbare Kohärenzzeit. Die Pulssequenz zur Entkopplung beeinträchtigt somit nicht die dynamische Entkopplung von dem Umgebungsrauschen.

Neben den möglichen Phasenverschiebung zeigen die Ramsey-Streifen eine Kontrastverminderung mit steigender bedingter Entwicklungszeit. In der Abbildung 7.23 ist dieser für die verwendeten 20 dynamischen Entkopplungspulse dargestellt. Als Besonderheit gilt hier die simultane Messung der Kohärenzzeit des gekoppelten Ziel-Qubits während eines bedingten Zwei-Qubit-Gatters und der eines entkoppelten Ein-Qubit-Quantenspeichers herauszustellen. Es ist zu erkennen, dass der Streifenkontrast der beiden Qubits auf der gleichen Zeitskala zerfällt. Aus einer Anpassung an die Datenpunkte ergeben sich Kohärenzzeiten von 7,7(11) ms bzw. 7,1(11) ms. Diese Übereinstimmung zeigt, dass der zusätzliche Spin-Echo-Puls, der an Qubit 1 adressiert wird, die Leistungsfähigkeit der dynamischen Entkopplungssequenz nicht beeinflusst. Darüber hinaus sind diese Kohärenzzeiten innerhalb eines Drei-Qubit-Systems vergleichbar mit denen eines einzelnen Qubits. Für ein solches ergab sich für 24 Pulse aus Abbildung 7.10 b eine Kohärenzzeit von 10(1) ms. Wie in der Abbildung 7.11 dargestellt ist, führen mehr

dynamische Entkopplungspulse auch zu einer verlängerten Kohärenzzeit, wodurch der Kontrast wieder erhöht werden kann. Begrenzt wird die Anzahl der anwendbaren Pulse lediglich durch mögliche Pulsfehler. Da die verwendete KDD-Sequenz jedoch als sehr robust gegenüber Pulsfehlern gilt [140] könnten somit die Kohärenzen auch über längere als die betrachteten Entwicklungsdauern hin stabilisiert werden.

In diesem Unterabschnitt wurde die dynamische Entkopplung in einem vollständig gekoppelten Drei-Qubit-System untersucht. Die experimentellen Ergebnisse hierzu wurden in [150] publiziert. Die Experimente behandelten dabei die simultane Wirkung von Zwei-Qubit-Wechselwirkungen. Es wurde gezeigt, wie diese zu einer bedingten Dynamik führen, die mittels simultanen Sequenzen von dynamischen Entkopplungspulsen stabilisiert werden kann und somit einer Dephasierung des Systems entgegenwirken. Darüber hinaus wurden innerhalb des Drei-Qubit-Systems die Kopplungen an eines der Qubits unterdrückt. Realisiert wurde dieses mittels eines einzelnen zusätzlichen Spin-Echo-Pulses. Im Kontext der Quanteninformationsverarbeitung entspricht dieses einem Ein-Qubit-Quantenspeicher und einem bedingten Logik-Gatter zwischen den beiden gekoppelten Qubits. Darüber hinaus wurden die Kohärenzzeiten der Qubits gemessen und es stellte sich heraus, dass der einzelne Spin-Echo-Puls diese nicht beeinflusst.

# 8

## Gekoppelte Spinsysteme

Systeme spingekoppelter Ionen ermöglichen, neben anderen physikalischen Systemen, bereits heute die Realisierung von sogenannten Quantensimulatoren [159; 160; 54; 161; 20; 162; 163; 164]. Hierbei wird ein wohlkontrollierbares Quantensystem dazu verwendet, die statischen oder dynamischen Eigenschaften eines anderen, nur schwer zu kontrollierenden Quantensystems, zu simulieren. Die Untersuchung des wohlkontrollierten Quantensystems erlaubt somit Rückschlüsse auf das schwer zugängliche System. Die Grundlage dafür ist, dass beide Systeme von dem gleichen Hamilton-Operator beschrieben werden. Bei Mehrteilchensystemen beinhaltet dieser Hamilton-Operator Kopplungen der Teilchen untereinander, welche die Wechselwirkungen innerhalb des Systems beschreiben.

Die Kopplung der Spins untereinander kann durch unterschiedliche technische Ansätze realisiert werden. Diese können auf statischen inhomogenen oder oszillierenden Magnetfeldern beruhen, die zu einer zustandsabhängigen Verschiebung der Spinzuständen führen [24; 57; 64; 165; 166]. Eine andere Möglichkeit ist eine zustandsabhängige optische Dipolkraft, die von Laserstrahlen hervorgerufen wird [159]. Die laserbasierten Wechselwirkungen [160; 162; 163; 164] können prinzipiell jede beliebige Kopplungstopologie realisieren, jedoch ist dafür eine umfangreiche und präzise Kontrolle vieler Laserstrahlen notwendig [167]. Für den Fall, dass die Kopplungen von Magnetfeldern hervorgerufen werden, beruht die Ausführung kohärenter Einzelqubitmanipulation auf Radiofrequenz- oder Mikrowellenpulsen, die ebenfalls ausreichen, um eine kohärente Wechselwirkung zwischen den Spins zu kontrollieren [28; 168; 31; 29; 169; 26]. Auf

diese Weise lassen sich viele Herausforderungen, die mit der Verwendung von Laserlicht einhergehen, vermeiden.

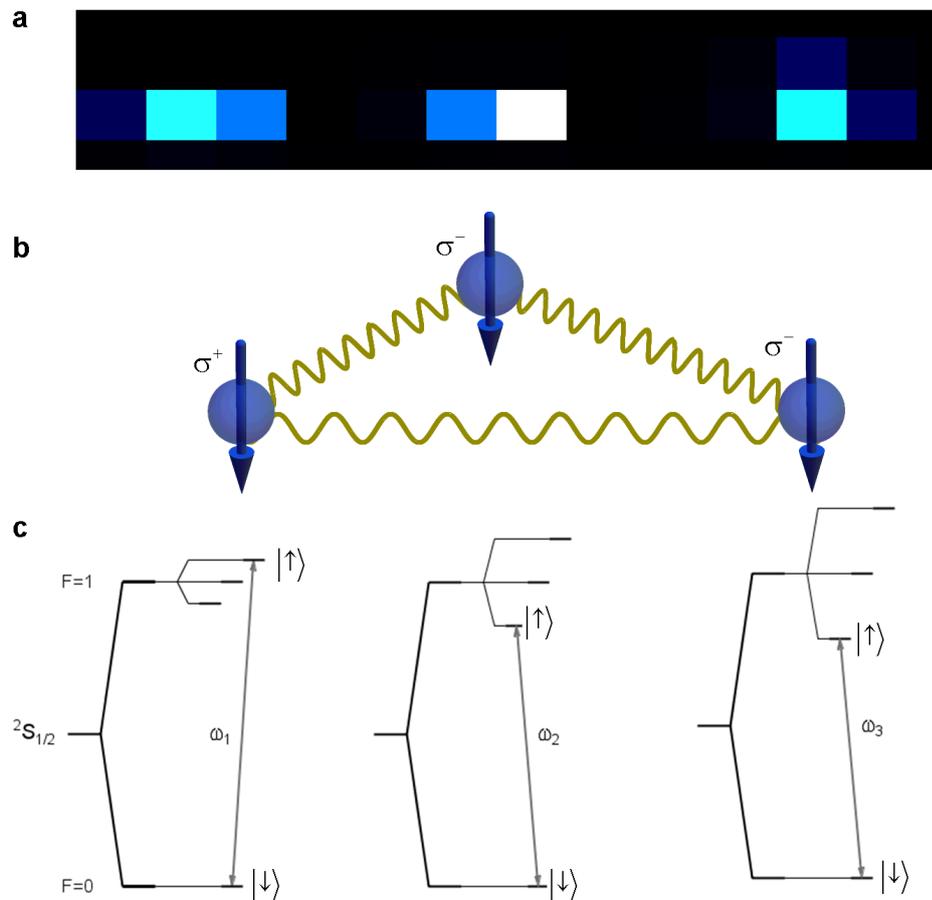
In diesem Kapitel wird nun dargelegt, wie mittels von einem Magnetfeldgradienten induzierter Spin-Spin-Kopplungen experimentell unterschiedliche Drei-Spin-1/2-Systeme realisiert werden können. Diese Systeme zeichnen sich durch teils unterschiedliche Vorzeichen der Kopplungskonstanten und somit der Art der Wechselwirkungen aus. Des Weiteren lässt sich ebenfalls ein beliebiger Spin vom verbleibenden gekoppelten Zwei-Spin-System isolieren. Im Kontext der Quanteninformationsverarbeitung erlaubt dieses, einen Teil eines Quantenregisters als Quantenspeicher zu verwenden, während andere Qubits gleichzeitig ein bedingtes Quantengatter ausführen. Die hier gezeigten Kopplungstopologien beruhen auf der Adressierung einzelner Ionen mit Mikrowellenpulsen [112]. Darüber hinaus wird gezeigt, wie nahezu instantan, das heißt schnell gegenüber der Kopplungen zwischen unterschiedlichen Topologien gewechselt werden kann. Alle experimentellen Befunde dieses Kapitels sind in [150] publiziert.

## 8.1. Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen für eine experimentelle Realisierung von unterschiedlichen gekoppelten Spin-Systemen zusammengefasst. Dabei handelt es sich um die Realisierung von Kopplungen unterschiedlicher Vorzeichen und die gezielte Unterdrückung der Kopplung eines Spins. Daran schließt sich die Erläuterung an, wie diese unterschiedlichen Kopplungen nahezu instantan mit Hilfe von Mikrowellenpulsen geändert werden können.

### 8.1.1. Unterschiedliche Wechselwirkungen

In dem Abschnitt 2.5.4 wurde hergeleitet, wie die J-Kopplung zwischen zwei Ionen entweder ein positives oder negatives Vorzeichen annehmen kann. Des Weiteren wurde erläutert, wie die Kopplung eines Spins unterdrückt werden kann. Die Grundlage dafür war jeweils die gezielte Kontrolle einzelner Ionen, in denen die Spins realisiert werden. Diese Kontrolle erlaubt es, die einzelnen Spinzustände in unterschiedlichen Basen bzw. Hyperfeinzuständen zu realisieren. Der Grundzustand  $|\downarrow\rangle$  ist dabei immer der Zustand  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  und der Zustand  $|\uparrow\rangle$  ist einer der drei Zeeman-Zustände  $|^2S_{1/2}, F = 1\rangle$ . Somit können Systeme gekoppelter Spins realisiert werden, bei denen die Kopplungen unterschiedliche Vorzeichen haben. In der Abbildung 8.1 ist exemplarisch ein solches System dargestellt. Der erste Spin ist in der magnetischen  $\sigma^+$ -Basis und die anderen beiden in der magnetischen  $\sigma^-$ -Basis kodiert. Somit ist die Kopplung des ersten Spins an die anderen beiden negativ und die zwischen dem zweiten und dritten positiv. Experimentell lässt sich die Wahl der unterschiedlichen Basen durch eine Manipulati-

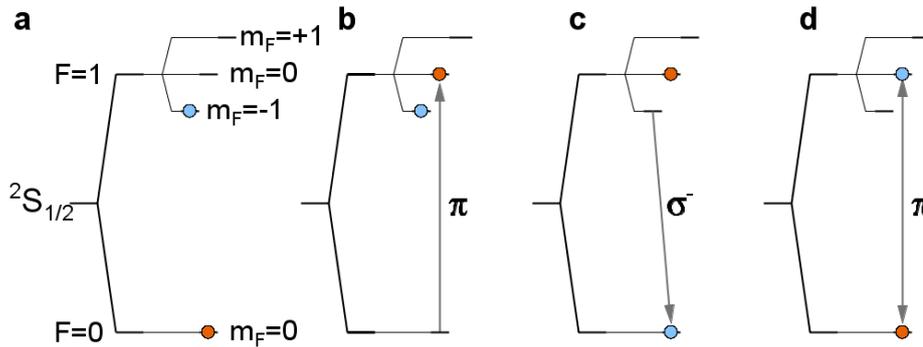


**Abbildung 8.1.:** Verwendung unterschiedlicher Basiszustände. (a) Das physikalische System besteht aus einer linearen Kette von drei Ionen in einem Magnetfeldgradienten, deren zustandsabhängige Resonanzfluoreszenz mit der EMCCD-Kamera beobachtet werden kann. (b) Beispielsweise kann der erste Spin in der magnetischen  $\sigma^+$ -Basis und die anderen in der  $\sigma^-$ -Basis kodiert werden. (c) Hierfür werden auf jedem Ion unterschiedliche Hyperfeinübergänge zur Manipulation benutzt.

on resonant zu unterschiedlichen Hyperfeinübergängen realisieren. Der Übergang, der getrieben wurde, definiert dabei die Basis der Spinzustände.

### 8.1.2. Änderung der Kopplung durch Basiswechsel

So wie die gezielte Kontrolle einzelner Ionen es erlaubt, Systeme mit unterschiedlichen J-Kopplungen zu erzielen (vgl. die Abschnitte 2.5 und 8.1.1), ist es auch möglich



**Abbildung 8.2.:** Umkodieren eines Spin-Zustands in eine andere Basis mittels drei Mikrowellenpulsen. (a) Am Anfang befindet sich der Spin in einem beliebigen Zustand in der magnetischen  $\sigma^-$ -Basis. Die entsprechenden Besetzungswahrscheinlichkeiten der Zustände  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  bzw.  $|^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1\rangle$  sind durch farbige Kreise dargestellt. (b) Ein  $\pi$ -Puls auf dem magnetischen  $\pi$ -Übergang überträgt die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  nach  $|^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle$ . (c) Ein weiterer  $\pi$ -Puls, der diesmal resonant zum magnetischen  $\sigma^-$ -Übergang des Ions ist, bringt eine mögliche Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands  $|^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1\rangle$  nach  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle$ . (d) Ein  $\pi$ -Puls auf dem magnetischen  $\pi$ -Übergang wechselt die Besetzungswahrscheinlichkeit der beiden Zustände. Am Ende befindet sich die ursprüngliche Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands  $|^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1\rangle$  in dem Zustand  $|^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle$  und die des Zustands  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  wieder in eben diesem. Somit ist der Zustand effektiv von der magnetischen  $\sigma^-$ - in die  $\pi$ -Basis umkodiert worden. Die Rückkodierung geschieht mit der gleichen Pulssequenz, da sie symmetrisch unter Zeitumkehr ist.

die Kopplungen nahezu instantan zu ändern. Da die Kopplungen von der Wahl der Spin-Basen abhängen, beruht eine Änderung der Kopplung nun auf einem Wechsel eben dieser.

Experimentell lässt sich ein solcher Basiswechsel mittels drei resonanter Mikrowellenpulse realisieren. Die Pulssequenz für einen Wechsel von der magnetischen  $\sigma^-$ -Basis ( $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle \leftrightarrow |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1\rangle$ ) in die  $\pi$ -Basis ( $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle \leftrightarrow |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle$ ) lautet formal

$$\pi_\pi \pi_{\sigma^-}^{(n)} \pi_\pi. \quad (8.1.1)$$

Dabei bezeichnet  $\pi_\pi$  einen  $\pi$ -Puls auf dem magnetischen  $\pi$ -Übergang und  $\pi_{\sigma^-}^{(n)}$  hingegen einen  $\pi$ -Puls auf dem magnetischen  $\sigma^-$ -Übergang des Spins  $n$ . Die Phase aller Pulse ist dabei  $\varphi = 0$ . In der Abbildung 8.2 ist die Wirkung dieser Pulssequenz detailliert dargestellt. Da der mittlere Puls ausschließlich zu dem  $\sigma^-$ -Übergang von Spin  $n$  resonant

ist, erfahren alle anderen Spins (in einem statischen Magnetfeldgradienten) lediglich die Manipulation aufgrund der beiden Pulsen resonant zum (gemeinsamen)  $\pi$ -Übergang. Die hieraus resultierende globale Phase ist für alle weiteren Anwendungen im Rahmen dieser Arbeit irrelevant.

Ein Umschreiben von der magnetischen  $\pi$ - in die  $\sigma^-$ -Basis kann mittels der gleichen Pulssequenz (8.1.1) geschehen. Soll zwischen der  $\sigma^-$ - und der  $\pi$ -Basis gewechselt werden, so muss dann lediglich der mittlere Puls zu diesem Übergang resonant sein. Durch eine Kombination von Basiswechseln kann auch zwischen den beiden unterschiedlichen  $\sigma$ -Basen gewechselt werden. Hierfür wird erst von der einen in die  $\pi$ -Basis gewechselt und anschließend von hier aus in die andere  $\sigma$ -Basis. Somit ist ein beliebiger Wechsel zwischen allen drei Basen möglich.

Ebenfalls ist es möglich die Basis von mehr als einem Spin nahezu simultan zu wechseln. Hierfür werden zwischen den beiden Pulsen auf dem magnetischen  $\pi$ -Übergang weitere Pulse auf den  $\sigma$ -Übergängen der jeweiligen Spins adressiert. Sollen also beispielsweise in einem Drei-Spin-System alle Spins die Basis wechseln, so wird die Sequenz (8.1.1) entsprechend zu

$$\pi \pi \pi_{\sigma^-}^{(1)} \pi_{\sigma^-}^{(2)} \pi_{\sigma^-}^{(3)} \pi \pi \quad (8.1.2)$$

erweitert.

Da jeder Basiswechsel auf der Anwendung von Mikrowellenpulsen beruht, ist die Geschwindigkeit, mit der dieser Wechsel geschehen kann, auf der gleichen Zeitskala wie die inverse Rabi-Frequenz. Diese beträgt für den verwendeten experimentellen Aufbau etwa 50 kHz und ist somit drei Größenordnungen schneller als die J-Kopplung zwischen den Spins ( $J \approx 50$  Hz). Aus diesem Grund kann ein Basiswechsel als effektiv instantan angesehen werden.

## 8.2. Unterschiedliche Kopplungen in einem Drei-Spin-System

In dem Folgenden werden die experimentellen Ergebnisse zur Realisierung von Drei-Spin-Systemen mit unterschiedlichen J-Kopplungen diskutiert. Die Spinzustände entsprechen dabei Hyperfeinzuständen von je einem der drei gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen. Der Zustand  $|\downarrow\rangle$  ist immer  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  und der Zustand  $|\uparrow\rangle$  ist je nach gewünschter Kopplung einer der drei Zeeman-Niveaus des Zustands  $|^2S_{1/2}, F = 1\rangle$  (siehe den Abschnitt 2.2). Die axiale Fallenfrequenz beträgt für diese Experimente  $\nu_1 = 2\pi \times 130$  kHz und die resultierenden Kopplungsstärken sind daher von nahezu gleichem Betrag wie die gemessenen aus dem vorherigen Kapitel (siehe den Abschnitt 7.3.5). Die Rabi-Fre-

quenz, mit der die einzelnen Spins gezielt manipuliert werden können, beträgt etwa 50 kHz.

Die Messung der Kopplungen innerhalb des Systems findet, wie zuvor, durch die Beobachtung der Dynamik des Systems für unterschiedliche Anfangszustände statt (vgl. die Abschnitte 4.8 und 7.3.5). Im Speziellen werden vollständig gekoppelte Drei-Spin-Systeme realisiert, in denen die Kopplungen durch die Wahl unterschiedlicher Basen auch unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Darüber hinaus wird untersucht, wie die Kopplung eines Spins an die anderen beiden Spins unterdrückt werden kann. Im Gegensatz zu den vorherigen Experimenten aus dem Abschnitt 7.3.5 basiert die gezielte Unterdrückung der Kopplung jedoch nicht auf der Verwendung von dynamischen Entkopplungspulsen, sondern auf der (in erster Ordnung vorhandenen) Magnetfeldunabhängigkeit der gewählten  $\pi$ -Basis. Im Anschluss wird diese Methode auf den Fall erweitert, in dem alle Kopplungen simultan unterdrückt werden, da alle Spinzustände durch die magnetfeldunabhängige Basis definiert werden.

### 8.2.1. Kopplungen unterschiedlicher Vorzeichen

Wie in den Abschnitten 2.5.4 und 8.1.1 beschrieben wurde, lassen sich Spinsysteme mit negativen Kopplungskonstanten durch die Verwendung von unterschiedlichen Basiszuständen realisieren. Im Gegensatz zu den Untersuchungen eines Drei-Qubit-Systems aus dem Abschnitt 7.3.5, wo alle Spins in der gleichen Basis realisiert waren, kann nun der Zustand  $|\uparrow\rangle$  eines der Spins dem Zeeman-Niveau  $|^2S_{1/2}, F = 1, m_F = +1\rangle$  entsprechen. Dieser Spin ist dann in der magnetischen  $\sigma^+$ -Basis und die anderen in der  $\sigma^-$ -Basis kodiert. Dieses führt dazu, dass die Kopplungen von diesem Spin an die anderen ein negatives Vorzeichen aufweisen. Die anderen beiden Spins in der  $\sigma^+$ -Basis haben weiterhin eine Kopplung mit positivem Vorzeichen.

Experimentell realisiert wird dieses durch die Präparation aller Spins in dem Grundzustand  $|\downarrow\rangle$ , der für alle Ionen dem Zustand  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  entspricht. Die Manipulation der Spinzustände geschieht dann wie zuvor durch die Adressierung von Mikrowellenpulsen an die Ionen, durch welche die Spins realisiert werden. Für den Spin, der in der magnetischen  $\sigma^+$ -Basis kodiert werden soll, ist dieser Puls dann entsprechend resonant zu dem Übergang  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle \leftrightarrow |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = +1\rangle$  (vgl. auch die Abbildung 8.1). Für die anderen beiden Spins sind die Pulse resonant zu den jeweiligen Übergängen  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle \leftrightarrow |^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1\rangle$ . Die resultierenden Kopplungen zwischen den Spins werden wie in dem vorherigen Kapitel 7.3.5 durch die Beobachtung einer bedingten Dynamik für unterschiedliche Anfangszustände des Systems rekonstruiert (vgl. auch den Abschnitt 4.8). Die Beobachtung dieser Dynamik basiert dabei auf einem Ramsey-Experiment, das an dem ersten Spin durchgeführt wird. Hierfür wird dieser zunächst in dem Superpositionszustand  $1/\sqrt{2}(|\downarrow\rangle_1 + i|\uparrow\rangle_1)$  und die anderen beiden Spins in dem Grundzustand  $|\downarrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3$  initialisiert. Während einer bedingten Entwicklungsdauer

präzediert der erste Spin nun entsprechend der auf ihn wirkenden Kopplungen (analog zu dem Abschnitt 7.3.5). Ein  $\pi/2$ -Puls mit variabler Phase untersucht schließlich den Endzustand des ersten Spins und Wiederholungen der Sequenz erlauben die Beobachtung von Ramsey-Streifen. Um eine Dephasierung zu unterdrücken, werden an jeden Spin 20 dynamische Entkopplungspulse einer KDD-Sequenz (siehe den Abschnitt 7.1.4) adressiert. Für den zweiten und dritten Spin entsprechen diese resonanten  $\pi$ -Pulsen auf dem jeweiligen magnetischen  $\sigma^-$ -Übergang. Für den ersten Spin treiben diese Pulse den Übergang, in dem der Spinzustand kodiert ist.

In der Abbildung 8.3 sind die experimentellen Ergebnisse für die Kodierung des ersten Spins in der magnetischen  $\sigma^+$ - bzw.  $\sigma^-$ -Basis dargestellt (siehe auch die Abbildung 7.19 mit den Daten für die  $\sigma^-$ -Basis). Die Verschiebung der Interferenzstreifen nach einer bedingten Entwicklungsdauer von 3,6 ms hängt von der Wahl der Spinbasis ab. Für die  $\sigma^-$ -Basis ist das Minimum der Ramsey-Streifen zu kleineren Phasen hin verschoben und für die  $\sigma^+$ -Basis hingegen zu größeren Phasen.

Die Abhängigkeit der Phasenverschiebungen von der Entwicklungsdauer ist in der Teilabbildung (c) zu finden. Hier zeigt sich ein symmetrisches Verhalten und die Steigung der beiden Geraden ist vom Betrag her vergleichbar. Somit lässt sich schließen, dass die Präzessionsrichtung des Spins und damit auch das Vorzeichen der Kopplungen  $J_{12}$  und  $J_{13}$  für die beiden Basen unterschiedlich ist. Experimentell folgt aus den Datenpunkten bei Verwendung der  $\sigma^-$ -Basis für die Summe der Kopplungen<sup>1</sup>  $J_{12} + J_{13} = 2\pi \times 56(8)$  Hz. Wird der erste Spin hingegen in der  $\sigma^+$ -Basis kodiert und die anderen weiterhin der  $\sigma^-$ -Basis, so folgt experimentell  $J_{12} + J_{13} = 2\pi \times (-58(14))$  Hz. Das Vorzeichen der Kopplung ist nun negativ, die Beträge jedoch statistisch miteinander verträglich.

In weiteren Messungen wurden die Kopplungen in dem Drei-Spin-System einzeln gemessen. Das genaue Messprinzip folgt dabei den Beschreibungen aus dem Abschnitt 4.8. Die Unterdrückung der anderen beiden Kopplungen geschieht mittels eines Spin-Echo-Pulses und der Methode der ausgewählten Ankopplung (siehe hierzu auch den Abschnitt 7.1.5). Für den Fall, dass alle Spins in der gleichen Basis kodiert sind, ergaben sich die Kopplungskonstanten aus dem Abschnitt 7.3.5 und [29]

$$J_{12} = 2\pi \times 32(4) \text{ Hz}, \quad (8.2.1)$$

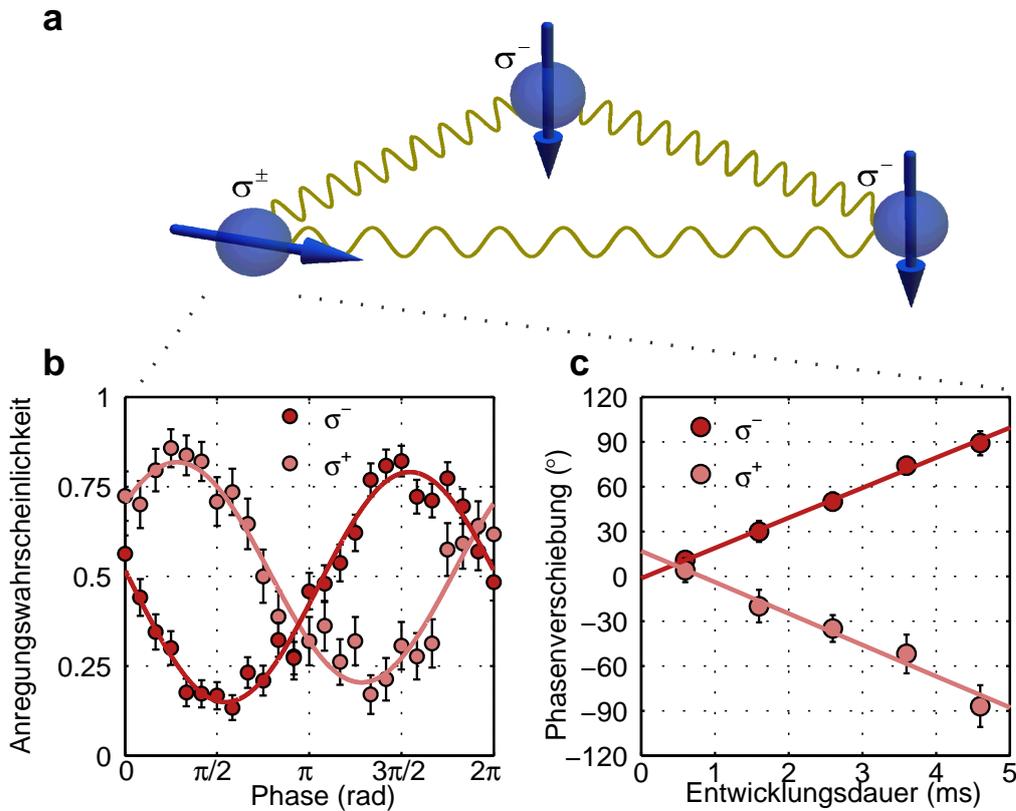
$$J_{23} = 2\pi \times 33(3) \text{ Hz}, \quad (8.2.2)$$

$$J_{13} = 2\pi \times 18(2) \text{ Hz}. \quad (8.2.3)$$

Wird der erste Spin hingegen in der  $\sigma^+$ -Basis und die anderen in der  $\sigma^-$ -Basis kodiert,

---

<sup>1</sup>In dem Abschnitt 7.3.5 wird ein Messwert von  $2\pi \times 54(6)$  Hz beschrieben, der auf der Auswertung für die Anfangszustände  $|\downarrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3$  und  $|\uparrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3$  beruht. An dieser Stelle ergibt sich der Messwert  $2\pi \times 56(8)$  Hz allein aus der Phasenverschiebung für den Anfangszustand  $|\downarrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3$ .



**Abbildung 8.3.:** Untersuchung der simultanen Kopplungen an den ersten Spin, falls dieser in unterschiedlichen Basen kodiert wird. (a) Die Dynamik des ersten Spins wird mittels eines Ramsey-Experiments untersucht, wobei die anderen im Grundzustand  $|\downarrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3$  initialisiert werden. Der erste Spin wird hierbei entweder in der  $\sigma^-$ - oder  $\sigma^+$ -Basis und die anderen beiden in der  $\sigma^-$ -Basis kodiert. (b) Die resultierenden Ramsey-Streifen sind nach einer bedingten Entwicklungsdauer von 3,6 ms abhängig von der Wahl der magnetischen  $\sigma^\pm$ -Basis unterschiedlich verschoben. (c) Aus der Beobachtung der zeitabhängigen Phasenverschiebung lässt sich die Kopplung experimentell bestimmen. Die Verschiebung hat unterschiedliche Vorzeichen, woraus sich auch auf unterschiedliche Vorzeichen der zugrunde liegenden Kopplungen schließen lässt.

so folgt

$$J_{12} = 2\pi \times (-39(5)) \text{ Hz}, \quad (8.2.4)$$

$$J_{23} = 2\pi \times 34(7) \text{ Hz}, \quad (8.2.5)$$

$$J_{13} = 2\pi \times (-27(5)) \text{ Hz}. \quad (8.2.6)$$

Die Kopplungen zwischen Spins in unterschiedlichen Basen (1 und 2 sowie 1 und 3) weisen nun ein negatives Vorzeichen auf. Die Beträge sind jedoch mit den vorherigen Messdaten innerhalb der doppelten Standardabweichung verträglich. Ähnlich verhält es sich auch, wenn statt des ersten Spins der zweite in der  $\sigma^+$ - und die anderen beiden in der  $\sigma^-$ -Basis kodiert sind. Experimentell folgt nun

$$J_{12} = 2\pi \times (-37(5)) \text{ Hz}, \quad (8.2.7)$$

$$J_{23} = 2\pi \times (-40(5)) \text{ Hz}, \quad (8.2.8)$$

$$J_{13} = 2\pi \times 28(5) \text{ Hz} \quad (8.2.9)$$

und erneut ist die Kopplung zwischen Spins in unterschiedlichen Basen negativ (hier zwischen den Spins 1 und 2 sowie 2 und 3).

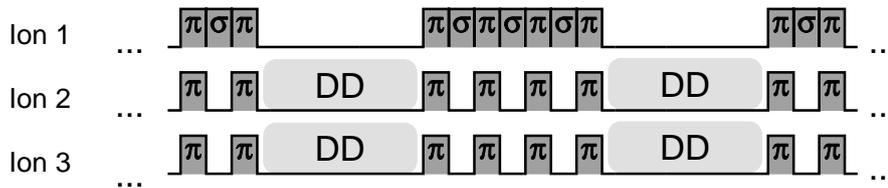
### 8.2.2. Entkopplung eines Einzelspins

In dem vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, wie die gezielte Kontrolle eines einzelnen Ions mit Mikrowellenpulsen die Realisierung unterschiedlicher Kopplungen erlaubt. Darüber hinaus ist es möglich, die Basis, in welcher der Spin kodiert ist, zu wechseln und somit die Kopplungen entsprechend zu ändern<sup>2</sup> (vgl. den Abschnitt 8.1.2). Da ein Basiswechsel auf der Anwendung von Mikrowellenpulsen basiert, kann er auf der Zeitskala der inversen Rabi-Frequenz geschehen, die um drei Größenordnungen schneller als die J-Kopplung innerhalb des Systems ist. Daher kann eine Änderung der Kopplungen in guter Näherung als instantan angesehen werden.

Dieser Basiswechsel wird anhand der folgenden Pulssequenz, die in der Abbildung 8.4 illustriert ist, demonstriert. Am Anfang wird das System im Grundzustand  $|\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3$  präpariert und anschließend werden die beiden Spins 1 und 2 mittels  $\pi/2$ -Pulsen auf dem magnetischen  $\sigma^-$ -Übergang jeweils in einem Superpositionszustand initialisiert. Zu diesem Zeitpunkt ist das System noch vollständig gekoppelt. Im nächsten Schritt werden drei  $\pi$ -Pulse eingestrahlt. Der erste und der dritte sind Pulse resonant zu dem (in erster Ordnung) magnetfeldunabhängigen magnetischen  $\pi$ -Übergang. Der mittlere  $\pi$ -Puls ist resonant zum Basisübergang des ersten Spins, bei dem es sich hier um den  $\sigma^-$ -Übergang handelt (siehe Gleichung (8.1.1)). Nach dieser Pulssequenz befindet sich der erste Spin in der magnetfeldunabhängigen  $\pi$ -Basis und seine Kopplung an die anderen beiden Spins verschwindet. Die Zeitentwicklung während der folgenden bedingten Entwicklungsdauer beruht nun einzig auf der verbleibenden Kopplung zwischen dem zweiten und dem dritten Spin. Um eine Dephasierung der beiden Spins 2 und 3 zu verhindern werden 20 dynamische Entkopplungspulse einer KDD-Sequenz (siehe Abschnitt

---

<sup>2</sup>Dieses kann beispielsweise während eines Quantenalgorithmus geschehen, um die Realisierung zu optimieren bzw. zu beschleunigen. Eine Diskussion hierzu findet sich im nächsten Kapitel 9.



**Abbildung 8.4.:** Sequenz zum Basiswechsel des ersten Spins. Mittels einer Pulssequenz aus drei Pulsen, die jeweils resonant zum  $\pi$ - bzw.  $\sigma$ -Übergang sind, kann der Zustand des ersten Spins von der  $\sigma$ -Basis in die  $\pi$ -Basis umgeschrieben werden und umgekehrt. Ein zusätzlicher Spin-Echo-Puls (vgl. Abschnitt 7.1.2) schützt den ersten Spin vor Rauschen. Die anderen beiden Spins 2 und 3 werden mittels dynamischen Entkopplungspulsen (DD) vor einer Dephasierung geschützt. Siehe den Text für weitere Erläuterungen.

7.1.4) an sie adressiert. Aufgrund von Pulsfehlern des Basiswechsels kann der erste Spin eine unbeabsichtigte Präzession aufweisen. Diese wird effektiv mittels eines Spin-Echo-Pulses kompensiert. Dieser kann jedoch nicht resonant zum  $\pi$ -Übergang erfolgen, da dieser für alle Spins (nahezu) identisch ist und somit auch die anderen Spins (in der  $\sigma^-$ -Basis) manipuliert würden. Zu diesem Zweck wird der erste Spin nach der Hälfte der Entwicklungsdauer in die magnetfeldabhängige Basis zurückkodierte und ein resonanter Spin-Echo-Puls mit der relativen Phase  $\pi/2$  adressiert (vgl. Abschnitt 7.1.2). Die Pulssequenz für das Rückkodieren ist die gleiche wie bei der ersten Umkodierung. Nach dem Spin-Echo-Puls wird die Basis erneut gewechselt und während der zweiten Hälfte der bedingten Entwicklungsdauer verweilt der Spin in dieser. An die beiden gekoppelten Spins werden erneut dynamische Entkopplungspulse adressiert. Damit der Endzustand des ersten Spins in einem Ramsey-Experiment gezielt untersucht werden kann, wird die Basis erneut gewechselt. Somit wird der zu entkoppelnde Spin in dieser Messequenz insgesamt viermal umkodiert. In dem letzten Schritt werden  $\pi/2$ -Pulse mit einer variablen Phase an die ersten beiden Spins adressiert. Durch Wiederholung des Experiments lassen sich Ramsey-Interferenzstreifen nach der Projektionsmessung beobachten.

Die Abbildung 8.5 enthält die experimentellen Ergebnisse hierzu. Für den Anfangszustand des dritten Spins in  $|\uparrow\rangle_3$  sind die resultierenden Ramsey-Streifen der ersten beiden Spins nach einer bedingten Entwicklungsdauer von 1,6 ms und 5,6 ms dargestellt (b und c). Wie man erkennen kann, ändern sich die Streifen des ersten Spins nicht. Die Streifen des zweiten Spins hingegen zeigen eine deutliche Phasenverschiebung (e), welche auf eine Dynamik schließen lässt (vgl. den Abschnitt 7.3.5). Die Abhängigkeit der Dynamik

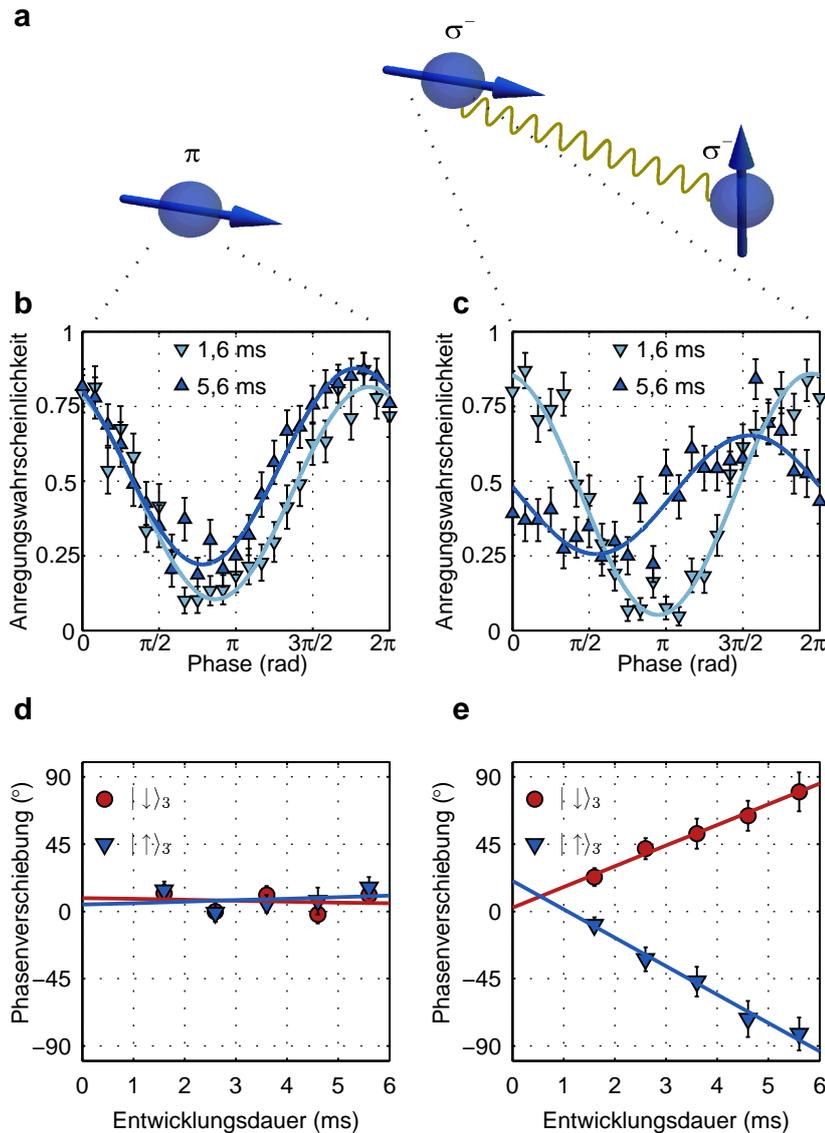
vom zweiten Spin wird offenbar, wenn das Experiment für den anderen Anfangszustand  $|\downarrow\rangle_3$  wiederholt wird. Aus der Zeitabhängigkeit der Phasenverschiebung lässt sich die Kopplungsstärke  $J_{23} = 40(8)$  Hz bestimmen, was statistisch verträglich mit den vorhergehenden Messungen aus dem Abschnitt 7.3.5 ist. Die verschwindende Kopplung an die anderen beiden Spins lässt sich experimentell zu  $J_{13} = 2\pi \times (-2(6))$  Hz bestimmen. Im Kontext der Quanteninformationsverarbeitung erlaubt ein solches System aus einem ungekoppelten und zwei gekoppelten Spins die simultane Realisierung eines Ein-Qubit-Quantenspeichers und einem bedingten Zwei-Qubit-Quantengatters.

Um eine Kopplung zwischen dem ersten und den anderen beiden Spins weiter auszuschließen, wurde das obige Experiment mit einigen Modifikationen wiederholt. In einem Experiment wurde eine Ramsey-Messung ausschließlich an dem ersten Spin durchgeführt und hierbei zeigten die resultierenden Interferenzstreifen ebenfalls keine Abhängigkeit von den Anfangszuständen

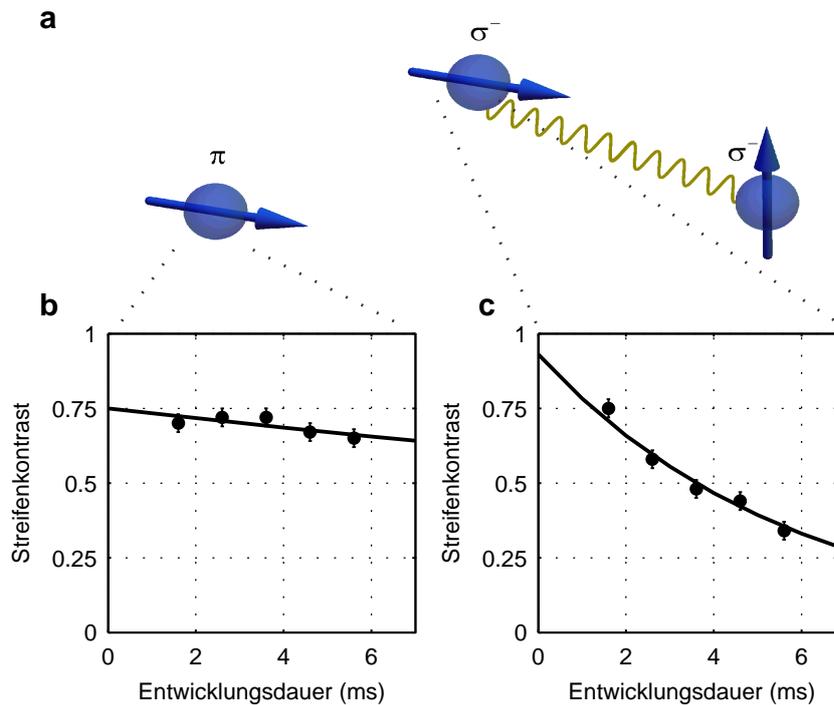
$$\{|\downarrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3, |\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3, |\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3, |\uparrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3\} \quad (8.2.10)$$

der beiden anderen Spins oder der bedingten Entwicklungsdauer.

In einem anderen Experiment wurde eine Ramsey-Messung ausschließlich an dem zweiten Spin ausgeführt. Die resultierenden Interferenzstreifen zeigten wie in der Abbildung 8.5 (c) und (e) eine Phasenverschiebung, die nur von dem Anfangszustand des dritten Spins abhängt und unabhängig von dem Anfangszustand des ersten Spins ist. Für die Unterdrückung der Kopplung zwischen dem ersten und dem zweiten Spin folgt der Messwert  $J_{12} = 2\pi \times 0(8)$  Hz.



**Abbildung 8.5.:** Entkopplung des ersten Spins durch Wechsel in die magnetfeld-unabhängige Basis. (a) Die ersten beiden Spins befinden sich in Superpositionszuständen, um sie mittels Ramsey-Experimenten zu untersuchen, und der dritte befindet sich in einem Energieeigenzustand. Der erste Spin ist während der bedingten Entwicklungsdauer in der magnetischen  $\pi$ -Basis und die anderen beiden sind in der magnetischen  $\sigma^-$ -Basis kodiert. Die beobachteten Ramsey-Streifen des ersten Spins (b) zeigen keine zeitabhängige Phasenverschiebung in Abhängigkeit von dem Zustand des dritten Spins (d) und bleiben konstant. Der zweite Spin hingegen weist eine bedingte Dynamik auf, da seine Kopplung an den dritten Spin weiterhin vorhanden ist (c und e).



**Abbildung 8.6.:** Messung der Kohärenzzeiten von Spins in unterschiedlichen Basen. Der erste Spin ist in der magnetfeldunabhängigen Basis und der zweite in der magnetfeldabhängigen Basis kodiert. Beide Spins befinden sich während unterschiedlich langer Entwicklungsdauern in Superpositionszuständen und werden mittels Ramsey-Experimenten untersucht. Der resultierende Kontrast der Interferenzstreifen des ersten Spins (b) zeigt einen deutlich langsameren Zerfall als der des zweiten Spins (c), obwohl dessen Zustand mittels 20 dynamischer Entkopplungspulse stabilisiert wird. Der reduzierte Streifenkontrast des ersten Spins resultiert aus Pulsfehlern während der Sequenz zum Basiswechsel.

Bei einer genaueren Betrachtung der Interferenzstreifen in der Abbildung 8.5 (b) und (c) fällt ebenfalls auf, dass der Streifenkontrast des ersten Spins sich nach einer bedingten Entwicklungsdauer von 5,6 ms kaum geändert hat und der des zweiten Spins schon deutlich zerfallen ist. Zur genaueren Diskussion dieses Sachverhaltes findet sich in der Abbildung 8.6 der gemessene Streifenkontrast in Abhängigkeit von der Entwicklungsdauer aufgetragen. Für den ersten Spin, der in der magnetfeldunabhängigen Basis realisiert ist, folgt eine Kohärenzzeit (vgl. Abschnitt 7.1.1) von 50(10) ms. Für den anderen Spin in der magnetfeldabhängigen Basis ergibt sich für die 20 dynamischen Entkopplungspulse eine Kohärenzzeit von 5,9(12) ms, was mit den Ergebnissen aus Abbildung 7.23 (7,7(11) ms) verträglich ist. Anhand dieser Ergebnisse wird deutlich, dass

Spinzustände in der  $\pi$ -Basis deutlich weniger von einer Dephasierung betroffen sind als die in der magnetischen  $\sigma$ -Basis.

Für eine verschwindende Entwicklungsdauer beträgt der Kontrast des zweiten Spins etwa 0,93 und ist hauptsächlich durch die Detektionswahrscheinlichkeit begrenzt (siehe dazu den Abschnitt 4.3). Für den ersten Spin in der  $\pi$ -Basis fällt auf, dass der Streifenkontrast deutlich stärker begrenzt ist und lediglich 0,75 beträgt. Dieser Unterschied liegt an fehlerhaften Pulsen, die den Basiswechsel realisieren<sup>3</sup>.

### 8.2.3. Entkopplung aller Spins

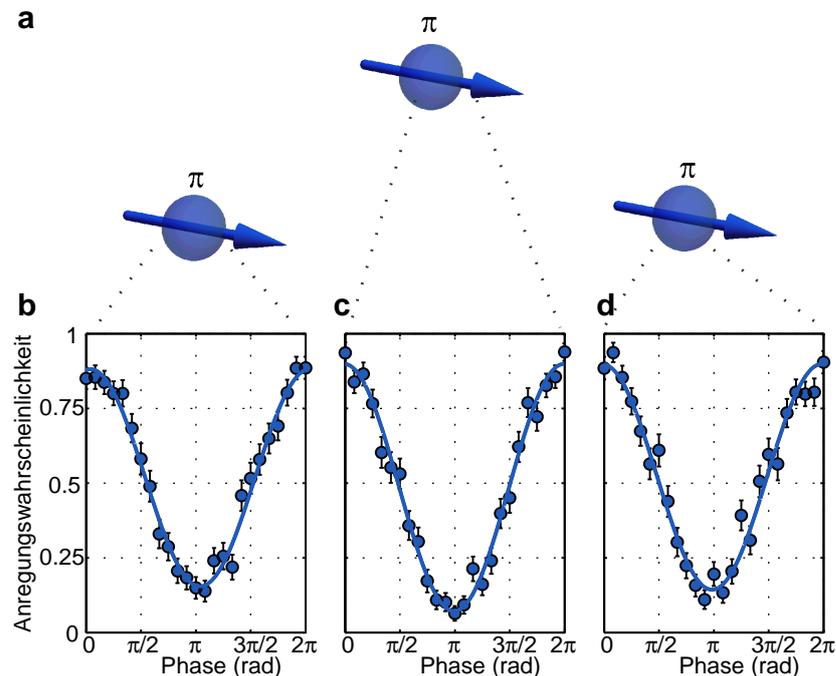
Neben der Entkopplung eines Spins ist es auch möglich, alle zu entkoppeln. Die Pulssequenz zum Wechsel der Basis aller Spins ist (8.1.2). Zur experimentellen Untersuchung wird jeder Spin in einem Superpositionszustand der  $\sigma^-$ -Basis präpariert und anschließend in die  $\pi$ -Basis umgeschrieben. Die Spins sind nun vollständig entkoppelt und das System verbleibt während einer bedingten Entwicklungsdauer in seinem Zustand

$$1/\sqrt{8}(|\downarrow\rangle_1 + i|\uparrow\rangle_1)(|\downarrow\rangle_2 + i|\uparrow\rangle_2)(|\downarrow\rangle_3 + i|\uparrow\rangle_3). \quad (8.2.11)$$

In der Abbildung 8.7 sind die resultierenden Interferenzstreifen nach einer Entwicklungsdauer von 10 ms dargestellt. Alle Streifen haben ihr Minimum bei der Ramsey-Phase von  $\pi$  und zeigen einen deutlichen Kontrast von etwa 0.82. Die Zustands-Fidelity des zweiten Spins beträgt beispielsweise 0,91(2), was die deutliche Unterdrückung des Einflusses von Magnetfeldrauschen und somit von Dephasierung demonstriert. Die transversale Relaxationszeit bzw. Kohärenzzeit der Spins ist also deutlich größer als die bedingte Entwicklungsdauer von 10 ms.

---

<sup>3</sup>Für robustere zusammengesetzte Pulse (siehe beispielsweise [127]) kann man deutlich bessere Ergebnisse erwarten.



**Abbildung 8.7.:** Simultane Entkopplung aller Spins. (a) Alle Spins sind in Superpositionszuständen ihrer  $\pi$ -Basis kodiert. Nach einer Entwicklungsdauer von 10 ms werden an allen Spins Ramsey-Messungen durchgeführt. (b - d) Die resultierenden Interferenzstreifen zeigen alle die gleiche Phasenlage und einen deutlichen Kontrast. Aus dem Streifenkontrast des zweiten Spins lässt sich beispielsweise eine Fidelity von 0,91(2) bestimmen und für die Zustands-Fidelity des Drei-Spin-Systems folgt 0,69(3).

#### 8.2.4. Zusammenfassung und Ausblick der unterschiedlichen Spin-Systeme

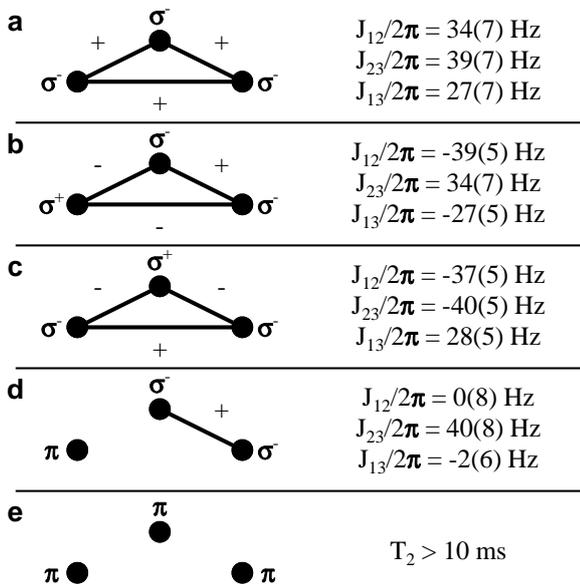
In diesem Abschnitt werden die unterschiedlichen untersuchten Kopplungstopologien in einem Drei-Spin-1/2-System zusammengefasst und darüber hinaus wird diskutiert, wie sich die verwendeten Methoden erweitern lassen. Die Abbildung 8.8 enthält Illustrationen der untersuchten gekoppelten Systeme und die dazugehörigen experimentellen Ergebnisse. Als einfachstes System wurde das, in welchem alle Spins in der gleichen magnetfeldabhängigen  $\sigma^-$ -Basis kodiert sind, gewählt. In dieser Topologie sind alle Spins miteinander gekoppelt und die Kopplungskonstanten haben jeweils ein positives Vorzeichen (a). Ein solches System wurde experimentell in dem Abschnitt 7.3.5 untersucht

## 8.2. Unterschiedliche Kopplungen in einem Drei-Spin-System

und die Kopplungskonstanten gemessen. Für den Fall, dass einer der Spins in der anderen, der  $\sigma^+$ -Basis kodiert wird, haben die Kopplungen von diesem Spin an den Rest des Systems negative Vorzeichen, was in dem Abschnitt 8.2.1 experimentell untersucht wurde. Ist der erste Spin in der  $\sigma^+$ -Basis präpariert, so weist der mittlere Spin eine positive und negative Nächstnachbar-Wechselwirkung auf (b). Ist der mittlere Spin hingegen in der  $\sigma^+$ -Basis kodiert, so sind seine beiden Kopplungen an die benachbarten Spins negativ (c). Darüber hinaus wurde in dem Abschnitt 8.2.2 gezeigt, dass ein Spin in der magnetfeldunabhängigen  $\pi$ -Basis nicht an die anderen Spins koppelt (d), die Kopplung zwischen den beiden anderen Spins jedoch erhalten bleibt. Für den Fall, dass alle Spins entkoppelt werden sollen, kann dieses, wie in dem Abschnitt 8.2.3 gezeigt wurde, durch eine Kodierung aller Spins in der magnetischen  $\pi$ -Basis geschehen (e). Da die Spinzustände so weniger von Magnetfeldrauschen beeinträchtigt werden, beträgt die Kohärenzzeit bei Anwendung eines Spin-Echo-Pulses  $T_2$  mehr als 10 ms.

Des Weiteren ist es denkbar, die verwendeten Methoden zu verändern oder zu kombinieren, um somit weitere Kopplungstopologien zu realisieren. Es ist beispielsweise möglich in (d) statt dem ersten den zweiten Spin in der magnetischen  $\pi$ -Basis zu kodieren. Dann würde einzig die langreichweitige Kopplung  $J_{13}$  zwischen dem ersten und dritten Spin wirken. Eine andere Möglichkeit ist in (d) den zweiten Spin in der  $\sigma^+$ -Basis zu kodieren. In diesem Fall würden die Kopplungen  $J_{12}$  und  $J_{13}$  weiterhin verschwinden, jedoch hätte die Konstante  $J_{23}$  nun ein negatives Vorzeichen.

Wie in dem Abschnitt 8.1.2 beschrieben und in dem Abschnitt 8.2.2 gezeigt wurde,



**Abbildung 8.8:** Unterschiedliche realisierte Spin-1/2-Systeme. Jeder Spin wird durch einen Punkt symbolisiert. Die Basis, in der jeder Spin kodiert ist, wird dabei durch  $\sigma^\pm$  bzw.  $\pi$  beschrieben. Eine durchgezogene Linie, die zwei Spins verbindet, kennzeichnet die resultierende Kopplung und  $\pm$  ihr Vorzeichen. Die experimentellen Daten sind in der rechten Spalte zu finden. In (a) sind alle Spins in der gleichen Basis kodiert und daher sind die Kopplungen positiv. In (b) und (c) ist einer der Spins in einer anderen Basis kodiert, was zu unterschiedlichen Wechselwirkungen führt. Darüber hinaus ist es auch möglich die Kopplungen eines Spins (d) oder aller Spins (e) zu unterdrücken.

ist es möglich die Spinbasen nahezu instantan zu wechseln. Somit können die resultierenden Kopplungstopologien während einer Quantensimulation oder eines Quantenalgorithmus verändert werden. Dies verleiht dem physikalischen System eine große Flexibilität und ist für laserbasierte Systeme [167] erheblich aufwändiger und wurde bisher noch nicht experimentell demonstriert.

### Diskussion anhand der Kopplungsmatrix

Die Vorhersage der resultierenden Kopplungen kann in einem beliebigen  $N$ -Spin-System aufgrund der verwendeten Basen erfolgen. Wie oben diskutiert wurde, ist die Kopplung zwischen zwei Spins in der gleichen magnetischen  $\sigma$ -Basis immer positiv und für unterschiedliche  $\sigma$ -Basen negativ. Übersichtlich lässt sich dieses anhand der Kopplungsmatrix  $J_{nm}$ , die in der Abbildung 8.9 illustriert ist, diskutieren. Sind alle Spins in der gleichen, beispielsweise der  $\sigma^-$ -Basis, kodiert, so sind alle Kopplungsstärken positiv. Wird nun der Spin  $j$  in der  $\sigma^+$ -Basis kodiert, so wird seine Kopplung an alle anderen Spins negativ. In der Kopplungsmatrix bedeutet dieses, dass die  $j$ -te Zeile und Spalte mit  $-1$  multipliziert werden. Für den Fall, dass ein weiterer Spin  $k$  ebenfalls in der  $\sigma^+$ -Basis kodiert wird, wird ebenfalls die  $k$ -te Zeile und Spalte mit  $-1$  multipliziert. Die beiden Spins  $j$  und  $k$  sind also nun in der gleichen Basis kodiert und somit ist ihre Kopplung  $J_{jk}$  (und analog  $J_{kj}$ ) positiv. In der Kopplungsmatrix trifft dieses ebenfalls zu, da dieser Eintrag zweimal mit  $-1$  multipliziert wurde (einmal durch die  $j$ -te Zeile und einmal durch die  $k$ -te Spalte). Ist einer der Spins  $l$  statt in einer magnetischen  $\sigma$ -Basis in der  $\pi$ -Basis kodiert, so verschwindet seine Kopplung an alle anderen Spins. Für die Kopplungsmatrix bedeutet dieses die Multiplikation der  $l$ -ten Zeile und Spalte mit 0.

## 8.2. Unterschiedliche Kopplungen in einem Drei-Spin-System

-	$J_{12}$	...	$J_{1j}$	...	$J_{1k}$	...	$J_{1l}$	...	$J_{1N}$
$J_{21}$	-	...	$J_{2j}$	...	$J_{2k}$	...	$J_{2l}$	...	$J_{2N}$
...	...	-	...	...	...	...	...	...	...
$J_{j1}$	$J_{j2}$	...	-	...	$J_{jk}$	...	$J_{jl}$	...	$J_{jN}$
...	...	...	...	-	...	...	...	...	...
$J_{k1}$	$J_{k2}$	...	$J_{kj}$	...	-	...	$J_{kl}$	...	$J_{kN}$
...	...	...	...	...	...	-	...	...	...
$J_{l1}$	$J_{l2}$	...	$J_{lj}$	...	$J_{lk}$	...	-	...	$J_{lN}$
...	...	...	...	...	...	...	...	-	...
$J_{N1}$	$J_{N2}$	...	$J_{Nj}$	...	$J_{Nk}$	...	$J_{Nl}$	...	-

**Abbildung 8.9.:** Einfluss unterschiedlicher Basen auf die Kopplungsmatrix. Sind alle Spins in der gleichen  $\sigma$ -Basis kodiert, so sind alle Kopplungen positiv. Wird ein Spin hingegen in der anderen  $\sigma$ -Basis kodiert, so entspricht dieses einer Multiplikation der entsprechenden Zeile und Spalte mit -1 (gelb hervorgehoben). Sind beispielsweise die beiden Spins  $j$  und  $k$  in der gleichen  $\sigma$ -Basis kodiert, so ist ihre wechselseitige Kopplung jedoch positiv (orange hervorgehoben). Wird der Spin  $l$  in der  $\pi$ -Basis kodiert, so koppelt er nicht an die anderen Spins (blau hervorgehoben). Siehe Text für mehr Details.

# 9

## Quanten-Fouriertransformation

Im Kontext der Quanteninformationsverarbeitung bilden Systeme gekoppelter Spins, wie sie in dem Kapitel 8 präsentiert wurden, eine Plattform für die Realisierung eines Quantencomputers. Dabei entspricht jeder Spin einem Quantenbit des Registers und die vorhandenen Kopplungen erlauben bedingte Logikoperationen der Qubits untereinander.

Eine Unterroutine, die viele Quantenalgorithmen im Vergleich zu ihren klassischen Entsprechungen exponentiell beschleunigen kann, ist die Quanten-Fouriertransformation (QFT) [170; 171]. So bildet sie beispielsweise die Grundlage für die schnelle Faktorisierung sowie die Berechnung des diskreten Logarithmus [8], oder den Deutsch-Algorithmus [172]. Weitere mögliche Anwendungen sind Algorithmen zur numerischen Bestimmung des Gradienten einer Funktion [173], zur Eigenwertbestimmung von Differentialoperatoren [174], zum Lösen linearer Gleichungssysteme [10], zur Anpassung einer Funktion an Datenpunkte [12], zum Lösen algebraischer Probleme [175] und zur Zerlegung in quadratfreie Zahlen [11].

Die bisher demonstrierten Realisierungen der QFT wurden vornehmlich in physikalischen Systemen gezeigt, die auf Kernspinresonanz [176; 16] oder gespeicherten Ionen [71] basieren. Der Algorithmus wurde dann aus Ein-Qubit-Gattern und bedingten Zwei-Qubit-Gattern zusammengesetzt. Darüber hinaus wurde eine semiklassische QFT ohne bedingte Quantengatter mit Hilfe von gespeicherten Ionen gezeigt [177]. Jedoch kann diese Variante nicht in jedem beliebigen Algorithmus als Unterroutine verwendet werden, da sie beispielsweise keine verschränkten Zustände als Eingangszustände erlaubt und die relative Phaseninformation des Ausgangszustands zerstört.

In diesem Kapitel wird nun eine neuartige Realisierung der QFT präsentiert. Hierbei wird der Algorithmus nicht aus Ein- und Zwei-Qubit-Gattern zusammengesetzt, sondern nutzt möglichst optimal alle vorhandenen Kopplungen innerhalb des Registers aus. In der Folge kann die Anzahl an Gattern bzw. die Dauer, welche die QFT in Anspruch nimmt, minimiert werden. Der Ansatz, der dabei verfolgt wird, ist von dem physikalischen System unabhängig und sowohl in Systemen gespeicherter Ionen als auch in Systemen, die auf Kernspinresonanzen basieren, anwendbar. Darüber hinaus lassen sich auch andere Algorithmen oder Unterroutinen auf diese Weise optimieren; die QFT wurde lediglich aufgrund ihrer Bedeutung für die Quanteninformationsverarbeitung als prominentes Beispiel gewählt.

In dem folgenden Abschnitt 9.1 werden nun zuerst die mathematischen Grundlagen der QFT und wesentliche Definitionen zusammengefasst. Danach folgt im Abschnitt 9.2 die Motivation und Beschreibung der optimierten Sequenz zur Realisierung der QFT. Die theoretischen Arbeiten dazu stammen von Dr. S. S. Ivanov und sind Teil einer gemeinsamen Publikation [150]. Die vorgeschlagene Pulssequenz wird in weiteren Schritten vereinfacht, um sie effizienter experimentell realisieren zu können. Der Abschnitt 9.3 enthält die experimentellen Daten und eine umfangreiche Diskussion der technischen Fehlerquellen, welche die Qualität der Ergebnisse reduzieren.

## 9.1. Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen

Die Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen beginnt mit der Definition der QFT. Hierbei wird davon ausgegangen, dass sie auf einen Zustandsvektor  $|j\rangle$  angewandt wird und diesen in den Zustand  $|k\rangle$  überführt. Die beiden Zustände bezeichnen dabei Ganzzahlen in einer Binärdarstellung und es gilt beispielsweise für ein Drei-Qubit-Register

$$|000\rangle \equiv |0\rangle, |001\rangle \equiv |1\rangle, |010\rangle \equiv |2\rangle, |011\rangle \equiv |3\rangle, \dots, |111\rangle \equiv |7\rangle. \quad (9.1.1)$$

Die Definition der QFT lautet dann [17]

$$|j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi jk/N} |k\rangle, \quad (9.1.2)$$

wobei  $N$  die Dimension des Hilbert-Raums bezeichnet. Für drei Qubits ist  $N \equiv 2^3 = 8$ .

Einen beliebigen Superpositionszustand transformiert die QFT zu

$$\sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} y_k |k\rangle. \quad (9.1.3)$$

Dabei ergeben sich die Amplituden

$$y_k \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{i2\pi jk/N} \quad (9.1.4)$$

aus der diskreten Fouriertransformation der Amplituden des Eingangszustands [17]. Die Quanten-Fouriertransformation entspricht also einer diskreten Fouriertransformation der Amplituden eines Quantenzustands.

Eine weitere, nützliche Darstellung der QFT ist die sogenannte Produktdarstellung, die für  $n$  Qubits

$$|j\rangle \rightarrow \frac{1}{2^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^n \left[ (|0\rangle + e^{i2\pi j2^{-l}} |1\rangle) \right] \quad (9.1.5)$$

lautet [17].

Anhand einiger einfacher Beispiele soll die Wirkungsweise der QFT verdeutlicht werden. Hierbei wird immer von einem Register mit drei Qubits ausgegangen, was den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten entspricht. Wird die QFT auf den Grundzustand angewandt, so lässt sich der transformierte Zustand einfach aus der Definition (9.1.2) oder der Produktdarstellung (9.1.5) berechnen.

$$\begin{aligned} |000\rangle \equiv |0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} [ |0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + \dots + |7\rangle ] \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} [(|0\rangle + |1\rangle) (|0\rangle + |1\rangle) (|0\rangle + |1\rangle)] \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

Der Zustand, der sich aus der Anwendung der QFT auf den Anfangszustand  $|2\rangle$  ergibt, lässt sich am einfachsten direkt aus der Produktdarstellung (9.1.5) bestimmen

$$|010\rangle \equiv |2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} [(|0\rangle + |1\rangle) (|0\rangle - |1\rangle) (|0\rangle + i|1\rangle)] \quad (9.1.7)$$

wobei  $e^{i\pi} = -1$  und  $e^{i\pi/2} = i$  benutzt wurden.

Für die Berechnung des Zustands, der sich aus dem Anfangszustand  $1/\sqrt{2}(|0\rangle + |4\rangle)$  ergibt, lässt sich am einfachsten die diskrete Fouriertransformation der Amplituden (9.1.4) verwenden. Hierbei gibt es nur zwei Amplituden  $x_0 = x_4 = 1/\sqrt{2}$ , die von null verschieden sind. Somit folgt für die transformierten Amplituden

$$y_k = \frac{1}{4} [1 + (-1)^k] . \quad (9.1.8)$$

Es gibt also nur die von null verschiedenen transformierten Amplituden  $y_0 = y_2 = y_4 = y_6 = 1/2$  und der transformierte Zustand ist somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |100\rangle) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |4\rangle) \rightarrow \frac{1}{4} [|0\rangle + |2\rangle + |4\rangle + |6\rangle] \\ &\rightarrow \frac{1}{4} [|000\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |110\rangle] \\ &\rightarrow \frac{1}{4} [(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle] \quad (9.1.9) \end{aligned}$$

In dem Abschnitt 9.3 wird die QFT auf unterschiedliche Eingangszustände angewandt und die Endzustände gemessen. Die obigen Definitionen und Beispiele erlauben somit einen schnellen Vergleich der Messergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen.

Weitere interessante Zustände im Zusammenhang mit der QFT sind sogenannte periodische Zustände. Diese sind definiert als [17]

$$|\phi\rangle = \sum_{j=0}^{N/r-1} c|l+jr\rangle \quad \text{mit } |c| = \sqrt{r/N}. \quad (9.1.10)$$

Dabei bezeichnet  $r$  die Periodizität und  $l$  den Offset des Zustands  $|\phi\rangle$ . Die QFT transformiert solche Zustände zu

$$|\phi\rangle \rightarrow |\tilde{\phi}\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k |kN/r\rangle \quad \text{mit } |\alpha_k| = \sqrt{1/r}. \quad (9.1.11)$$

Die Bestimmung der Periodizität der Amplituden von Quantenzuständen ist die grundlegende Operation der QFT und wurde bereits in unterschiedlichen Experimenten demonstriert [176; 177; 71].

Im Folgenden werden für das hier gezeigte Register aus drei Qubits die periodischen Zustände und ihre Transformation diskutiert.

Der erste Zustand ist dabei der Zustand  $|111\rangle \equiv |7\rangle$ . Dieser hat, wie man aus der Definition (9.1.10) ablesen kann, die Periodizität  $r = 8$  und den Offset  $l = 0$ . Sein transformierter Zustand lässt sich mittels (9.1.11) bestimmen und es folgt

$$\begin{aligned} |111\rangle \equiv |7\rangle &\rightarrow \sum_{k=0}^7 \alpha_k |k\rangle \\ &\rightarrow \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha_2|2\rangle + \dots + \alpha_7|7\rangle \quad (9.1.12) \end{aligned}$$

eine gleichmäßige Superposition aller Zustände. Ein Zustand mit der Periodizität  $r = 4$  ist  $|+11\rangle$  und sein Offset beträgt  $l = 3$ . Dabei bezeichnet  $|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ . Es

folgt der transformierte Zustand

$$\begin{aligned} | + 11 \rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|3\rangle + |7\rangle) \rightarrow \sum_{k=0}^3 \alpha_k |2k\rangle \\ &\rightarrow \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |2\rangle + \alpha_2 |4\rangle + \alpha_3 |6\rangle. \end{aligned} \quad (9.1.13)$$

Der Zustand  $| + 11 \rangle$  hat die Periodizität  $r = 2$  mit dem Offset  $l = 1$ . Die Transformation ergibt den Zustand

$$\begin{aligned} | + + 1 \rangle &\equiv \frac{1}{2}(|1\rangle + |3\rangle + |5\rangle + |7\rangle) \rightarrow \sum_{k=0}^1 \alpha_m |4k\rangle \\ &\rightarrow \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |4\rangle. \end{aligned} \quad (9.1.14)$$

Als letztes folgt ein Zustand mit der Periodizität  $r = 1$ . Ein Beispiel ist  $| + + + \rangle$  mit dem Offset  $l = 0$ . Es folgt

$$| + + + \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{8}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle + |5\rangle + |6\rangle + |7\rangle) \rightarrow |0\rangle. \quad (9.1.15)$$

Führt man also unmittelbar nach der QFT eine Projektionsmessung durch, so beobachtet man  $r$ -viele Zustände mit einer hohen Nachweiswahrscheinlichkeit. Für den Anfangszustand  $| + + 1 \rangle$ , der nach  $\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |4\rangle$  transformiert wird, sind es beispielsweise die Zustände  $|000\rangle$  und  $|100\rangle$ , die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/2$  detektiert werden. Auf diese Weise lässt sich aus der Anzahl von häufigen Zuständen die Periodizität des Eingangszustands aus den experimentellen Ergebnissen bestimmen. In dem Abschnitt 9.3 finden sich Experimente, in denen die obigen Zustände und ihre Transformierten experimentell untersucht werden.

## 9.2. Optimierte Realisierung

Die QFT kann mittels unterschiedlicher Ansätze realisiert werden. Der einfachste ist dabei die sogenannte serielle Zerlegung [178], die in der Abbildung 9.1 dargestellt ist. Bei dieser wird die QFT aus Hadamard-Gattern (vgl. den Abschnitt 2.6) und bedingten Zwei-Qubit-Phasengattern zusammengesetzt. Diese Konstruktion wurde experimentell in unterschiedlichen physikalischen Systemen demonstriert [176; 16; 71]. Wird das System durch einen Ising-Hamiltonian beschrieben, so müssen während den bedingten Zwei-Qubit-Phasengattern, die nacheinander ausgeführt werden, alle unbeabsichtigten Kopplungen unterdrückt werden. Aus diesem Grund ist diese Art der Realisierung zwar theoretisch einfach zu konstruieren, ist jedoch nicht die schnellste.

Im Allgemeinen ist es somit vorteilhaft, die QFT in Gatter zu zerlegen, die von dem physikalischen System einfacher zu realisieren sind. Diese sind Ein-Qubit-Gatter und

Wartedauern, während denen sich das gekoppelte System entwickelt [179; 180; 181; 182]. Der Vorteil ist dann der, dass die Anzahl an Gattern beziehungsweise die Dauer des Algorithmus minimiert werden kann. Falls das physikalische System von Dekohärenz betroffen ist, führt dieses auch zu einer verbesserten Fidelity des Algorithmus. Die in diesem Kapitel vorgestellte Realisierung der QFT nutzt alle Kopplungen eines vollständig gekoppelten Drei-Qubit-Systems in optimaler Weise simultan aus.

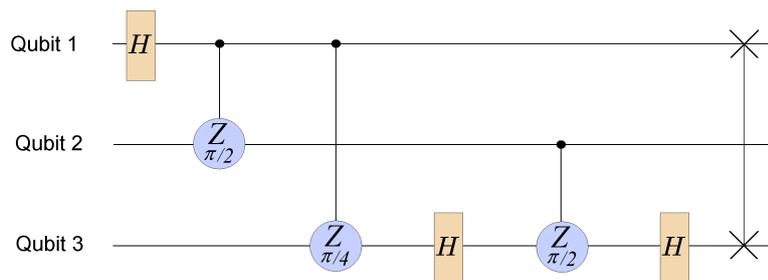
### 9.2.1. Theoretischer Vorschlag

Im Folgenden wird die optimierte Realisierung der QFT beschrieben. Die Optimierung bezieht sich dabei auf die Dauer des Algorithmus, die für eine ideale Fidelity von höher als 0,99 minimiert wird. Die theoretischen Arbeiten hierzu stammen von Dr. S. S. Ivanov und basieren auf [183]. An dieser Stelle werden die für die Realisierung notwendigen Überlegungen zusammengefasst. Publiziert wurden sie zusammen mit den experimentellen Ergebnissen in [150].

Zu Beginn der Beschreibung wird hier nun der Satz von Gattern, aus denen die Realisierung zusammengesetzt wird, vorgestellt. Diese besteht aus Einzelqubitrotationen  $R(\phi)$ , einem Einzelqubit-Phasengatter  $T(\phi)$  und einem Gatter, das geeignet ist Qubits zu verschränken  $U(T)$ . Zur Vereinfachung wird das Phasengatter mit den Einzelqubitrotationen zusammen realisiert, wobei gilt

$$T(\phi/2)R(\theta)T(-\phi/2) = R(\theta, \phi). \quad (9.2.1)$$

Solche Rotationen können in dem vorhandenen experimentellen Aufbau durch Mikro-



**Abbildung 9.1.:** Quantenschaltung der QFT in der seriellen Zerlegung. Der Algorithmus besteht aus Hadamard-Gattern (H) und bedingten Drehungen um die z-Achse (Z). Der Drehwinkel ist dabei jeweils  $\pi/2$  bzw.  $\pi/4$ . Darüber hinaus ist ein  $\text{SWAP}_{13}$ -Gatter ( $\times$ ), das die Zustände des ersten und dritten Qubits vertauscht, notwendig.

wellenpulse realisiert werden (siehe dazu auch den Abschnitt 2.6). Die Darstellung dieser Gatter folgen im Weiteren den Definitionen

$$R_k(\theta, \phi) = e^{-i\frac{\theta}{2}(\sigma_x^{(k)} \cos \phi + \sigma_y^{(k)} \sin \phi)}, \quad (9.2.2)$$

$$T_k(\phi) = e^{-i\phi\sigma_z^{(k)}}, \quad (9.2.3)$$

wobei der Index das adressierte Qubit bezeichnet und  $R_k(\theta) = R_k(\theta, 0)$  gilt.

Das Gatter zur Verschränkung basiert auf einer bedingten Entwicklung des Quantensystems (siehe dazu den Abschnitt 2.7) während einer Dauer  $T$  und es gilt

$$U_{kl}(\phi) = e^{i\phi\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(l)}}, \quad (9.2.4)$$

wobei die Phase  $\phi = J_{kl} T/2$  von dem Produkt aus Kopplungsstärke und der Entwicklungsdauer abhängt.

Der Algorithmus für die QFT mit drei Qubits kann mittels

$$T_F H_3 e^{i\pi\left(\frac{1}{8}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\right)} H_2 e^{i\pi\left(\frac{1}{8}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} + \frac{1}{16}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(3)}\right)} H_1 T_I \quad (9.2.5)$$

realisiert werden. Dabei bezeichnet  $H_k = iR_k(\pi/2, -\pi/2)R_k(\pi)$  das Hadamard-Gatter (vgl. den Abschnitt 2.6), welches auf das Qubit  $k$  angewandt wird und

$$T_F = \exp\left[-i\sum_{k=1}^3 \frac{\pi}{4}(1 - 2^{k-3})\sigma_z^{(k)}\right], \quad (9.2.6)$$

$$T_I = \exp\left[-i\sum_{k=1}^3 \frac{\pi}{4}(1 - 2^{-k+1})\sigma_z^{(k)}\right], \quad (9.2.7)$$

sind Phasengatter, die auf alle Qubits am Anfang und am Ende der Sequenz angewandt werden. Diese Sequenz kann ausführlicher dargestellt werden als

$$\begin{aligned} T_F R_3\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) R_3(\pi) e^{i\pi\left(\frac{1}{8}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\right)} R_2\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) R_2(\pi) \\ e^{i\pi\left(\frac{1}{8}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} + \frac{1}{16}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(3)}\right)} R_1\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) R_1(\pi) T_I. \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

Im Weiteren wird nun diskutiert, wie diese Sequenz mit dem obigen Set von Quantengattern realisiert wird. Die komplizierteste Operation ist dabei die Realisierung des Terms

$$e^{i\pi\left(\frac{1}{8}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} + \frac{1}{16}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(3)}\right)}, \quad (9.2.9)$$

denn während einer bedingten Entwicklungsdauer wirken dabei nur die Kopplungen zwischen den Qubits 1 und 2 sowie zwischen 1 und 3. Eine gezielte Unterdrückung der Kopplung  $J_{23}$  alleine ist jedoch mit den im Rahmen dieser Arbeit bisher verwendeten Methoden nicht möglich<sup>1</sup>. Die Realisierung dieses Terms beruht auf der Anwendung zweier  $\pi$ -Pulse auf Qubit 3 vor und nachdem das Gatter  $U(T) = U_{12}(T) U_{23}(T) U_{13}(T)$  ausgeführt wird. Der Effekt der beiden Pulse ist der, dass die beiden Kopplungen  $J_{13}$  und  $J_{23}$  in der Zeitentwicklung effektiv ihr Vorzeichen gewechselt haben und es gilt

$$\begin{aligned} R_3(\pi)U(T)R_3(\pi) &= R_3(\pi) \exp \left[ \frac{iT}{2} (J_{12}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} + J_{13}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(3)} + J_{23}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}) \right] R_3(\pi) \\ &= \exp \left[ \frac{iT}{2} (J_{12}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} - J_{13}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(3)} - J_{23}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}) \right]. \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

Somit führt die Sequenz  $U(T_2) R_3(\pi) U(T_1) R_3(\pi)$  zu der Zeitentwicklung

$$\exp \left[ i \frac{1}{2} ((T_1 + T_2)J_{12}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} + (-T_1 + T_2)J_{13}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(3)} + (-T_1 + T_2)J_{23}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}) \right] \quad (9.2.11)$$

und für die Wahl von

$$T_1 = \frac{\pi}{8} \left( \frac{1}{J_{12}} + \frac{1}{2J_{13}} \right) \quad \text{und} \quad (9.2.12)$$

$$T_2 = \frac{\pi}{8} \left( \frac{1}{J_{12}} - \frac{1}{2J_{13}} \right), \quad (9.2.13)$$

folgt der gewünschte Term (9.2.9) mit einem weiteren Faktor. Dieser kann jedoch mittels zusätzlicher Einzelqubitrotation eliminiert werden. Angewandt auf die Sequenz in (9.2.8) ergibt sich somit die Form<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} &\left[ R_2(A_2, \frac{3\pi}{4}) R_3(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \right] U_{23}(T_3) \left[ R_1(\pi, \frac{3\pi}{16}) R_2(A_1, \frac{3\pi}{4}) R_3(\pi, \frac{13\pi}{16}) \right] \\ &U(T_2) R_3(\pi) U(T_1) \left[ R_1(\pi) R_2(\pi) R_3(\pi) \right] H_1, \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

wobei die Entwicklungsdauer  $T_3$  sowie die Drehwinkel  $A_1$  und  $A_2$  von dem folgenden

<sup>1</sup>Eine Alternative wäre die Nacheinanderausführung von bedingten Dynamiken, die auf Kopplungstopologien beruhen, in denen jeweils ausschließlich die Kopplungen  $J_{12}$  beziehungsweise  $J_{13}$  vorhanden sind (siehe dazu die Abschnitte 7.3.5 und 8.2.2). Dafür könnte man zuerst das Qubit 3 isolieren und danach das Qubit 2. Eine solche Nacheinanderausführung ist jedoch zeitintensiv und würde die Realisierung verlangsamen. Eine parallele Ausführung hingegen ist schneller und daher vorteilhaft.

<sup>2</sup>Die eckigen Klammern dienen einzig der besseren Übersicht.

Gleichungssystem mit  $\alpha = J_{23}/J_{13}$  bestimmt werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{16}(\alpha+2)} e^{iJ_{23}T_3/2} - \sin \frac{A_1}{2} \sin \frac{A_2}{2} e^{iJ_{23}T_3} + \cos \frac{A_1}{2} \cos \frac{A_2}{2} = 0, \quad (9.2.15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{16}(\alpha-2)} e^{iJ_{23}T_3/2} - \sin \frac{A_1}{2} \cos \frac{A_2}{2} e^{iJ_{23}T_3} - \cos \frac{A_1}{2} \sin \frac{A_2}{2} = 0. \quad (9.2.16)$$

Die Sequenz (9.2.14) ist allgemein für jede Kopplungsmatrix  $J$  eines vollständig gekoppelten Systems gültig. Für die an dem verwendeten Aufbau bestimmten Kopplungsstärken (vgl. den Abschnitt 7.3.5 und [29]) folgen somit Entwicklungsdauern von  $T_1=3,69$  ms,  $T_2=0,22$  ms und  $T_3=4,87$  ms. Für die Drehwinkel gilt  $A_1 = 0,686 \pi$  und  $A_2 = 0,716 \pi$ .

Die Sequenz zur Realisierung der QFT basiert somit auf Einzelqubitrotationen und bedingten Entwicklungen des Systems. Die besondere Zeitentwicklung  $U_{23}(T_3)$  in (9.2.14) entspricht einer Entwicklung des Systems nachdem das Qubit 1 isoliert worden ist und lediglich die Kopplung  $J_{23}$  wirkt. Eine solche Topologie lässt sich durch ein Umkodieren des ersten Qubits in die magnetfeldunabhängige  $\pi$ -Basis (vgl. dazu den Abschnitt 8.2.2) oder effektiv durch einen zusätzlichen Spin-Echo-Puls (vgl. hierzu den Abschnitt 7.3.5) realisieren. Im Weiteren wird wegen der Einfachheit von der zweiten Möglichkeit Gebrauch gemacht. Darüber hinaus ist es zur Vervollständigung der QFT notwendig, die Zustände der Qubits 1 und 3 zu tauschen. Ein solches SWAP<sub>13</sub>-Gatter kann aus mehreren CNOT-Gattern und Einzelqubitrotationen konstruiert werden (siehe dazu beispielsweise [176]). Zur Vereinfachung wird die Vertauschungsoperation in dieser Arbeit durch eine Umbenennung der Qubits 1 und 3 während der Datenauswertung erzielt.

### Vergleich der Geschwindigkeiten

An diesem Punkt lohnt ein Vergleich, wie schnell die QFT mit der optimierten Pulssequenz ausgeführt werden kann und wie schnell eine herkömmliche serielle Konstruktion wäre. Die lokalen Einzelqubitmanipulationen erfolgen auf der Zeitskala der typischen Rabi-Frequenzen von 50 kHz und die bedingte Dynamik hingegen erfolgt auf der Zeitskala der typischen Kopplungskonstanten von etwa 30 Hz. Da die Einzelqubitmanipulationen somit drei Größenordnungen schneller sind, wird ihre Dauer im weiteren vernachlässigt. Die Abschätzung der Geschwindigkeiten basiert somit ausschließlich auf den Dauern der bedingten Mehr-Qubit-Dynamik.

Die serielle Zerlegung [17] benötigt drei bedingte Entwicklungsdauern (vgl. Abbildung 9.1). Zwei von diesen entsprechen bedingten Rotationen um den Winkel  $\pi/2$  zwischen benachbarten Qubits und eine entspricht einer bedingten Rotation um den Winkel  $\pi/4$  zwischen den Qubits 1 und 3.

Die Kopplungsstärken sind gerade so definiert, dass für eine volle Umdrehung (um einen Winkel von  $2\pi$ ) gilt:

$$J T = 2\pi. \quad (9.2.17)$$

Eine Viertelumdrehung (um  $\pi/2$ ), auf der das CNOT-Gatter basiert, benötigt somit die Dauer  $T = 2\pi/(4J)$  und die Achtelumdrehung (um  $\pi/4$ ) benötigt  $T = 2\pi/(8J)$ . Somit folgt für die Gesamtdauer der QFT bei der seriellen Zerlegung

$$T_{\text{QFT}}^{\text{seriell}} = \frac{2\pi}{4J_{12}} + \frac{2\pi}{8J_{13}} + \frac{2\pi}{4J_{23}} \quad (9.2.18)$$

und für die vorhandenen Kopplungsstärken [29] folgt somit

$$T_{\text{QFT}}^{\text{seriell}} = \frac{1}{4 \times 32 \text{ Hz}} + \frac{1}{8 \times 18 \text{ Hz}} + \frac{1}{4 \times 33 \text{ Hz}} = 22,3 \text{ ms}. \quad (9.2.19)$$

Die optimierte Pulssequenz (9.2.14) hingegen benötigt die Gesamtdauer

$$T_{\text{QFT}}^{\text{optimiert}} = T_1 + T_2 + T_3 \quad (9.2.20)$$

und für die gleichen Kopplungsstärken folgt

$$T_{\text{QFT}}^{\text{optimiert}} = 3,69 \text{ ms} + 0,22 \text{ ms} + 4,87 \text{ ms} = 8,78 \text{ ms}. \quad (9.2.21)$$

Somit ist die optimierte Sequenz für drei Qubits mit einer Dauer von lediglich etwa 8,8 ms mehr als doppelt so schnell wie die herkömmliche serielle Zerlegung der QFT, die 22,3 ms benötigen würde.

## 9.2.2. Weitere Vereinfachungen

Die Sequenz in (9.2.14) kann für die gegebenen experimentellen Parameter weiter optimiert beziehungsweise vereinfacht werden. Im Folgenden werden die einzelnen Schritte diskutiert.

### Vernachlässigung von $T_2$

Als erstes lässt sich feststellen, dass die bedingte Entwicklungsdauer  $T_2$  im Vergleich zu den anderen beiden  $T_1$  und  $T_3$  kurz ist. In erster Ordnung gilt die Näherung

$$U(T_2) \approx \mathbb{1} + i \sum_{n < m}^3 J_{nm} \sigma_n^z \sigma_m^z T_2 / 2. \quad (9.2.22)$$

Für die typischen Kopplungen von etwa 30 Hz ist die bedingte Entwicklung während dieser Zeit somit vernachlässigbar. In Simulationsrechnungen (siehe den Anhang L) kann der Fehler quantifiziert werden und beträgt etwa  $10^{-3}$ , was klein gegenüber dem erwarteten Fehler von  $10^{-1}$  aufgrund von Dephasierung ist. Aus diesem Grund wird die bedingte Entwicklung während der Dauer  $T_2$  im Weiteren vernachlässigt.

### Kommutation von $\pi$ -Pulsen und bedingter Dynamik

Darüber hinaus kommutieren die drei  $\pi$ -Pulse, welche zu Beginn der Sequenz an alle drei Qubit adressiert werden, mit der Zeitentwicklung  $U(T_1)$  (siehe dazu die Rechnungen aus dem Abschnitt 1.2).

$$U(T_1) [R_1(\pi, 0) R_2(\pi, 0) R_3(\pi, 0)] = [R_1(\pi, 0) R_2(\pi, 0) R_3(\pi, 0)] U(T_1) \quad (9.2.23)$$

Somit lässt sich ihre Reihenfolge in (9.2.14) vertauschen und Einzelqubitrotationen werden im Folgenden soweit wie möglich zusammengefasst.

### Zusammenfassen gleicher $\pi$ -Pulse

Die beiden Drehungen um  $\theta = \pi$ , die direkt nacheinander und mit gleicher Phase  $\phi = 0$  auf dem dritten Qubit ausgeführt werden, lassen sich dabei zu einer effektiv verschwindenden Drehung um  $2\pi$  kombinieren (vgl. dazu auch den Abschnitt 2.6).

$$R_3(\pi, 0) R_3(\pi, 0) = -\mathbb{1} \quad (9.2.24)$$

### Zusammenfassen unterschiedlicher $\pi$ -Pulse

Die beiden  $\pi$ -Pulse mit unterschiedlichen Phasen, die auf das erste Qubit angewandt werden, lassen sich effektiv zu einer einzelnen Drehung um die z-Achse kombinieren (siehe dazu den Abschnitt 2.6).

$$R_1(\pi, \frac{3\pi}{16}) R_1(\pi, 0) = -Z_1(-\frac{3\pi}{16}) \quad (9.2.25)$$

Somit folgt in guter Näherung für die Sequenz aus (9.2.14)

$$U_{QFT} \approx - \left[ R_2(A_2, \frac{3\pi}{4}) R_3(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \right] U_{23}(T_3) \left[ Z_1(-\frac{3\pi}{16}) R_2(A_1, \frac{3\pi}{4}) R_2(\pi, 0) R_3(\pi, \frac{13\pi}{16}) \right] U_{T_1} H^{(1)}. \quad (9.2.26)$$

### Entkoppeln von Qubit 1

Das Gatter  $U_{23}(T_3)$ , bei dem das erste Qubit entkoppelt ist, wird mittels der Methode der ausgewählten Ankopplung (vgl. den Abschnitt 7.1.5 und [126]) in Form eines Spin-Echo-Pulses nach der Hälfte der Entwicklungsdauer  $T_3$  realisiert. Es folgt somit:

$$U_{23}(T_3) = -R_1(\pi, \frac{\pi}{2}) U(T_3/2) R_1(\pi, \frac{\pi}{2}) U(T_3/2) \quad (9.2.27)$$

Die zusätzliche Drehung um  $\pi$  ist notwendig, um die Zustandsänderung die mit dem Spin-Echo-Puls zusätzlich einhergeht zu kompensieren. Diese Drehung wird in der Realisierung mit der z-Drehung  $Z_1(-\frac{3\pi}{16})$  zur Drehung  $R_1(\pi, \frac{27\pi}{16})$  kombiniert. Dieses ist möglich, da die z-Drehung des ersten Qubits mit der bedingten Dynamik der gekoppelten Qubits 2 und 3 kommutiert ( $U_{23}(T_3)Z_1(-\frac{3\pi}{16}) = Z_1(-\frac{3\pi}{16})U_{23}(T_3)$ ).

Nach den obigen Schritten lautet schließlich die vereinfachte und optimierte Sequenz

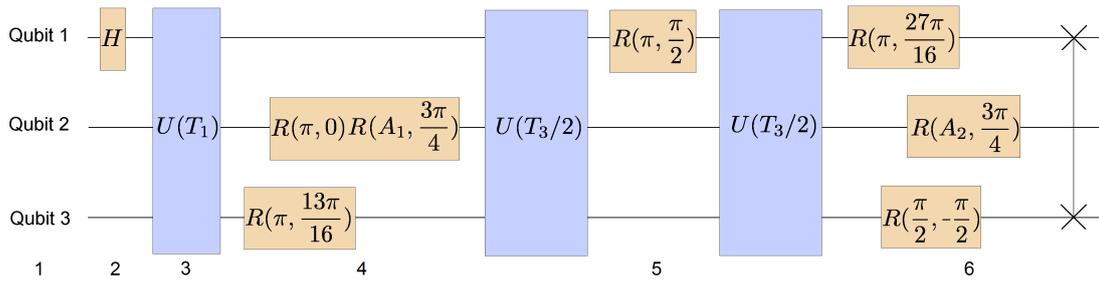
$$U_{QFT}^{opt} = \left[ R_2(A_2, \frac{3\pi}{4}) R_3(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) R_1(\pi, \frac{27\pi}{16}) \right] \left[ U(T_3/2) R_1(\pi, \frac{\pi}{2}) U(T_3/2) \right] \left[ R_2(A_1, \frac{3\pi}{4}) R_2(\pi, 0) R_3(\pi, \frac{13\pi}{16}) \right] U(T_1) H_1. \quad (9.2.28)$$

Ein zusätzliches SWAP<sub>13</sub>-Gatter, das die Zustände der Qubits 1 und 3 wechselt, vervollständigt den Algorithmus.

### Dynamische Entkopplungspulse

Um das Quantenregister während der Ausführung der QFT vor einer Dephasierung der Qubits zu schützen, werden dynamische Entkopplungspulse verwendet (siehe dazu Kapitel 7). Während der bedingten Entwicklungsdauer  $T_1$  werden an jedes Qubit 20 und während  $T_3$  jeweils 40 Entkopplungspulse adressiert. Um die J-Kopplungen innerhalb des Systems nicht zu beeinträchtigen erfolgen die Pulse an unterschiedliche Qubits unmittelbar nacheinander. Die Taktung entspricht der einer CPMG-Sequenz und die Phasenlage der Pulse einer KDD-Sequenz (siehe dazu den Abschnitt 7.1.4).

In der Abbildung 9.2 ist die optimierte und vereinfachte Pulssequenz zur Realisierung der QFT (9.2.28) in Form einer Quantenschaltung dargestellt. Die Zeit läuft hierbei von links nach rechts. Aus Gründen der besseren Übersicht werden die dynamischen Entkopplungspulse nicht dargestellt. Wie man erkennen kann, besteht die Pulssequenz aus den Einzelqubitrotationen  $R(\theta, \phi)$  und bedingten Entwicklungen  $U(T)$  von unterschiedlichen Dauern. Da das verwendete Mikrowellensystem es nicht erlaubt, unterschiedliche Frequenzen zeitgleich zu erzeugen, werden die Einzelqubitrotationen von unterschiedlichen Qubits nacheinander ausgeführt. Das Hadamard-Gatter  $H$  entspricht zwei Drehungen  $R(\pi/2, -\pi/2) R(\pi, 0)$  und das zusätzliche SWAP<sub>13</sub>-Gatter  $\times$  am Ende der Sequenz, welches die QFT vervollständigt, entspricht einer Umbenennung der Qubits. Die gesamte Sequenz dauert aufgrund der bedingten Entwicklungsdauern 8,56 ms, wobei die Dauern der Einzelqubitrotationen vernachlässigt werden.



**Abbildung 9.2.:** Quantenschaltung der realisierten QFT. Die Sequenz besteht aus Einzelqubitrotationen  $R(\theta, \phi)$ , welche orangefarben dargestellt sind, und bedingten Zeitentwicklungen  $U(T)$ , hier in blau dargestellt, während denen sich das System entwickelt (vgl. Gl. (9.2.28)). Ein zusätzliches  $\text{SWAP}_{13}$ -Gatter vervollständigt den Algorithmus. Die Zahlen 1 bis 6 verweisen auf die Entwicklungsschritte der Dynamik, welche in der Abbildung 9.3 dargestellt ist.

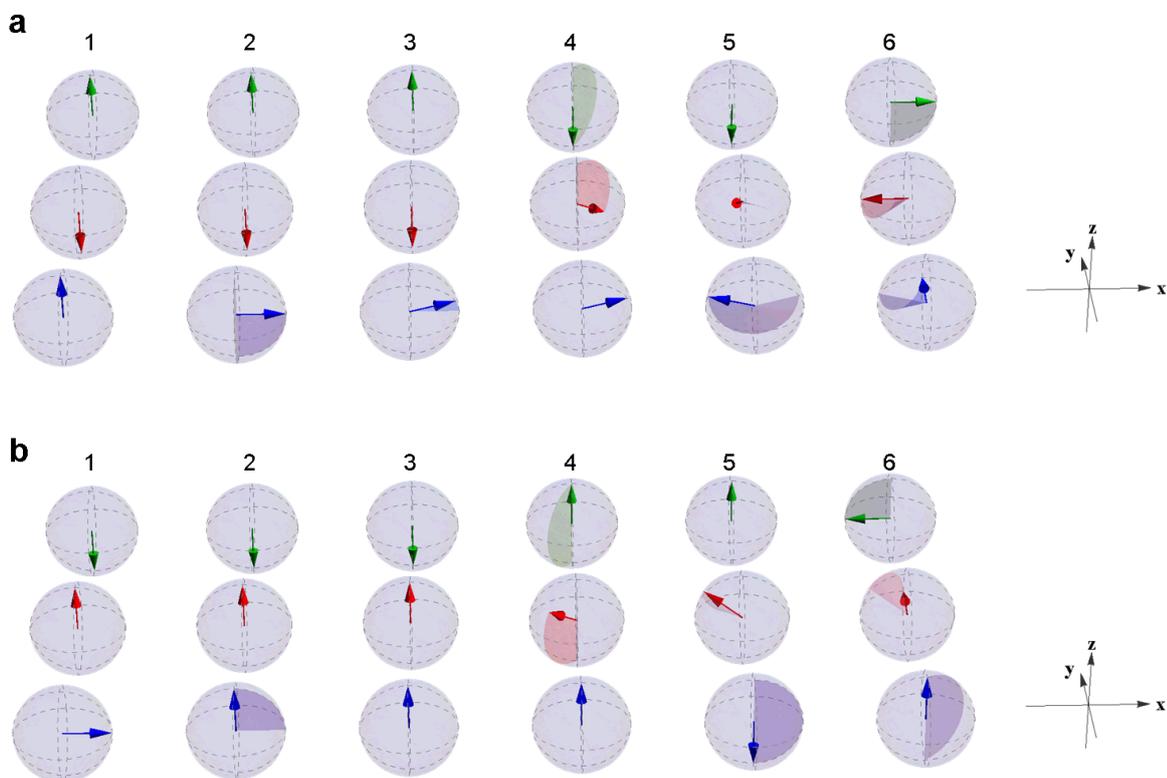
### 9.2.3. Dynamik der QFT

In der Abbildung 9.3 ist die Zeitentwicklung des Drei-Qubit-Systems während der optimierten Pulssequenz (9.2.28) für zwei unterschiedliche exemplarische Anfangszustände,  $|010\rangle$  und  $|+01\rangle$ , illustriert (vgl. auch die Abbildung 9.2). Da sich das System für diese beiden Zustände zu allen Zeiten in einem vollständig separablen Zustand befindet, kann der Registerzustand durch drei Bloch-Kugeln dargestellt werden.

Anfangs wird das Register immer in dem Grundzustand  $|000\rangle$  präpariert, woraufhin die Initialisierung in dem gewünschten Eingangszustand erfolgt (beides nicht gezeigt). Dieses geschieht beispielsweise mittels eines zusätzlichen NOT- beziehungsweise Hadamard-Gatters. Befindet sich jedes Qubit in dem Anfangszustand (1. Schritt), beginnt die Sequenz mit einem Hadamard-Gatter  $H^{(1)}$  auf dem ersten Qubit (2. Schritt), welches somit in (a) von  $|0\rangle$  in den Zustand  $|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$  überführt wird. Der nächste Schritt ist eine bedingte Entwicklung während der Dauer  $T_1$ . Da sich lediglich das erste Qubit in einem Superpositionszustand befindet, erfährt nur dieses aufgrund der vorhandenen J-Kopplungen eine Phasenänderung abhängig vom Zustand der Qubits 2 und 3 (vgl. den Abschnitt 7.3.5). Da sich diese in unterschiedlichen Zuständen befinden, erfolgt die z-Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $J_{12} - J_{13}$  um die z-Achse (3. Schritt). Als nächstes werden die Qubits 2 und 3 gedreht (4. Schritt). Während der folgenden bedingten Entwicklung wirkt effektiv nur die Kopplung  $J_{23}$  zwischen den beiden Qubits 2 und 3 (5. Schritt). Die Zeitentwicklung aufgrund der Kopplungen an das Qubit 1 wird hierbei durch einen Spin-Echo-Puls an das erste Qubit aufgehoben. Insgesamt folgt hier nun eine Phasenänderung von Qubit 2, die abhängig vom Zustand des dritten Qubits erfolgt. Zuletzt (6. Schritt) werden alle Qubits manipuliert, bevor das Register in dem Endzustand ist. Das noch notwendige  $\text{SWAP}_{13}$ -Gatter erfolgt wäh-

rend der Datenauswertung durch eine Umbenennung der Qubits 1 und 3.

Für den Eingangszustand  $|+01\rangle$  (b) ist die Dynamik während der Sequenz (9.2.28) einfacher. Das Hadamard-Gatter bringt das erste Qubit von  $|+\rangle$  zurück in den Grundzustand  $|0\rangle$ . Während der bedingten Entwicklungsdauer  $T_1$  befinden sich somit alle Qubits in Energie-Eigenzuständen und ändern ihren Zustand somit nicht (bis auf eine irrelevante globale Phase). Erst während der Entwicklungsdauer  $T_3$  (5. Schritt) erfährt Qubit 2 dann eine Phasenänderung abhängig von Qubit 3.



**Abbildung 9.3.:** Die Dynamik während der optimierten Pulssequenz für die Anfangszustände  $|010\rangle$  (a) und  $|+01\rangle$  (b). Da der Zustand des Drei-Qubit-Systems hierbei jederzeit separabel ist, kann er durch die Bloch-Kugeln der einzelnen Qubits dargestellt werden (blau: Qubit 1, rot: Qubit 2, grün: Qubit 3). Die Schrittzahlen 1 bis 6 verweisen auf die Entwicklungsschritte der Dynamik. Siehe dazu auch die Abbildung 9.2 und den Text für Details.

### 9.3. Ergebnisse der QFT

In diesem Abschnitt werden die experimentellen Ergebnisse der im Rahmen dieser Arbeit realisierten QFT diskutiert. Hierbei handelt es sich zuerst um den Nachweis, dass die Anwendung der optimierten Pulssequenz zu der gewünschten bedingten Dynamik der drei Qubits führt. Daran im Anschluss werden die unterschiedlichen Fehlerquellen, welche die Ergebnisse beeinträchtigen, anhand von Simulationen diskutiert. Des Weiteren wird exemplarisch die Anwendungen der QFT zur Bestimmung der Periodizität von Quantenzuständen anhand experimenteller Daten diskutiert.

#### 9.3.1. Charakterisierung der Fidelity

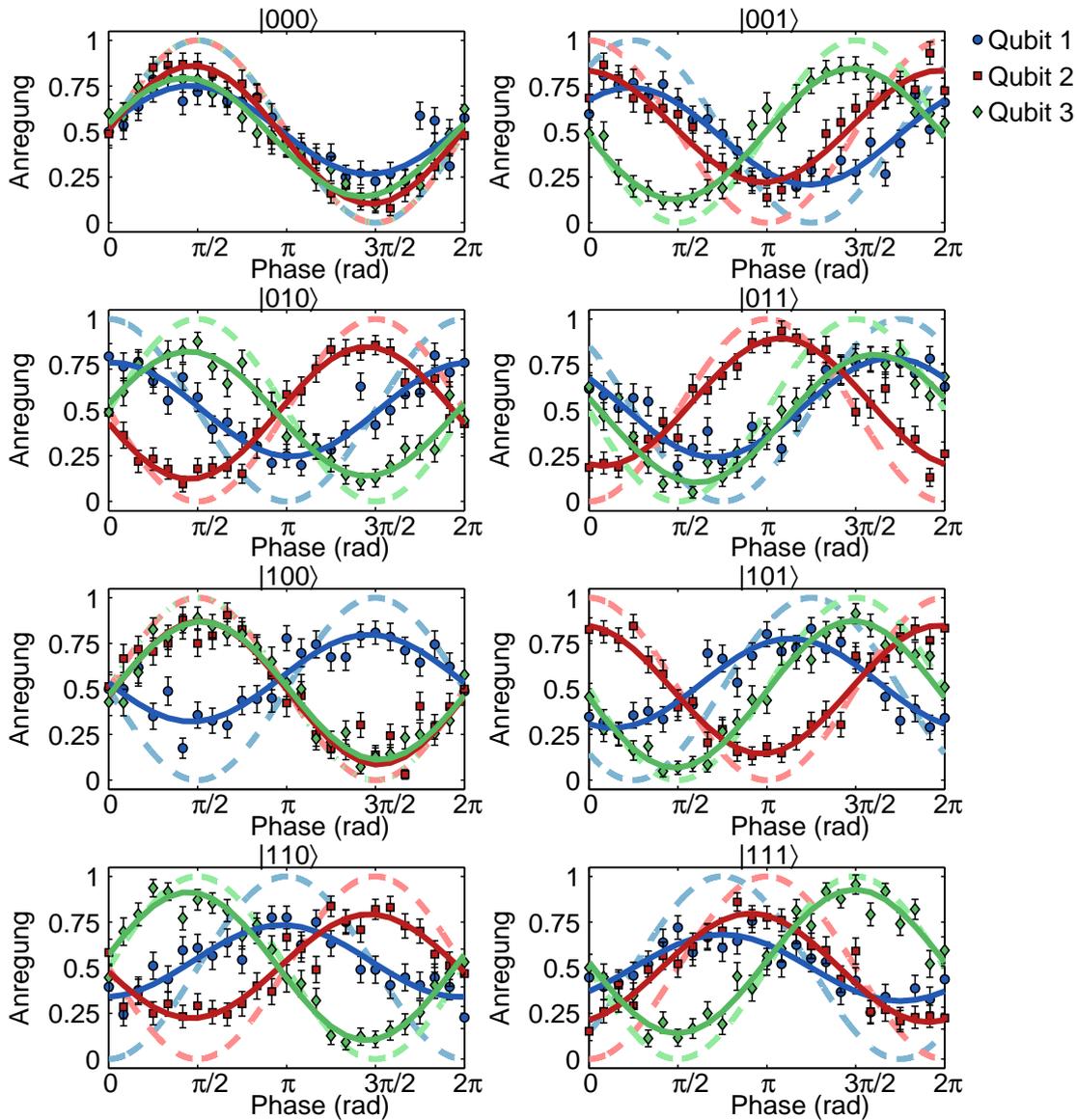
Die wechselseitigen J-Kopplungen innerhalb des Drei-Qubit-Systems sind in vorherigen Messungen (vgl. den Abschnitt 7.3.5) experimentell bestimmt worden. Die dortigen Ergebnisse stimmen mit älteren Messungen an dem gleichen experimentellen Aufbau überein (siehe dazu [29]). Basierend auf dem Wissen über die Kopplungsmatrix  $J_{nm}$  konnten die bedingten Entwicklungsdauern  $T_1 = 3,69$  ms und  $T_3 = 4,87$  ms aus dem Abschnitt 9.2 berechnet werden.

Zuerst erfolgt die Bestätigung, dass die gewünschte bedingte Drei-Qubit-Dynamik der QFT tatsächlich durch die optimierte Pulssequenz realisiert wird. Das Drei-Qubit-Register wird hierfür in einem der acht Basiszustände

$$\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\} \quad (9.3.1)$$

initialisiert und danach die Pulssequenz ausgeführt. Da die QFT diese Anfangszustände zu Produktzuständen aus Einzelqubitsuperpositionen überführt, können die Endzustände mittels Ramsey- $\pi/2$ -Pulsen untersucht werden (siehe den Abschnitt 4.6). Die zustandsabhängige Resonanzfluoreszenz jedes Ions wird mit der EMCCD-Kamera detektiert und aus den Anregungswahrscheinlichkeiten lassen sich Ramsey-Interferenzstreifen der Qubits beobachten.

In der Abbildung 9.4 sind die Resultate dargestellt. Die durchgezogenen Linien stellen jeweils eine Anpassung an die Datenpunkte dar, während die gestrichelten Linien die idealen, mit den Grundlagen aus dem Abschnitt 9.1 berechneten, Ergebnisse repräsentieren. Bei den hier gezeigten Ergebnissen wurde auf die notwendige Umbenennung der Qubits 1 und 3 noch verzichtet. Wie man leicht sehen kann, stimmen die Phasenlagen der beobachteten Interferenzstreifen mit den idealen Erwartungen überein. Die mittlere Abweichung der gemessenen Phasenlagen von dem Ideal beträgt lediglich 0,07(15) rad. Da die Phase eines jeden Qubits das Ergebnis der Kopplungen in dem vollständig gekoppelten Drei-Qubit-System ist, lässt sich aus der guten Übereinstimmung schließen, dass die bedingten Entwicklungsdauern  $T_1$  und  $T_3$  sowie die Ein-Qubit-Gatter im Zu-



**Abbildung 9.4.:** Resultierende Ramsey-Streifen nachdem die QFT auf Basiszustände angewandt wurde. Die Streifen (durchgezogene Linie entspricht Anpassung an die Datenpunkte) zeigen die gleiche Phasenlagen, wie man sie für das Ideal erwartet (gestrichelte Linie). Der Kontrast ist wegen technischer Fehlerquellen reduziert (siehe Text). Jeder Datenpunkt repräsentiert 50 Wiederholungen und die Fehlerbalken entsprechen der Standardabweichung.

sammenspiel mit den vorhandenen Kopplungen zur gewünschten bedingten Dynamik führen.

Während die Phasenlagen also dem Idealzustand entsprechen, ist der Kontrast der beobachteten Interferenzstreifen signifikant reduziert. Dieses lässt sich hauptsächlich durch eine Dephasierung der Qubits während der bedingten Entwicklungsdauern erklären. Weitere Ursachen sind Pulsfehler der Sequenz bzw. der 60 dynamischen Entkopplungspulse sowie die begrenzte Güte des Zustandsnachweises (siehe den Abschnitt 9.3.3 für eine detailliertere Diskussion).

Nachdem zusätzlich die exemplarischen Superpositionszustände

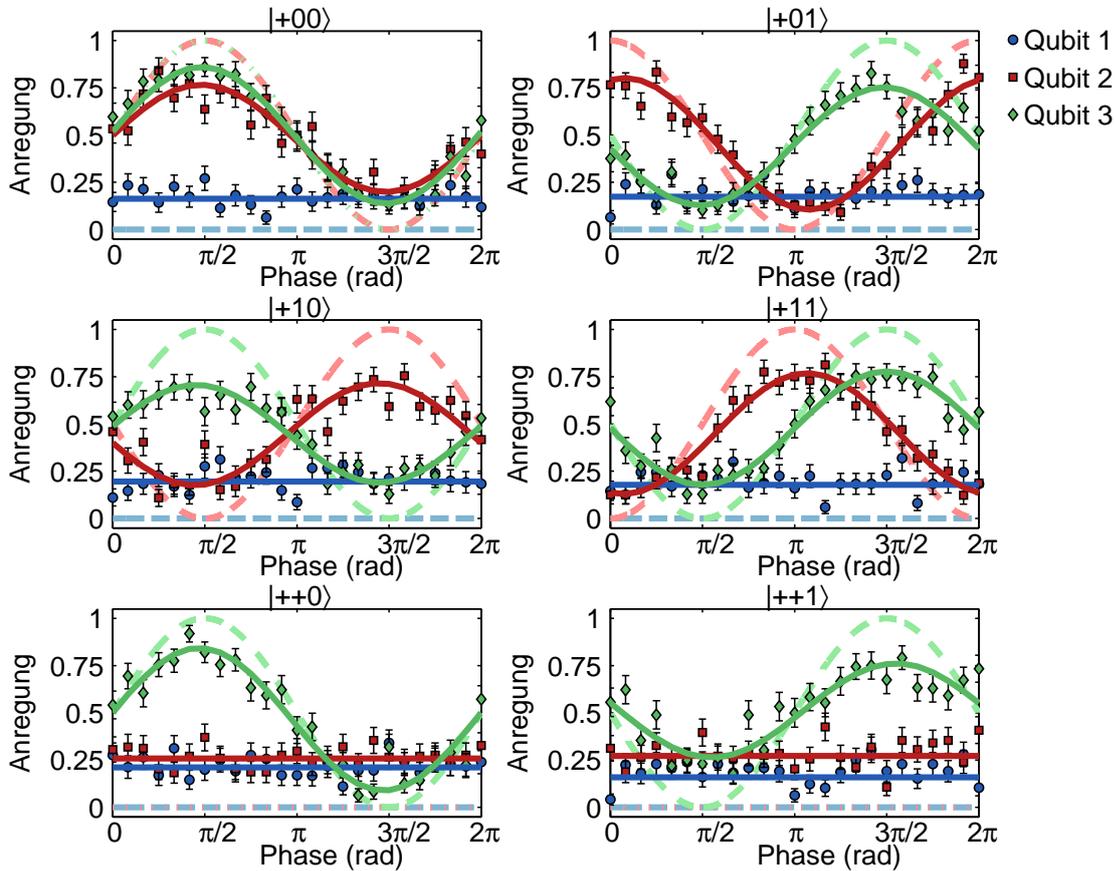
$$\{|+00\rangle, |+01\rangle, |+10\rangle, |+11\rangle, |++0\rangle, |++1\rangle, |+++ \rangle\} \quad (9.3.2)$$

präpariert wurde, werden fast die gleichen experimentellen Schritte wie zuvor ausgeführt. Der Zustand  $|+\rangle$  bezeichnet dabei die Superposition  $1/\sqrt{2}(|+\rangle + |1\rangle)$ . Für die gewählten Anfangszustände überführt die QFT idealerweise jedes Qubit, das in  $|+\rangle$  präpariert worden ist, in den Zustand  $|0\rangle$ . Im Unterschied zu den obigen Messungen wird nun für den Fall, in dem ein Qubit in  $|0\rangle$  endet, der entsprechende Ramsey- $\pi/2$ -Puls weggelassen und die Anregungswahrscheinlichkeit direkt gemessen. Aus diesem Grund werden also beispielsweise für die Zustände aus (9.3.2) der Ramsey-Puls an das Qubit 1 immer ausgelassen.

Die experimentellen Ergebnisse sind in der Abbildung 9.5 zu finden. Hier entsprechen erneut die durchgezogenen Linien Anpassungen an die Datenpunkte und die gestrichelten den idealen Erwartungen. Wie zuvor ist ersichtlich, dass die beobachteten Phasenlagen mit dem Ideal übereinstimmen und die mittlere Abweichung beträgt  $0,08(13)$  rad. Darüber hinaus zeigt jeweils das Qubit, welches in  $|0\rangle$  erwartet wird nur eine geringe Anregungswahrscheinlichkeit. Der reduzierte Kontrast der Ramsey-Streifen sowie die unbeabsichtigten Anregungen lassen sich wie zuvor durch eine Dephasierung und technische Fehlerquellen an dem experimentellen Aufbau erklären.

Um die Übereinstimmung der experimentellen Daten mit der idealen Vorhersage weiter zu quantifizieren, wird der Überlapp der Zustände direkt nach der Pulssequenz mit den idealen Endzuständen verglichen (siehe dazu auch den Abschnitt 4.7). Die Fidelity kann sehr effizient unter der Annahme von separablen Endzuständen rekonstruiert werden. In diesem Fall reduziert sich die Fidelity des Drei-Qubit-Systems  $F_{\text{sep}}$  zu dem Produkt aus den Einzelqubit-Fidelities. Die Auswertung basiert dabei auf den Daten der beiden Abbildungen 9.4 und 9.5.

Darüber hinaus wurde die Fidelity  $F_{3Q}$  des Drei-Qubit-Systems in unabhängigen Experimenten gemessen. Hierzu wurde zuerst die Pulssequenz zur Realisierung der QFT auf die Eingangszustände  $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$  angewandt.



**Abbildung 9.5.:** Resultierende Ramsey-Streifen nachdem die QFT auf beispielhafte Superpositionszustände angewandt wurde. An die Qubits, die für ein ideales Gatter im Grundzustand  $|0\rangle$  erwartet werden, werden keine Ramsey-Pulse adressiert. Die Streifen (durchgezogene Linie ist Anpassung an die Datenpunkte) zeigen die gleiche Phasenlagen, wie man sie für das Ideal (gestrichelte Linie) erwartet. Der reduzierte Kontrast und die unbeabsichtigten Anregungswahrscheinlichkeiten beruhen auf technischen Fehlerquellen des experimentellen Aufbaus, die im nächsten Abschnitt diskutiert werden. Jeder Datenpunkt repräsentiert 50 Wiederholungen und die Fehlerbalken entsprechen der Standardabweichung.

In einem zweiten Schritt wurden  $\pi/2$ -Pulse an die Qubits adressiert. Die Phase der Pulse war jeweils so gewählt, dass der Puls das Qubit für den idealen Zustand in den Grundzustand  $|0\rangle$  überführt. Im Anschluss erfolgte eine Projektionsmessung, aus der die Wahrscheinlichkeit bestimmt wurde, den Zustand  $|000\rangle$  zu finden. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht der Fidelity des Drei-Qubit-Systems (vgl. Abschnitt 4.7.2). Neben den Basiszuständen wurden auch exemplarisch die Superpositionszustände  $|+00\rangle$  und  $|+++ \rangle$  als Anfangszustände untersucht. Die QFT überführt das erste Qubit idealerweise in den Grundzustand  $|0\rangle$ , weshalb vor der Projektionsmessung kein weiterer  $\pi/2$ -Puls an dieses adressiert wurde. Der Zustand  $|+++ \rangle$  wird von der QFT direkt in den Grundzustand  $|000\rangle$  überführt, weshalb für diesen Eingangszustand gar kein weiterer  $\pi/2$ -Puls zur Messung der Fidelity nötig ist.

In der Tabelle 9.1 sind die rekonstruierten Einzelqubit-Fidelities  $F_1, F_2, F_3$  sowie die resultierenden Drei-Qubit-Fidelities  $F_{3Q}$  für die unterschiedlichen Anfangszustände zusammengefasst.

Die mittlere Fidelity  $\langle F_{\text{sep}} \rangle$  der 15 Eingangszustände beträgt 0,53(4) und es zeigen sich keine signifikanten Unterschiede für die Fälle, in denen Energieeigenzustände oder die Superpositionszustände präpariert worden sind. Aus der Auswertung folgt eine mittlere Fidelity des Drei-Qubit-Systems  $\langle F_{3Q} \rangle$  von 0,58(5), welche den nichtklassischen Charakter des Quantenalgorithmus verdeutlicht. Mit klassischen Zuständen könnte lediglich eine Fidelity von  $0,5^3 = 0,125$  erzielt werden.

### 9.3.2. Diskussion der Fehlerquellen

Die in dem vorherigen Abschnitt ermittelten Fidelities, welche die Leistungsfähigkeit der QFT charakterisieren, weichen deutlich von dem Ideal ab. Die Abweichungen der Phasenlagen führen dabei jedoch nur zur Verminderung der Fidelity des Drei-Qubit-Systems im Bereich von 0,01 und hauptsächlich beruht sie auf einem reduzierten Kontrast der Interferenzstreifen und unbeabsichtigten beziehungsweise scheinbaren Qubitanregungen. Diese Effekte resultieren aus unterschiedlichen Fehlerquellen an dem experimentellen Aufbau, die im Folgenden diskutiert werden.

- Magnetfeldfluktuationen führen zu einer Dephasierung der Qubits. Zwar wird dieser während den bedingten Entwicklungsdauern mit dynamischen Entkopplungspulsen (siehe Kapitel 7) entgegengewirkt, jedoch können nicht alle Frequenzkomponenten des Magnetfeldrauschens kompensiert werden.
- Aufgrund einer langsamen Drift der Adressierungsfrequenzen der Qubits (siehe dazu Kapitel G) sind die Mikrowellenpulse nicht perfekt. Die resultierenden Pulsfehler der Entkopplungspulse und der lokalen Qubitmanipulationen der QFT kön-

nen dann zu einem scheinbar chaotischen Verhalten der Qubits führen und somit den Zustand des Qubits zufällig von  $|0\rangle$  nach  $|1\rangle$  und umgekehrt ändern.

- Der Zustandsnachweis ist fehlerbehaftet. Dieses führt dazu, dass die Qubitzustände in zufälliger Weise falsch zugeordnet werden können.

Diese unterschiedlichen Fehlerquellen begrenzen die Leistungsfähigkeit der QFT abhängig davon, welcher Eingangszustand für den Algorithmus gewählt wird. So sind nur Qubits, die sich in einem Superpositionszustand befinden, von einer Dephasierung betroffen. In der Tabelle 9.1 kann man beispielsweise erkennen, dass für die Anfangszustände aus (9.3.1) die Fidelity des ersten Qubits  $F_1$  immer signifikant kleiner als die der anderen beiden Qubits ist. Die Fidelity des dritten Qubits  $F_3$  hingegen ist typischerweise die größte. Dieses ist auch offensichtlich in der Abbildung 9.4, in der die Interferenzstreifen dargestellt sind. Hier zeigt sich der Streifenkontrast des ersten Qubits

**Tabelle 9.1.:** Gemessene Zustands-Fidelities nach Ausführung der QFT. Die Zustands-Fidelities  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  der Einzelqubits werden aus den Ramsey-Streifen bzw. der Anregungswahrscheinlichkeit rekonstruiert. Die Zustands-Fidelity für das Drei-Qubit-System  $F_{\text{sep}}$  ergibt sich aus den einzelnen Fidelities unter der Annahme eines separablen Zustands nach der QFT und der Mittelwert hierfür beträgt 0,53(4). Die Fidelity  $F_{3Q}$  wurde zusätzlich in unabhängigen Messungen ohne die Annahme von separablen Endzuständen bestimmt. Der Mittelwert hierfür beträgt 0,58(5) und ist statistisch mit  $F_{\text{sep}}$  verträglich.

Zustand	$F_{\text{sep}}$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_{3Q}$
$ 000\rangle$	0,53(6)	0,74(5)	0,88(5)	0,82(5)	0,59(2)
$ 001\rangle$	0,53(4)	0,77(4)	0,81(2)	0,86(4)	0,54(2)
$ 010\rangle$	0,55(4)	0,76(7)	0,86(4)	0,84(4)	0,55(2)
$ 011\rangle$	0,54(5)	0,77(5)	0,84(2)	0,83(4)	0,54(2)
$ 100\rangle$	0,58(6)	0,74(5)	0,89(5)	0,88(5)	0,59(2)
$ 101\rangle$	0,56(4)	0,73(4)	0,85(2)	0,90(4)	0,66(2)
$ 110\rangle$	0,49(4)	0,70(4)	0,78(4)	0,90(3)	0,57(2)
$ 111\rangle$	0,48(4)	0,68(4)	0,79(3)	0,89(4)	0,63(2)
$ +00\rangle$	0,56(5)	0,84(2)	0,78(5)	0,86(5)	0,65(2)
$ +01\rangle$	0,56(4)	0,83(2)	0,84(3)	0,81(4)	-
$ +10\rangle$	0,47(3)	0,81(2)	0,77(4)	0,76(4)	-
$ +11\rangle$	0,54(3)	0,82(2)	0,81(2)	0,80(4)	-
$ ++0\rangle$	0,51(3)	0,79(2)	0,74(2)	0,88(4)	-
$ ++1\rangle$	0,46(3)	0,84(2)	0,73(2)	0,75(4)	-
$ +++ \rangle$	0,52(3)	0,86(2)	0,79(2)	0,77(2)	0,54(2)

deutlich gegenüber denen der anderen beiden Qubits reduziert. Die Erklärung liegt in den unterschiedlichen Dauern, während denen sich ein bestimmtes Qubit in einem Superpositionszustand befindet und sein Zustand somit dephasieren kann, begründet. Für die Basiszustände (9.3.1) wird das erste Qubit direkt nach dem Hadamard-Gatter in einen Superpositionszustand überführt, in dem es bis zum Ende verbleibt (siehe auch die Abbildung 9.3 (a)). Das dritte Qubit hingegen wird erst am Ende der Sequenz in einen Superpositionszustand gebracht und das zweite Qubit befindet sich nur während der bedingten Entwicklungsdauer  $T_3$  in einem Superpositionszustand. Aus diesem Grund ist sein Zustand weniger stark beeinträchtigt als der des ersten.

Für die exemplarischen Superpositionszustände (9.3.2) zeigt sich ein unterschiedliches Verhalten. Hier ist die Fidelity des ersten Qubits  $F_1$  vergleichbar mit der des dritten Qubits  $F_3$ . Dieses lässt sich erneut durch die Dynamik der QFT erklären (siehe Abbildung 9.3 (b)). Das Hadamard-Gatter bringt das erste Qubit hier zu Beginn der Sequenz von  $|+\rangle$  wieder in den Grundzustand  $|0\rangle$ . Aus diesem Grund ist das erste Qubit nun nicht von Dephasierung betroffen.

### 9.3.3. Simulation der Fehlerquellen

Um zu untersuchen, in wie weit die beobachteten Abweichungen der experimentellen Ergebnisse von dem Ideal auf identifizierte technische Fehlerquellen zurückzuführen sind, wird der Einfluss dieser Fehlerquellen simuliert. Im Anschluss können dann simulierte Ergebnisse mit den Messdaten verglichen werden. Der Quellcode zu den Simulationen befindet sich in dem Anhang L.

Aus unabhängigen Messungen kann der exponentielle Zerfall der Einzelqubitkohärenzen aufgrund von Magnetfeldrauschen quantitativ bestimmt werden. Für die Verwendung von 60 dynamischen Entkopplungspulsen folgt eine Kohärenzzeit von etwa 16 ms (vgl. den Abschnitt 7.2 und die Abbildung 7.11 ebenda). Diese entspricht einer Zerfallskonstanten von  $62,5 \text{ s}^{-1}$ , mit der die Einzelqubitkohärenzen während den bedingten Entwicklungsdauern zerfallen. Eine reine Dephasierung der Qubits kann somit anhand der Dichtematrix des Systems modelliert werden. Hierbei entwickelt sich die Dichtematrix  $\rho$  des Systems nach  $\rho_{\text{deph}}$ . In dieser Matrix zerfallen die Einzelqubitkohärenzen entsprechend der obigen Zerfallskonstanten (siehe auch den Abschnitt 7.1.1 und beispielsweise [151]).

Die begrenzte Güte der Zustandsdetektion und das scheinbar chaotische Verhalten aufgrund von Pulsfehlern führen zu einer zufälligen Mischung der beiden Zustände  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$ . Im Weiteren wird dieser Effekt durch weißes Rauschen modelliert. Hierbei wird zu der dephasierten Dichtematrix  $\rho_{\text{deph}}$  das weiße Rauschen in Form der Einheitsmatrix beigemischt. Diese entspricht bis auf den Normierungsfaktor  $1/8$  der Dichtematrix eines vollständig zufälligen Zustands. Der Zusammenhang für die resultierende Dichtematrix

$\tilde{\rho}_{\text{sim}}$  lautet dann

$$\tilde{\rho}_{\text{sim}} = p/8 \mathbb{1} + (1 - p)\rho_{\text{deph}}, \quad (9.3.3)$$

wobei der Parameter  $p$  die Stärke des weißen Rauschens beschreibt. Für diesen folgt aus den Messungen empirisch  $p = 0,25$ . Die beiden Parameter (die Zerfallskonstante und die Stärke des Rauschens) erlauben somit eine Simulation der Zeitentwicklung des Systems in der Art, dass experimentelle Fehlerquellen explizit berücksichtigt werden.

Somit können die Messungen der Drei-Qubit-Fidelity aus dem Abschnitt 9.3.1 simuliert werden. In der Abbildung 9.6 sind die Ergebnisse dargestellt. Die Messungen bestanden aus der Präparation eines der acht Basis-Zustände und der Ausführung der QFT. Hieran im Anschluss wurde an jedes Qubit ein  $\pi/2$ -Puls adressiert, der das jeweilige Qubit in den Grundzustand  $|0\rangle$  bringen soll. Die Wahrscheinlichkeit bei der Projektionsmessung den Zustand  $|000\rangle$  zu finden, entspricht dann der Fidelity. Zur einfacheren Übersicht sind die acht Basiszustände mit den Zahlen von 0 bis 7 bezeichnet. Wie man erkennen kann, weicht das Messergebnis deutlich von der idealen Theorie ab. Jedoch kann die Simulation mit den obigen Parametern die experimentellen Ergebnisse gut reproduzieren.

Um die Übereinstimmung der gemessenen Histogramme mit den simulierten zu beschreiben, wird der sogenannten Squared Statistical Overlap (SSO) verwendet. Dieser ist definiert als [184]

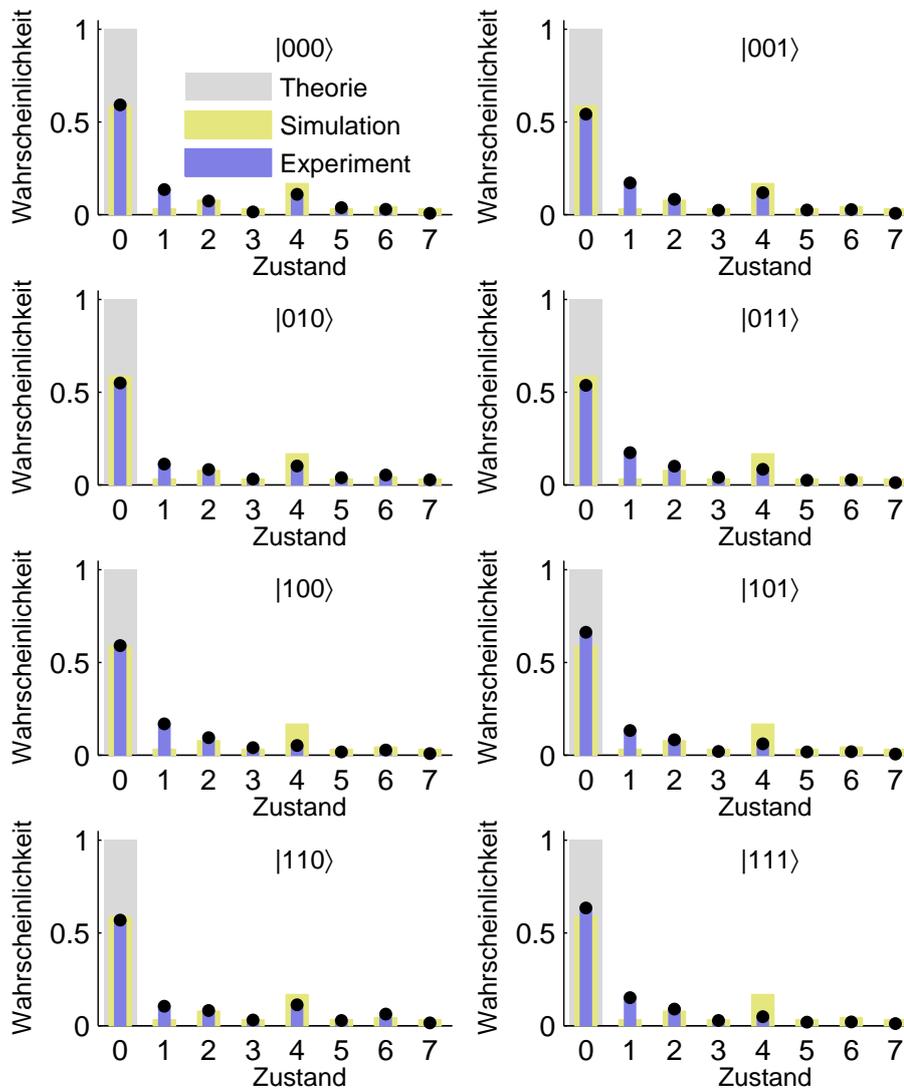
$$\gamma_{\text{SSO}}^{\text{Sim}}(p_i, s_i) = \left( \sum_{i=0}^7 \sqrt{p_i s_i} \right)^2, \quad (9.3.4)$$

wobei die Größe  $p_i$  der Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $i = 0..7$  zu messen, und  $s_i$  der simulierten Vorhersage, diesen Zustand vorzufinden, entspricht. Aus den obigen acht Histogrammen folgt der Mittelwert<sup>3</sup>  $\langle \gamma_{\text{SSO}}^{\text{Sim}} \rangle = 0,93(3)$ . Somit lässt sich schlussfolgern, dass die Abweichungen der experimentellen Ergebnisse von dem Ideal zum Großteil auf die oben diskutierten Fehlerquellen zurückzuführen sind und diese im Rahmen der Simulationen hinreichend gut beschrieben werden können.

Aus dem Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den Simulationen lassen sich die Einflüsse der einzelnen Fehlerquellen, die zur mittleren Fidelity von  $\tilde{F} = 0,58(5)$  führen, diskutieren. Die resultierende Fidelity, welche die Dephasierung und das weiße Rauschen berücksichtigt, ergibt sich mit der Gleichung (9.3.3) bezogen auf den Zustand  $|\psi\rangle$  zu

$$\tilde{F} = p/8 + (1 - p)F_{\text{deph}}. \quad (9.3.5)$$

<sup>3</sup>In dem nächsten Abschnitt werden weitere Messergebnisse mit ähnlichen Simulationen verglichen und die Übereinstimmung entspricht dabei einem SSO von  $0,98(3)$



**Abbildung 9.6.:** Vergleich der Daten zur Fidelity-Messung mit Simulationen, die Magnetfeldfluktuationen, Pulsfehler und eine fehlerbehafteten Detektion berücksichtigen. Für die acht unterschiedlichen Eingangszustände wird die QFT ausgeführt und durch zusätzliche Pulse wird idealerweise der Zustand  $|000\rangle$  besetzt. Die Wahrscheinlichkeit diesen Zustand vorzufinden entspricht der Fidelity. Zur besseren Übersicht sind die Zustände, die bei der Projektionsmessung vorgefunden werden, von 0 bis 7 bezeichnet. Darüber hinaus werden diese Experimente simuliert und die resultierenden Histogramme ebenfalls dargestellt. Die Fehlerbalken, welche den statistischen Fehler der Datenpunkte beschreiben, sind zu klein, um sie erkennen zu können. Der typische statistische Fehler beträgt 0,02.

**Tabelle 9.2.:** Zusammenfassung des Einflusses der technischen Fehlerquellen auf die Fidelity. Die Bestimmung der resultierenden Gesamtinfidelity folgt aus der Gleichung (9.3.5) und nicht aus der Summation der Infidelities.

technische Fehlerquelle	verursachter Effekt	resultierende Infidelity
Magnetfeldrauschen	Zerfall von Qubitkohärenzen	0,27
Detektionsfehler	weißes Rauschen	0,12
Pulsfehler	weißes Rauschen	0,10

Dabei beschreibt  $F_{\text{deph}} = \langle \psi | \rho_{\text{deph}} | \psi \rangle$  die Fidelity für den Fall, dass ausschließlich eine Dephasierung auf das System einwirkt. Für den Fall, dass keine Dephasierung wirkt ( $F_{\text{deph}} = 1$ ), folgt aus der Gleichung (9.3.5) eine Fidelity von etwa 0,78 (für  $p = 0,25$ ). Das weiße Rauschen reduziert die Fidelity also um 0,22. Der Anteil des fehlerhaften Zustandsnachweises ergibt sich aus der Nachweiswahrscheinlichkeit für den korrekten Zustand von 0,96 und beträgt somit  $1 - 0,96^3 = 0,12$  (vgl. den Abschnitt 4.3). Der restliche Anteil von 0,10 resultiert aus Pulsfehlern. Der Anteil, der sich aus der Dephasierung ergibt, lässt sich ebenfalls anhand von Gleichung (9.3.5) mit der gemessenen Fidelity  $\tilde{F}$  bestimmen und für  $p = 0,25$  folgt  $F_{\text{deph}} = 0,73$ . Wäre das System also ausschließlich von Dephasierung betroffen, würde sich die Fidelity um 0,27 reduzieren. In der Tabelle 9.2 sind die Stärken der unterschiedlichen technischen Fehlerquellen zusammengefasst.

### 9.3.4. Periodenbestimmung von Quantenzuständen

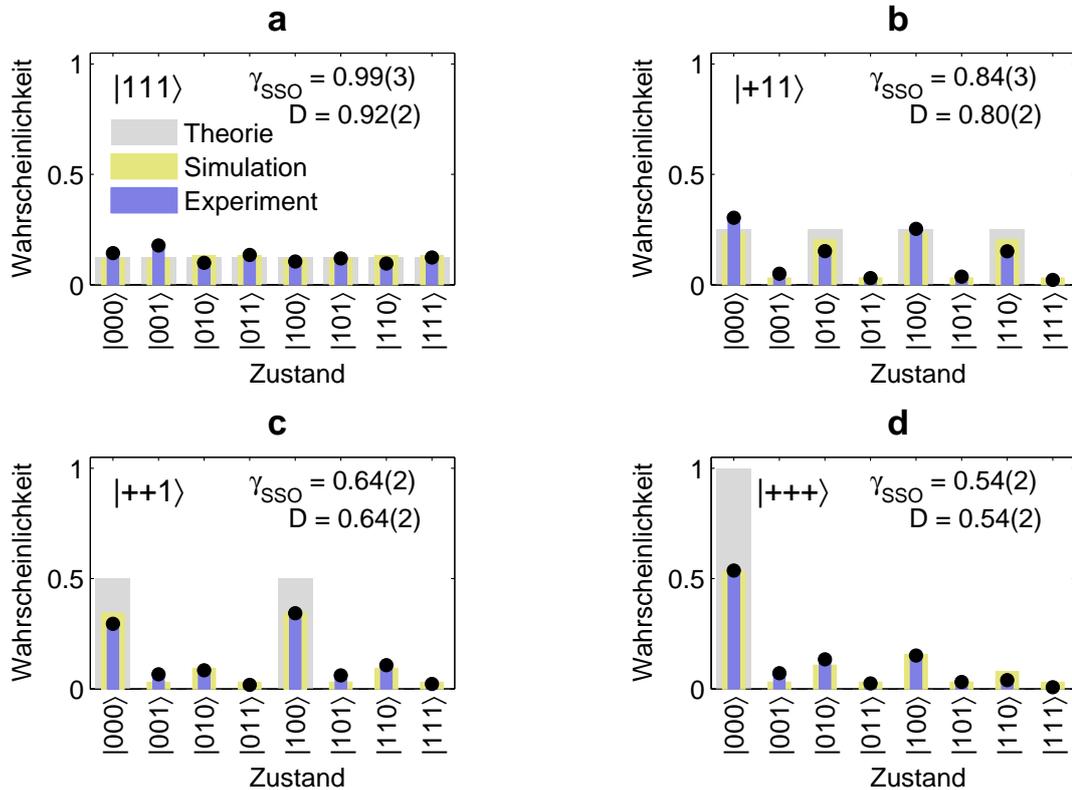
Nachdem in dem Abschnitt 9.3.1 bestätigt wurde, dass die verwendete Pulssequenz eine QFT ausführt, wird diese nun für exemplarische Aufgaben angewandt. Die Anwendung besteht in diesem Fall darin, die Periodizität eines Quantenzustands zu bestimmen (vgl. den Abschnitt 9.1 mit den Gleichungen (9.1.10) und (9.1.11)).

Experimentell wird hierzu das Drei-Qubit-Register in dem Grundzustand  $|000\rangle$  präpariert und dann einer der vier exemplarischen Anfangszustände

$$\{|111\rangle, | + 11\rangle, | + + 1\rangle, | + + +\rangle\} \quad (9.3.6)$$

initialisiert, wobei  $|+\rangle$  den Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |1\rangle)$  bezeichnet. Hiernach wird die optimierte Pulssequenz zur Realisierung der QFT ausgeführt und direkt im Anschluss findet eine Projektionsmessung statt. Dieses Experiment wird mehrmals wiederholt und so die Wahrscheinlichkeit bestimmt, das System in einem der Basiszustände  $|000\rangle, |001\rangle, \dots, |111\rangle$  zu finden. Zusätzlich zu der Pulssequenz ist es notwendig, die Qubits 1 und 3 umzubenennen.

In der Abbildung 9.7 sind die Ergebnisse für die vier Zustände (9.3.6), welche die Periodizität 8, 4, 2 beziehungsweise 1 haben, dargestellt. Die experimentellen Daten



**Abbildung 9.7.:** Ergebnisse der QFT zur Bestimmung der Periodizität von Quantenzuständen. Nach Ausführung der Pulssequenz auf unterschiedliche Eingangszustände wird der Zustand des Registers mittels einer Projektionsmessung detektiert und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der unterschiedlichen Ergebnisse aufgezeichnet. Die Messdaten werden sowohl mit dem Ideal als auch mit Simulationen, welche die technischen Fehlerquellen berücksichtigen, verglichen. Die Größen  $\gamma_{SSO}$  und  $D$  beschreiben die Güte der QFT. Jedes Experiment wird 1250 mal wiederholt und die Fehlerbalken sind zu klein, um sie erkennen zu können. Der typische statistische Fehler beträgt 0,02.

werden dabei sowohl mit der idealen Erwartung aus der Theorie als auch mit Simulationen, die vorhandene technische Fehlerquellen berücksichtigen, verglichen (siehe dazu den Abschnitt 9.3.3).

Zur Diskussion, wie gut die gemessenen Histogramme mit dem Ideal übereinstimmen, wird erneut der SSO und die sogenannte Distinguishability ( $D$ ) herangezogen. Im Gegensatz zu weiter oben vergleicht  $\gamma_{\text{SSO}}(p_i, q_i)$  nun die experimentellen Ergebnisse nicht mit Simulationsdaten, sondern mit den idealen Ergebnissen. Es gilt dabei die Definition [184]

$$\gamma_{\text{SSO}}(p_i, q_i) = \left( \sum_{i=0}^7 \sqrt{p_i q_i} \right)^2, \quad (9.3.7)$$

wobei die Größe  $p_i$  der Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $i = 0..7$  zu messen, und  $q_i$  der idealen Wahrscheinlichkeit, diesen Zustand vorzufinden, entspricht. Die Distinguishability ist definiert als [184]

$$D(p_i, q_i) = 1 - 1/2 \sum_{i=0}^7 |p_i - q_i|. \quad (9.3.8)$$

Die Größe  $p_i$  entspricht hier ebenfalls der Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $|i\rangle$  zu messen und  $q_i$  bezeichnet die ideale Erwartung hierfür.

Wie man erkennen kann, variieren  $\gamma_{\text{SSO}}$  und  $D$  von 0,99(3) bis 0,54(2) für die unterschiedlichen Eingangszustände  $|111\rangle$  bzw.  $|+++ \rangle$ . Der Grund für diese große Spanne liegt in der unterschiedlichen Fehleranfälligkeit des System für die verwendeten Eingangszustände. Wie bereits in dem Abschnitt 9.3.1 anhand der Fidelity für die Basiszustände diskutiert wurde, sind nun auch bei diesen Experimenten die einzelnen Qubits unterschiedlich lange in Superpositionszuständen und somit einer Dephasierung ausgesetzt. Die Tatsache, dass  $\gamma_{\text{SSO}}$  bzw.  $D$  größer als die mittlere gemessene Fidelity von 0,58(5) sein kann, lässt sich dadurch erklären, dass es sich bei diesen um klassische Kenngrößen handelt, die nicht von den Kohärenzen, sondern lediglich den Anregungswahrscheinlichkeiten der Zuständen abhängen. Die Ergebnisse der Auswertung sind in der Tabelle 9.3 zusammengefasst. Die beiden rechten Spalten enthalten dabei den Vergleich der Messdaten mit den simulierten Ergebnissen. Man kann erkennen, dass die experimentellen Resultate mit den Simulationen sehr gut verträglich sind ( $\langle \gamma_{\text{SSO}}^{\text{Sim}} \rangle = 0,98(3)$ ). Daraus lässt sich schließen, dass es sich bei den limitierenden Faktoren um die bekannten und verstandenen technischen Unzulänglichkeiten handelt (vgl. den Abschnitt 9.3.2).

Anhand der Periodizität der Zustände  $|++1\rangle$  und  $|+++ \rangle$  (c und d) kann die gute Übereinstimmung der Messdaten mit den Erwartungen auf eine alternative Art,

**Tabelle 9.3.:** Zusammenfassung der Mess- und Simulationsdaten zur Periodizitätsbestimmung.

Zustand	Periodizität	$\gamma_{SSO}$	$D$	$\gamma_{SSO}^{Sim}$	$D^{Sim}$
$ 111\rangle$	8	0,99(3)	0,92(2)	0,99(3)	0,91(2)
$ +11\rangle$	4	0,84(3)	0,80(2)	0,98(3)	0,89(2)
$ ++1\rangle$	2	0,64(2)	0,64(2)	0,98(2)	0,92(2)
$ +++ \rangle$	1	0,54(2)	0,54(2)	0,98(2)	0,93(2)

die über die Kenngrößen SSO und D hinaus geht, diskutiert werden. Der Zustand  $|++1\rangle$  hat eine Periodizität von 2, was bedeutet, dass die beiden Zustände  $|000\rangle$  und  $|100\rangle$  bei einer Projektionsmessung bevorzugt nachgewiesen werden. In den Messdaten erkennt man, dass diese beiden Zustände mit Wahrscheinlichkeiten von 0,30(2) bzw. 0,34(2) registriert werden. Der nächstwahrscheinlichste Zustand in den Messdaten ist der Zustand  $|110\rangle$ , der mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,10(2) registriert wird. Die bevorzugte Besetzung der beiden idealen Zustände  $|000\rangle$  und  $|100\rangle$  gegenüber dem wahrscheinlichsten unbeabsichtigten Zustand  $|110\rangle$  kann daher mit einer statistischen Signifikanz von 10 Standardabweichungen nachgewiesen werden.

Bei der Messung der Periode des Eingangszustands  $|+++ \rangle$  beträgt die Wahrscheinlichkeit den idealen Zustand  $|000\rangle$  vorzufinden 0,54(2). Der nächstwahrscheinliche unbeabsichtigte Zustand  $|100\rangle$  wird hingegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,15(2) registriert. Die bevorzugte Besetzung kann nun also mit einer statistischen Signifikanz von 20 Standardabweichungen nachgewiesen werden.

Im Folgenden wird kurz diskutiert, wieso die verschiedenen Zustände unterschiedlich stark von experimentellen Fehlerquellen beeinträchtigt werden. Wie man anhand der Ergebnisse sieht, ist die Leistungsfähigkeit der QFT für den Zustand  $|111\rangle$  nahezu perfekt. Der Grund ist, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Endzustände genau derjenigen entspricht, die man auch für eine vollständig dephasierter Mischung von Zuständen erwartet. Daher wird für diesen Zustand das System nicht von Rauschen und anderen zufälligen Fehlern beeinträchtigt. Für den Anfangszustand  $|+11\rangle$  wird das erste Qubit sofort nach Beginn der Sequenz in den Grundzustand  $|0\rangle$  überführt. Während der QFT-Sequenz befindet sich somit keines der Qubits in einem Superpositionszustand und aus diesem Grund werden die Ergebnisse lediglich von dem scheinbar chaotischen Verhalten aus Pulsfehlern und einer begrenzten Zustandsdetektion beeinträchtigt. Für die Eingangszustände  $|++1\rangle$  und  $|+++ \rangle$  werden die Ergebnisse zusätzlich von der Dephasierung negativ beeinflusst. Während für den Anfangszustand  $|++1\rangle$  nur das zweite Qubit betroffen ist, dephasieren für  $|+++ \rangle$  die Qubits 2 und 3. Dieses erklärt, wieso der SSO der Zustände unterschiedlich stark von von technischen Fehlern betroffen ist.

### 9.3.5. Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse und Ausblick

In diesem Kapitel wurde experimentell gezeigt, wie ein System von Spin-gekoppelter Ionen für die Realisierung eines Quantenalgorithmus verwendet werden kann. Als Beispiel wurde aufgrund seiner Bedeutung für die Quanteninformationsverarbeitung die QFT herangezogen. Die Realisierung des Algorithmus basierte dabei auf einer neuartigen Konstruktion, die nicht aus Ein- und Zwei-Qubit-Gattern besteht, sondern möglichst effizient alle vorhandenen Kopplungen ausnutzt. Für drei Qubits lässt sich hierbei eine Beschleunigung der Laufzeit gegenüber der herkömmlichen Konstruktion um fast den Faktor drei erzielen. Um die neuartige Konstruktion der QFT zu validieren, wurden sie auf mehrere Eingangszustände angewandt. Die mittlere Fidelity, die dabei erzielt werden konnte, beträgt 0,58(5). Der Vergleich mit dem Ergebnis für klassische Zustände von 0,125 zeigt den Quantencharakter des Algorithmus. Die Abweichung der Fidelity vom Ideal lässt sich durch technische Fehlerquellen vollständig erklären. Simulationen, welche diese Fehlerquellen explizit berücksichtigen, zeigen dabei eine Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Die Übereinstimmung lässt sich anhand der mittleren SSO von 0,93(3) beschreiben.

Darüber hinaus wurde die realisierte QFT für exemplarische Berechnungen genutzt, um die Periodizität von unterschiedlichen Eingangszuständen zu berechnen. Die Übereinstimmung mit dem Ideal liegt dabei zwischen 0,54 und 0,99, wobei die unterschiedliche Güte durch eine unterschiedliche Abhängigkeit der Zustände von den vorhandenen technischen Fehlerquellen erklärt wird.

Die verwendete Spin-Spin-Kopplung hängt quadratisch von dem vorhandenen Magnetfeldgradienten ab. In aktuellen Experimenten wurde von einem Magnetfeldgradient von 150 T/m berichtet [33]. Die Kopplung wäre somit um einen Faktor 60 größer als bei dem vorhandenen Aufbau und die Laufzeit würde um den gleichen Faktor auf 140  $\mu$ s reduziert. Unter diesen Umständen wären Methoden der dynamischen Entkopplung nicht länger notwendig. Zusammen mit Einzelqubitmanipulation von hoher Güte, wie sie ebenfalls für die Verwendung von Mikrowellenpulsen berichtet wird [25; 26], scheint es realistisch, mit dem gewählten experimentellen Ansatz eine QFT mit einer Fidelity von 0,99 realisieren zu können. Aufgrund der Allgemeingültigkeit des Ansatzes ist er auch auf andere physikalische Systeme anwendbar.

# 10

## Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit adressiert unterschiedliche grundlegende Fragen der Verwirklichung eines Quantencomputers basierend auf gespeicherten Spin-gekoppelten Ionen in einem Magnetfeldgradienten. Im Besonderen sind dies die Fragen, wie sich der Zustand eines Qubits auslesen lässt, wie sich ein einzelnes beliebiges Qubit manipulieren lässt und wie eine bedingte kohärente Mehr-Qubit-Dynamik realisiert werden kann. Die hierbei entwickelten Methoden und Ergebnisse werden für die Untersuchung von Systemen Spin-gekoppelter Qubits verwendet. Dabei wird demonstriert, wie die Spin-Spin-Kopplung mittels Kontrolle über die Qubits und die experimentellen Parameter maßgeschneidert werden kann. Des Weiteren werden die entwickelten und untersuchten Methoden zur Ausführung eines Quantenalgorithmus verwendet. Als Beispiel wird hierfür die Quanten-Fouriertransformation gewählt.

Dass in einem stationären Magnetfeldgradienten gespeicherte Ionen eine Spin-Spin-Kopplung zeigen, wurde theoretisch im Jahr 2001 vorhergesagt [24] und im Jahr 2012 an dem hier verwendeten experimentellen Aufbau erstmals nachgewiesen [29]. Der Magnetfeldgradient führt dabei zu einem effektiven Lamb-Dicke-Parameter, der eine Spin-Phonon-Wechselwirkung beschreibt und dessen Stärke von dem Magnetfeldgradienten und dem Fallenpotenzial abhängt. Eine solche Wechselwirkung wurde bereits im Jahre 2009 experimentell nachgewiesen [28]. Ein anderer Ansatz basiert auf oszillierenden Magnetfeldern [166; 168]. Bedeutend ist dabei, dass beide Ansätze die Verwendung von Mikrowellenstrahlung für die Manipulation erlauben.

Viele Ansätze zur Quanteninformationsverarbeitung mit gespeicherten Ionen basie-

---

ren auf der Manipulation mit Laserlicht [18]. Die technischen Anforderungen an die Laserlichtquellen sind dabei jedoch herausfordernd und stellen eine Begrenzung an die Leistungsfähigkeit dar. Darüber hinaus begrenzt eine spontane Emission der Ionen die Güte von quantenlogischen Operationen. Die Verwendung von langwelliger Mikrowellenstrahlung für die Manipulation hingegen hat sowohl technische als auch grundlegende Vorteile. Stabile durchstimmbare Mikrowellenquellen sind kommerziell erhältlich und die Technologie ist nicht zuletzt aufgrund der Erfahrungen der Radar-Technologie wohl etabliert. Darüber hinaus wird die Güte der Qubit-Manipulation nicht von spontaner Emission begrenzt. Somit ist es heute möglich, einzelne Qubits mit einer Fidelity besser als 0,9999 zu manipulieren [25; 26].

Als Qubitzustände dienen bei den durchgeführten Experimenten die Hyperfeinzustände  $|^2S_{1/2}, F = 0\rangle$  und  $|^2S_{1/2}, F = 1\rangle$  von gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen. Ein Auslesen des Quantenzustandes geschieht durch das Einstrahlen von Laserlicht, das nur einen der Zustände resonant an einen Hilfszustand koppelt. Die Beobachtung von Resonanzfluoreszenz erlaubt dann eine Bestimmung, in welchem Zustand sich das Qubit befindet. Die verwendeten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen können jedoch aufgrund nicht-resonanter Anregungen während dem Auslesen ihren Zustand wechseln und das Ergebnis somit verfälschen. Experimentell wurde in dieser Arbeit eine neuartige zeitaufgelöste Methode des Zustandsnachweises untersucht, welche mehrere unbeabsichtigte Zustandswechsel des Ions berücksichtigt. Der Vergleich mit der herkömmlichen Schwellwert-Methode zeigt hierbei eine Verringerung des Auslesefehlers von 2,67% auf 2,24%.

Ein stationärer Magnetfeldgradient führt zu einer ortsabhängigen Zeeman-Aufspaltung entlang einer Kette gespeicherter Ionen. Für die Verwendung der magnetfeldabhängigen Qubitzustände  $|^2S_{1/2}, F = 1, m_F = \pm 1\rangle$  kann somit jedes einzelne Qubit durch resonante elektromagnetische Strahlung manipuliert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde untersucht, wie gut die Manipulation ausgewählter Qubits erfolgen kann und wie gering die Zustandsänderung nicht-adressierter Qubits ist. Experimentell wurden hierzu die Mechanismen, die zu einem Übersprechen führen, untersucht und die Stärke der hervorgerufenen Effekte gemessen. Der dominierende Effekt ist die nicht-resonante Anregung. Es wurde dabei untersucht, wie ein resonanter  $\pi$ -Puls, der an ein ausgewähltes Qubit adressiert wird, die Zustände anderer Qubits ändert. Dies geschah mittels Anwendung eines Benchmarking-Protokolls mit bis zu 1250 Mikrowellenpulsen. Für ein Quantenbyte konnte ein resultierendes Nächst-Nachbar-Übersprechen von der Größenordnung  $10^{-5}$  nachgewiesen werden, wobei die Messung alle auftretenden Fehlerquellen berücksichtigte. Für ein Drei-Qubit-Quantenregister wurde demonstriert, wie das Übersprechen durch die Wahl der experimentellen Parametern unterdrückt werden kann. Somit konnte gezeigt werden, wie unbeabsichtigte Zustandsänderungen während der Manipulation eines ausgewählten Qubits auf ein Maß reduziert werden können, das

die effiziente Anwendung von Methoden zur Quantenfehlerkorrektur erlaubt [22; 23].

Die Verwendung von magnetfeldabhängigen Qubitzuständen erlaubt die Adressierung einzelner Qubits, jedoch geht sie mit dem Nachteil einher, dass Magnetfeldrauschen zu einer schnellen Dekohärenz der Qubits führen kann. Eine Möglichkeit dieser entgegenzuwirken sind Methoden der dynamischen Entkopplung. Es wurde im Rahmen dieser Arbeit untersucht, wie mittels dynamischer Entkopplungspulse der Quantenzustand eines einzelnen Qubits vor einer Dephasierung geschützt werden kann. Von besonderem Interesse war dabei die Frage, wie unvermeidliche Pulsfehler den Qubitzustand unkontrolliert beeinflussen. Bei einem Vergleich von unterschiedlichen Pulssequenzen wurde eine neuartige Sequenz entwickelt, welche eine überlegene Fehlertoleranz aufwies, die auf einem Kompensieren der einzelnen Fehler beruht. Außerdem wurde untersucht, wie mittels dynamischer Entkopplungspulse die Quantendynamik eines Zwei-Qubit-Systems stabilisiert werden kann. Hierbei wurde ein CNOT-Gatter realisiert und für die Verschränkung von Qubits verwendet. Die nötige Gatterzeit war hierbei mehr als eine Größenordnung länger als die Kohärenzzeit des Systems. Auch hier wurden unterschiedliche Pulssequenzen hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit und Fehlertoleranz untersucht. Für robuste Pulssequenzen können mehr Pulse verwendet und somit die Kohärenzzeit verlängert bzw. die Fidelity verbessert werden. Die Methode ist allgemeingültig und somit auch auf andere physikalische Systeme anwendbar.

Die Kontrolle über einzelne Ionen und die Stabilisierung ihrer bedingten Quantendynamik, wie sie in dieser Arbeit demonstriert wurden, ermöglicht die Realisierung von Quantensystemen mit maßgeschneiderten Spin-Spin-Kopplungen. Je nachdem, welche Hyperfeinzustände als Spinzustände genutzt und mittels Mikrowellenpulsen manipuliert werden, koppeln in einem Mehr-Spin-System einzelne Spins unterschiedlich aneinander. Experimentell wurden in dieser Arbeit Drei-Spin-Systeme mit unterschiedlichen Kopplungstopologien realisiert und die Spin-Spin-Kopplungen gemessen. Solche Systeme Spin-gekoppelter Ionen können verwendet werden, um unterschiedliche andere Quantensysteme zu simulieren [54]. Ebenfalls wurde demonstriert, wie mittels eines Basiswechsels, hervorgerufen durch Mikrowellenpulse, die Kopplungstopologien während der Laufzeit einer Quantensimulation geändert werden können. Von besonderer Bedeutung ist dabei ein System, in dem zwei Spins bzw. Qubits miteinander gekoppelt sind, während der Dritte isoliert ist. Im Kontext der Quanteninformationsverarbeitung entspricht ein solches System einem Quantenspeicher, während zwischen den anderen beiden Qubits ein bedingtes Zwei-Qubit-Gatter ausgeführt werden kann. Die Möglichkeit, dass ein Qubit seine Rolle von einem Speicherqubit in ein Gatterqubit wechseln kann, vermeidet die Notwendigkeit einer physische Umordnung der Qubits - sogenanntes Shuttling - oder die Verwendung unterschiedlicher Ionen. Dies verleiht dem physikalischen System eine große Flexibilität und ist für laserbasierte Systeme [167] erheblich

---

aufwendiger und wurde bisher noch nicht experimentell demonstriert.

Die Methoden zur Kontrolle eines Quantensystems aus drei Qubits wurden dazu verwendet, um einen exemplarischen Quantenalgorithmus auszuführen. Wegen seiner Bedeutung als Unterprozedur für viele komplexere Algorithmen wurde dafür die Quanten-Fouriertransformation gewählt. Die Konstruktion des Algorithmus folgte dabei einem neuartigen Ansatz, der auf die vorhandene Kopplungstopologie angepasst ist und möglichst effektiv alle vorhandenen Spin-Spin-Kopplungen nutzt. Im Vergleich zu herkömmlichen Konstruktionen, die auf Ein- und Zwei-Qubit-Gattern basieren, konnte die Laufzeit um etwa den Faktor drei reduziert werden. Stabilisiert wurde die Dynamik mittels dynamischer Entkopplungspulse. Der Algorithmus konnte mit einer mittleren Fidelity von 0,58(5) durchgeführt werden, wobei die Güte von technischen Fehlerquellen begrenzt wird. Die Fehlerquellen wurden alle identifiziert und können mit geeigneten Verbesserungen am experimentellen Aufbau ausgeräumt werden.

In dieser Arbeit wurden unterschiedliche Probleme der Quanteninformationsverarbeitung mittels Spin-gekoppelter  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen in einem Magnetfeldgradienten untersucht. Dabei wurden teils neuartige Methoden entwickelt und erprobt. Es scheint realistisch, dass in der Zukunft die Beschränkungen der durchgeführten Experimente durch technische Verbesserungen aufgehoben werden können und somit die Realisierung eines skalierbaren Quantencomputers weiter fortschreiten kann.

So ist es möglich, durch die Verwendung eines Abbildungssystems mit höherer numerischen Apertur, den Detektionsfehler während einer Messdauer von weniger als  $100\ \mu\text{s}$  auf  $0,085(7)\%$  zu verringern [101]. Eine aktive oder passive Stabilisierung des Magnetfeldes am Ort des Ions würde die Kohärenzzeit des Systems verlängern und die Güte der Verschränkungsgatter und der bedingten Dynamik verbessern, ohne dass dynamische Entkopplungspulse notwendig wären. Ebenfalls können andere Methoden der dynamischen Entkopplung, wie beispielsweise dressed states, verwendet werden, um Qubit Zustände vor Magnetfeldrauschen zu isolieren [31]. Durch einen stärkeren Magnetfeldgradienten kann die Kopplungsstärke erhöht und somit notwendige Gatterzeiten reduziert werden. Es ist davon auszugehen, dass dieses ebenfalls die Güte der Quantenoperationen verbessert. Für einen Magnetfeldgradienten von  $150\ \text{T/m}$  [33] scheint somit eine Fidelity von 0,99 für eine Quanten-Fouriertransformation als realistisch. Notwendig sind dazu Einzelqubitrotationen von hoher Güte, wie sie für die Verwendung von Mikrowellenpulsen berichtet wurden [25; 26].



## Publikationsliste

Im Rahmen dieser Arbeit sind folgende Publikationen entstanden:

1. Versatile microwave-driven trapped ion spin system for quantum information processing, C. Piltz, T. Sriarunothai, S. S. Ivanov, S. Wölk und C. Wunderlich in *Science Advances* 2, S. e1600093 (2016).
2. State selective detection of hyperfine qubits, S. Wölk, C. Piltz, T. Sriarunothai und C. Wunderlich in *Journal of Physics B* 48, S. 075101 (2015).
3. A trapped-ion-based quantum byte with  $10^{-5}$  next-neighbour cross-talk, C. Piltz, T. Sriarunothai, A. F. Varón und C. Wunderlich in *Nature Communications* 5, S. 4679 (2014).
4. Protecting Conditional Quantum Gates by Robust Dynamical Decoupling, C. Piltz, B. Scharfenberger, A. Khromova, A. F. Varón und C. Wunderlich in *Physical Review Letters* 110, S. 200501 (2013).
5. Designer Spin Pseudomolecule Implemented with Trapped Ions in a Magnetic Gradient, A. Khromova, C. Piltz, B. Scharfenberger, T. F. Gloger, M. Johanning, A. F. Varón und C. Wunderlich in *Physical Review Letters* 108, S. 220502 (2012).

# B

## Geräteliste

### Fallenantrieb

Funktionsgenerator	Stanford Research	DS345
Verstärker	Kalmus	Model 714FC-CE
RF-Resonator	Universität Prag	Design von Ivo Polak

### Vakuumsystem

Vakuumrezipient	Hositrad	
Ionen-Getter-Pumpe	Varian	Model 919-0110
SMA Feed-through	Allectra	242SMADF50-C40-2
SMA Koaxialkabel	Allectra	380-SMA-MM-1000

### 369 nm Lasersystem

Laserdiode	Nichia	NDU1113E
Peltierelemente	Telemeter Electronics	PE-127-10-08
Tyvek-Kissen	TMB	Porenweite 4 Å
Feuchtesensor	LinPicco	A05 Basic
NTC-Temperatursensor	EPCOS	B57863-S103-F40
Piezomotor	Newport	AG-M050N
Motorsteuerung	Newport	AG-UC2

## B. Geräteliste

---

### Microwellenkette

PLL-Oszillator	MITEQ	DLCRO-010-12568-3-15P
Mischerer	MACOM	M79
Vorverstärker +10 dB	Minicircuits	ZX60-14012L
Endstufe +35 dB	Globes	10 W PA Elsira
Abschwächer -10 dB	Minicircuits	VAT-10+
Abschwächer -20 dB	Minicircuits	VAT-20+
Richtkoppler	UMCC	DC-S000-16S
Isolatoren	TKI	Ferrit IC 12.5-10W
Netzteil ( $\pm 48$ V)	Mean Well	SP-200-48
Netzteil ( $\pm 15$ V)	Traco Power	ESP 36-15SN
Rubidium-Atomuhr	Stanford Research	FS725
SMA-Stecker	Allectra	245-CON-SMA-F, 50 $\Omega$
SMA-Kabel	Allectra	311-KAP50

### AOM-Steuerung

AOM bei 65 MHz	IntraAction	ASM-702B8M
regelbarer Oszillator	Minicircuits	ZX95-100+
regelbarer Abschwächer	Minicircuits	ZX73-2500+
Digitalschalter	Minicircuits	ZASW-2-50DR+
Verstärker	Minicircuits	ZHL-1-2W
AOM bei 985 MHz	Brimrose	TEF-1050-50-369
AOM-Antrieb	Brimrose	VFF-1050- 50SPS-B1/B2-C1
AOM bei 115 MHz	Crystal Technology	31110-125
regelbarer Oszillator	Minicircuits	ZX95-200+
regelbarer Abschwächer	Minicircuits	ZX73-2500+
Digitalschalter	Minicircuits	ZASW-2-50DR+
Verstärker	Minicircuits	ZHL-1-2W

### Abbildungssystem

EMCCD-Kamera	Andor Technology	iXon Ultra DU-897U-CS0-EXF
Photomultiplier	Hamamatsu	R7518P

### Lambdameter

Lock-in-Verstärker	Stanford Research	SR850 DSP
Photodioden	Hamamatsu	S4707-01
Digitalzähler	Hewlett Packard	HP5334B

---

**Experimentsteuerung**

DSP  
VFG150 (USB)  
DAC  
LabVIEW

Jäger GmbH  
Toptica Photonics AG  
PLUG-IN Electronics  
National Instruments

ADwin-Pro (USB)  
USB-3112  
Version 9.0



## Physikalische Größen

Die aufgeführten Naturkonstanten entsprechen der internationalen CODATA-Empfehlung für Naturkonstanten 2014:

Konstante	Symbol	Wert	Einheit
Bohrsches Magneton	$\mu_B$	$927,4009994 \cdot 10^{-26}$	$\text{J T}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum	$h$	$6,626070040 \cdot 10^{-34}$	$\text{J s}$
Elementarladung	$e$	$1,6021766208 \cdot 10^{-19}$	$\text{C}$
Einheit der Atommasse	$u$	$1,660539040 \cdot 10^{-27}$	$\text{kg}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} = 12,566370614 \cdot 10^{-7}$	$\text{N A}^{-2}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0$	$8,854187817 \cdot 10^{-12}$	$\text{F m}^{-1}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c$	$2,99792458 \cdot 10^8$	$\text{m s}^{-1}$

# D

## Laserspektren

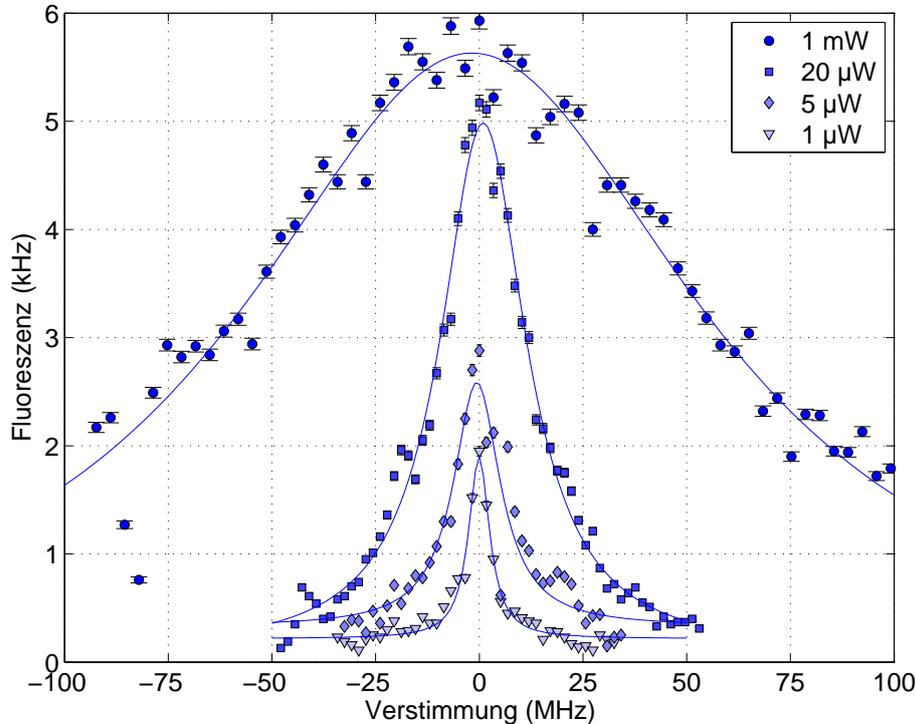
Im experimentellen Betrieb ist es hinsichtlich der Reproduzierbarkeit und der Qualität von Ergebnissen notwendig, die verwendeten Laser bei der korrekten Frequenz mit hoher Stabilität zu betreiben. Diese Frequenz hängt von den atomaren Übergängen der gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ionen ab. Der Kühl- und Detektionslaser mit seiner Emissionswellenlänge nahe 369 nm muss beispielsweise die halbe Linienbreite des Übergangs  $^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow ^2P_{1/2}, F = 0$  (vgl. Abschnitt 2.2 und die Abbildung D.1) zu diesem rot-verstimmt sein, um eine optimale Doppler-Kühlung zu erzielen. Der Rückpumpulaser nahe 935 nm hingegen muss im optimalen Betrieb den Übergang  $^2D_{3/2} \rightarrow ^3D[3/2]_{1/2}$  resonant treiben. Der Abgleich der Laserfrequenzen geschieht anhand von Laserspektren wie sie in diesem Kapitel präsentiert werden.

Hierbei wird die Frequenz des jeweiligen Laserlichts variiert und gleichzeitig die Resonanzfluoreszenz nahe 369 nm mittels des Photomultipliers (siehe den Abschnitt 3.5) aufgezeichnet. Die Änderung der Laserfrequenz kann mit akustooptischen Modulatoren (AOMs) geschehen. Diese haben jedoch eine Modulationsbandbreite von lediglich etwa 35(1) MHz für den Kühl- und Detektionslaser bzw. 24(1) MHz für den Rückpumpulaser [76]. Der mögliche Frequenzgang ist somit auf einen Bereich eingeschränkt, der in etwa den Linienbreiten der Übergänge entspricht oder gar kleiner ist. Aus diesem Grund wird eine andere Methode zum Ändern der Emissionsfrequenz der Lasersysteme verwendet. Diese beruht darauf, dass die Referenz, auf welche der jeweilige Laser stabilisiert ist, geändert wird.

Mittels einer Flankenstabilisierung [73] sind die Diodenlasersysteme auf die Flanke eines sogenannten Airy-Peaks der Transmission eines optischen Resonators stabilisiert



## D.1. Laserspektrum des Rückpumpübergangs



**Abbildung D.2.:** Beobachtete Fluoreszenz eines einzelnen gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ions in Abhängigkeit von der Frequenz und der optischen Leistung des Rückpumpasers. Für die unterschiedlichen Leistungen wird jeweils die Frequenz des Rückpumpasers bei 935 nm variiert und die Resonanzfluoreszenz nahe 369 nm mit dem Photomultiplier detektiert. Durchgezogene Linien entsprechen einer Anpassung an die Daten in Form eines Lorentz-Profiles. Für jeden Datenpunkt wird die Fluoreszenz 100 ms beobachtet und die Zählereignisse aufsummiert. Fehlerbalken repräsentieren den statistischen Fehler.

Der Kühlübergang  $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$  nahe 369 nm ist aufgrund des möglichen Zerfalls in einen metastabilen Zustand  $^2D_{3/2}$  unterbrochen (vgl. den Abschnitt 2.2 und die Abbildung D.1). Die Aufgabe des Rückpumpasers ist es, diesen Zustand mit dem kurzlebigen Zustand  $^3D[3/2]_{1/2}$ , der schnell zurück in den Kühlübergang zerfällt, zu koppeln. Die Untersuchung der Resonanzfluoreszenz nahe 369 nm in Abhängigkeit der Wellenlänge des Rückpumpasers erlaubt somit die Untersuchung des Übergangs  $^2D_{3/2} \rightarrow ^3D[3/2]_{1/2}$ .

In der Abbildung D.2 sind resultierende Spektren dargestellt. Hierbei wird die Laserfrequenz des Rückpumpasers variiert und die Resonanzfluoreszenz auf dem Kühlübergang

mittels des Photomultipliers beobachtet<sup>1</sup>. Die Änderung der Laserfrequenz geschieht, wie oben beschrieben, über eine Längenänderung des Referenzresonators. Die Fehlerbalken der Datenpunkte entsprechen dem statistischen Fehler aus einer Poisson-Zählstatistik und die durchgezogene Linie beruht auf einer Anpassung an die Datenpunkte. Das verwendete Modell

$$I(\omega) = I_0 \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma_{\text{sat}}/2)^2} + I_{\text{bkg}} \quad (\text{D.1.1})$$

basiert auf einem Lorentz-Profil [72], wobei  $\omega - \omega_0$  der Verstimmung der Laserfrequenz  $\omega$  von der Resonanz  $\omega_0$  entspricht. Der Parameter  $I_0$  entspricht der beobachteten Fluoreszenz für den Resonanzfall und  $I_{\text{bkg}}$  bezeichnet den Untergrund des Fluoreszenzsignals, der von einer Dunkelzählrate des Detektors und Streulicht hervorgerufen wird. Die beobachtete volle Halbwertsbreite (FWHM) entspricht  $\gamma_{\text{sat}}$ , welche aufgrund von Leistungsverbreiterung größer als die natürliche Breite des Übergangs sein kann. Die optische Leistung des Kühllasers, der kontinuierlich eingestrahlt wird, beträgt bei den obigen Messungen 47  $\mu\text{W}$ .

Für eine optische Leistung des Rückpumpasers von 1 mW beträgt die beobachtete volle Halbwertsbreite 140(20) MHz und ist somit deutlich breiter als die natürliche Linienbreite des Übergangs von etwa 4 MHz. Der Grund hierfür ist eine Sättigung des Übergangs. Um die Sättigungsverbreiterung genauer zu untersuchen, werden ähnliche Spektren für unterschiedliche Laserleistungen des Rückpumpasers aufgenommen. Die Ergebnisse sind in der gleichen Abbildung D.2 zu finden. Man erkennt deutlich, wie die Absorptionslinie mit einer geringeren Laserleistung schmaler wird<sup>2</sup>.

Zur näheren Untersuchung der Sättigungsverbreiterung wird die beobachtete Breite der Absorptionslinie in Abhängigkeit der Laserleistung in der Abbildung D.3 dargestellt. Die Verbreiterung des Übergangs wird dort durch einen Sättigungsparameter  $S_0$  beschrieben [72]

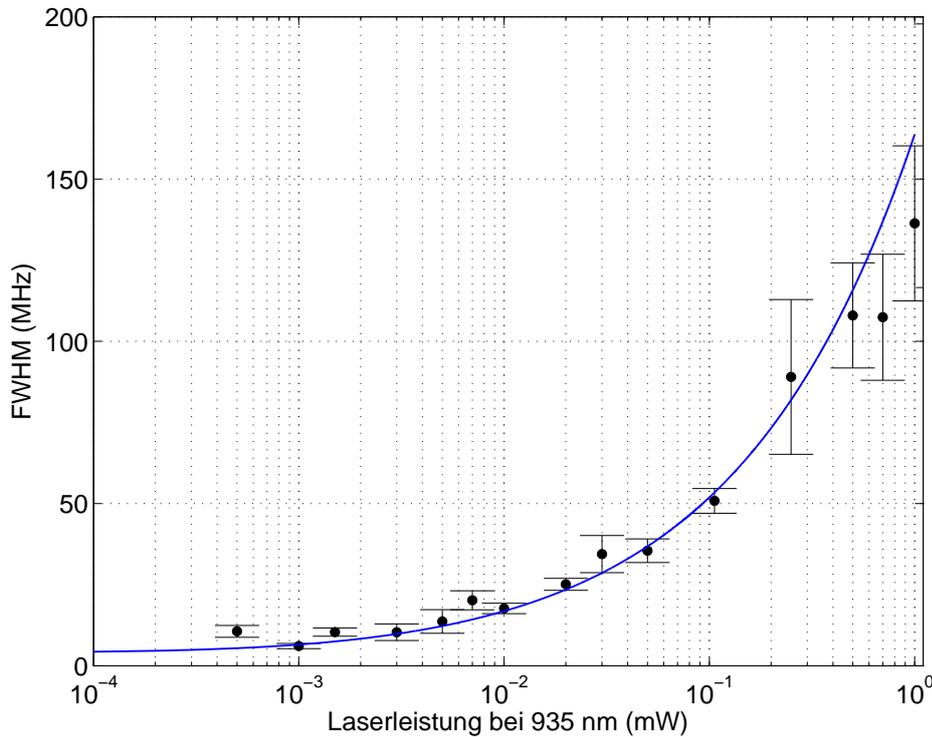
$$\gamma_{\text{sat}} = \gamma \sqrt{1 + S_0}, \quad (\text{D.1.2})$$

der die natürliche Linienbreite  $\gamma$  des Übergangs vergrößert. Die durchgezogene Linie ist eine Anpassung an die Datenpunkte, aus der sich der Zusammenhang  $S_0 = P/P_0$  des Sättigungsparameter mit der optischen Leistung des Lasers  $P$  und der Sättigungsleis-

---

<sup>1</sup>Für die Messungen in diesem Abschnitt wurde der ältere Photomultiplier R5600P von Hamamatsu verwendet.

<sup>2</sup>Die Höhe der Resonanz ist neben der optischen Leistung des Rückpumpasers ebenfalls durch die Frequenz und die Leistung des Kühl-Lasers bei 369 nm bestimmt. Diese beiden Parameter können sich jedoch zwischen der Aufnahme der Spektren leicht ändern und somit die Fluoreszenz systematisch beeinflussen.



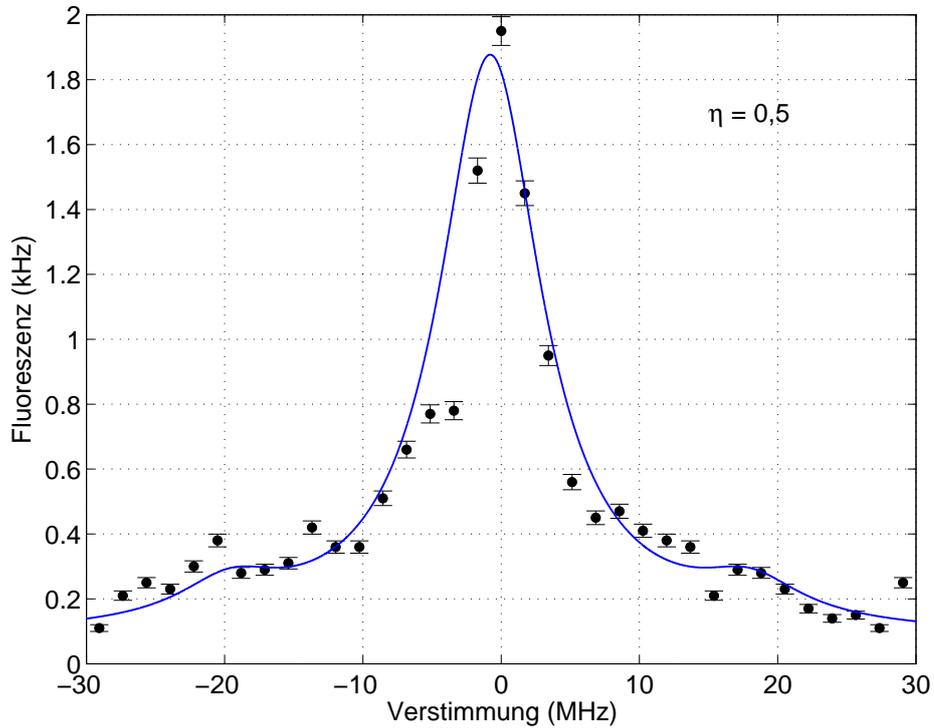
**Abbildung D.3.:** Die beobachtete volle Halbwertsbreite des Rückpumpübergangs für unterschiedliche optische Leistungen des Rückpumpasers, wie sie an dem experiment beobachtet wurden. Die durchgezogene Linie ist eine Anpassung basierend auf einer Sättigungsverbreiterung des Übergangs.

tion  $P_0$  ergibt [72]. Aus den obigen Daten ergibt sich somit eine Sättigungsleistung<sup>3</sup> von  $P_0 = 140(10)$  nW. Für die Leistung von 1 mW beträgt der Sättigungsparameter etwa 7000 und die erwartete Linienbreite 170 MHz. Für die deutlich verringerte Leistung von 1  $\mu$ W folgt ein Sättigungsparameter von etwa 7. Mit etwa 6 MHz liegt die resultierende Linienbreite in der gleichen Größenordnung wie die natürliche Linienbreite<sup>4</sup> von 4 MHz.

Eine Linienbreite von weniger als 20 MHz erlaubt des Weiteren die Untersuchung von Mikrobewegung des Ions (vgl. den Abschnitt 2.3). Wird ein gespeichertes Ion von dem RF-Antrieb der Falle bei etwa 18,8 MHz angetrieben, so führt dies zu einer Änderung seines Absorptionsspektrums. Der Grund hierfür ist, dass wegen des Doppler-Effekts das Laserlicht im Ruhesystem des Ions mit dem Fallenantrieb frequenzmoduliert er-

<sup>3</sup>Diese hängt von dem Strahlprofil des Lasers am Ort des Ions ab. Der Durchmesser im Fokus beträgt 160(2)  $\mu$ m (vgl. Abschnitt 3.3 und [30])

<sup>4</sup>Experimentell war es nicht möglich, die Leistung weiter zu verringern, da dann eine effektive Kühlung des Ions nicht länger gewährleistet war.



**Abbildung D.4.:** Spektrum des Rückpumpübergangs für eine optische Leistung von  $1 \mu\text{W}$ . Die volle Halbwertsbreite der Spektrallinie ist geringer als der Fallenantrieb bei  $18,8 \text{ MHz}$ , was die Beobachtung von Mikrobewegungsseitenbändern erlaubt. Die durchgezogene Linie ist eine Vorhersage für einen Modulationsindex von  $\eta = 0,5$ . Für jeden Datenpunkt wird die Fluoreszenz  $100 \text{ ms}$  beobachtet und die Zählereignisse aufsummiert. Fehlerbalken repräsentieren den statistischen Fehler.

scheint. Dieses führt zur Beobachtung von Seitenbändern, deren Stärke jeweils von der Amplitude der Mikrobewegung um die Ruhelage bestimmt wird. Anstatt einer einzigen Spektrallinie ist somit eine Überlagerung von mehreren Absorptionslinien zu beobachten (siehe zum Beispiel [59])

$$I(\delta_L) = \sum_{n=-N}^N |J_n(\eta)|^2 \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{\text{sat}}/2}{(\delta_L - n\omega_z)^2 + (\gamma_{\text{sat}}/2)^2}. \quad (\text{D.1.3})$$

Hierbei entspricht  $I$  der normierten absorbierten Intensität,  $\delta_L$  der Verstimmung des Lasers von dem Übergang,  $J_n$  der  $n$ -ten Besselfunktion,  $\eta$  dem Modulationsindex, der die Stärke der Mikrobewegung beschreibt, und  $\gamma_{\text{sat}}$  der sättigungsverbreiterten Linienbreite des Übergangs.

Für einen kleinen Modulationsindex  $\eta < 1$  ist es in der Praxis ausreichend, nur zwei

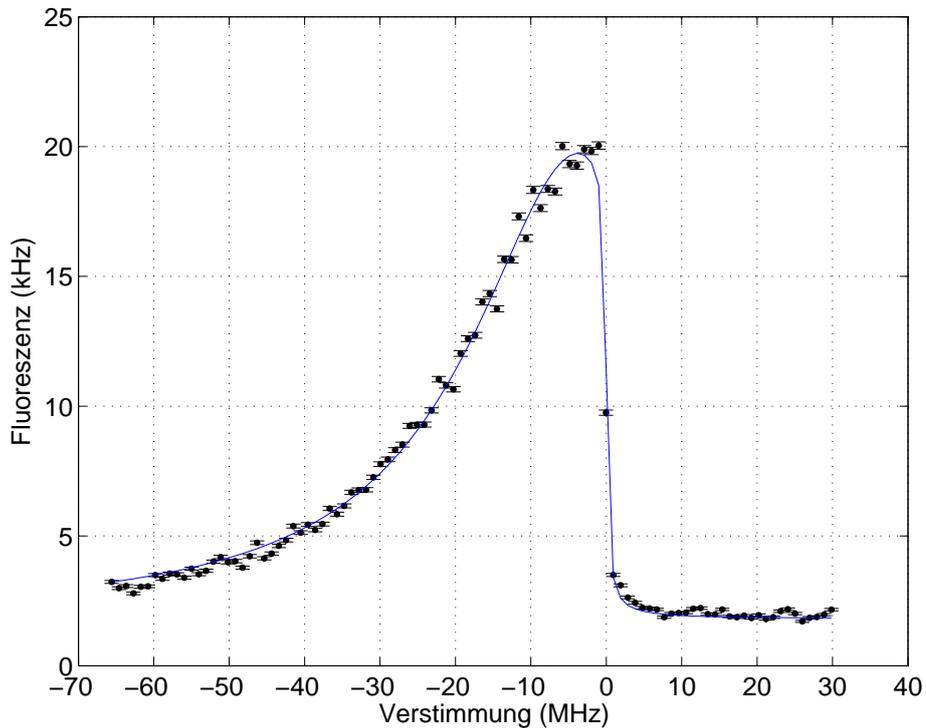
Seitenbänder zu berücksichtigen. In der Abbildung D.4 ist das Absorptionsspektrum für eine optische Leistung des Rückpumpasers von  $1 \mu\text{W}$  dargestellt. Der Übergang ist mit einer Breite von 12 MHz gesättigt, jedoch ist die Breite geringer als die Frequenz des Fallenantriebs von etwa 18,8 MHz, wo die Seitenbänder erster Ordnung zu erwarten sind. Somit lassen sich diese prinzipiell auflösen. Wie man jedoch erkennen kann, sind keine deutlich ausgeprägten Seitenbänder zu beobachten. Die durchgezogene Linie entspricht der Vorhersage aus der Gleichung (D.1.3) für einen Modulationsindex von  $\eta = 0,5$ . Hieraus lässt sich schlussfolgern, dass die Mikrobewegung gut abgeglichen ist<sup>5</sup>.

## D.2. Laserspektrum des Kühlübergangs

In der Abbildung D.5 ist ein exemplarisches Laserspektrum des Kühlübergangs, der den Übergang  ${}^2S_{1/2}, F = 1 \leftrightarrow {}^2P_{1/2}, F = 0$  nahe 369 nm treibt, dargestellt (siehe die Abbildung D.1). Die Fehlerbalken der Datenpunkte entsprechen dem statistischen Fehler aus einer Poisson-Zählstatistik. Bei dem gespeicherten Ion handelt es sich um ein einzelnes  ${}^{171}\text{Yb}^+$ -Ion in einem Magnetfeld von etwa 3,4 G. Die resultierende Zeeman-Aufspaltung zwischen den Hyperfeinniveaus  ${}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  und  ${}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = \pm 1$  beträgt 4,8 MHz und ist kleiner als die natürliche Linienbreite des Übergangs von etwa 19,6 MHz. Somit können die einzelnen Zeeman-Übergänge nicht aufgelöst werden und die drei möglichen Übergänge erscheinen wie eine einzelne Spektrallinie. Die Frequenzänderung des Lasers geschieht, wie zuvor beschrieben, durch eine Änderung der Länge des Referenzresonator. Die Resonanzfluoreszenz des Kühlübergangs bei 369 nm wird mit dem Photomultiplier beobachtet. Die optische Leistung des Kühllasers beträgt dabei  $36 \mu\text{W}$  und der Rückpumpübergang wird resonant mit einer optischen Leistung von 2,2 mW übersättigt.

Die Frequenz des Kühllasers bestimmt die Temperatur des gespeicherten Ions und aus diesem Grund ist es wichtig, die Frequenzänderung von einer Rotverstimmung ( $\omega - \omega_0 < 0$ ) zu einer Blauverstimmung ( $\omega - \omega_0 > 0$ ) hin auszuführen. Das Ion wird für eine Rotverstimmung, die größer als die Linienbreite des Kühlübergangs ist, Doppler-gekühlt (vgl. den Abschnitt 4.1.3) und eine Resonanzfluoreszenz des lokalisierten Ions ist zu beobachten. Für eine Rotverstimmung, die gerade der Linienbreite des Übergangs entspricht, streut das Ion viel Licht und wird effizient auf die Doppler-Temperatur gekühlt. Für den Resonanzfall fluoresziert das Ion maximal, jedoch findet eine Doppler-Kühlung nicht länger statt. Ab einer Blauverstimmung heizt der Laser das Ion auf, weshalb es nicht länger gut lokalisiert ist und die beobachtete Resonanzfluoreszenz

<sup>5</sup>Ein Abgleich der Mikrobewegung erfolgte durch die Beobachtung von zeitlich korrelierter Fluoreszenz. Siehe [56] für weitere Informationen dazu.



**Abbildung D.5.:** Laserspektrum des Kühlübergangs eines einzelnen gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ions. Die Laserfrequenz des Kühllasers wird kontinuierlich von einer Rotverstimmung ( $\delta < 0$ ) zur Resonanz ( $\delta = 0$ ) und zu einer Blauverstimmung ( $\delta > 0$ ) hin variiert. Die durchgezogene Linie entspricht einer phänomenologischen Anpassung an die Datenpunkte. Für jeden Datenpunkt wird die Fluoreszenz 100 ms beobachtet und die Zählereignisse aufsummiert. Fehlerbalken repräsentieren den statistischen Fehler.

verschwindet. Das Modell, welches diesen Prozess effektiv beschreibt lautet

$$I(\omega) = I_0 \frac{\gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \times \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \frac{\arctan((\omega - \omega_0) \alpha)}{\pi} \right) + I_{bkg}. \quad (\text{D.2.1})$$

Der erste Faktor ist ein Lorentz-Profil, welches die Resonanzfluoreszenz des Ions beschreibt. Der zweite Faktor ist eine Stufenfunktion, die phänomenologisch das Verschwinden der beobachteten Resonanzfluoreszenz bei einer Blauverstimmung modelliert<sup>6</sup>.  $\alpha$  ist dabei ein Parameter, der beschreibt, wie abrupt der Heizprozess das Ion delokalisieren lässt und die detektierte Fluoreszenz verschwindet. Der letzte Summand

<sup>6</sup>Alternativ zu der hier verwendeten Stufenfunktion, die auf einem Arkustangens basiert, gibt es andere mögliche Modelle, wie zum Beispiel eine exponentielle Unterdrückung für eine Blauverstimmung [74].

$I_{\text{bkg}}$  beschreibt den Untergrund des Signals, der hauptsächlich durch Streulicht vorgerufen wird.

Aus der Anpassung an die Datenpunkte in der Abbildung D.5 folgt eine volle Halbwertsbreite von 36(2) MHz. Diese ist größer als die natürliche Linienbreite von 19,6 MHz, was auf die Zeeman-Aufspaltung infolge des vorhandenen Magnetfelds zurückzuführen ist. Darüber hinaus ergibt sich für den Resonanzfall eine Zählrate von 18,4(6) kHz. Mit dem Untergrund von 1,8(2) kHz folgt somit ein Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) von etwa 9. Nach einer effizienteren Streulichtunterdrückung [80; 56] konnte der Untergrund drastisch reduziert werden und für ein einzelnes  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ion kann ein SNR von 350 erreicht werden.



# Optimierung der Resonanzfluoreszenz

In diesem Kapitel wird erläutert, wie die Kühlfluoreszenz eines einzelnen gespeicherten  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ion durch die Wahl der Laserpolarisationen und eines statischen Magnetfeldes optimiert wurde. Eine solche Optimierung diente auch der Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnis bei der Detektion. Die Überlegung hierbei ist, dass die Resonanzfluoreszenz eines hellen Ions durch eine nicht optimale Wahl der Laserpolarisationen oder des Magnetfeldes reduziert wird. Der Untergrund, der von Streulicht hervorgerufen wird, ist jedoch unabhängig von diesen Parametern. Somit können Polarisationen und das Magnetfeld das Signal-Rausch-Verhältnis beeinflussen.

## E.1. Fluoreszenzmodell

Das Modell, welches die Resonanzfluoreszenz in Abhängigkeit der Laserpolarisation und der Magnetfeldstärke beschreibt, ist das in dem Abschnitt 5.1 beschriebene [96]. An dieser Stelle werden zur Übersichtlichkeit lediglich die wesentlichen Zusammenhänge wiederholt.

Die Fluoreszenzrate  $R_f$  ist proportional zur Wahrscheinlichkeit des angeregten Zustands  $^2P_{1/2}$  und es gilt

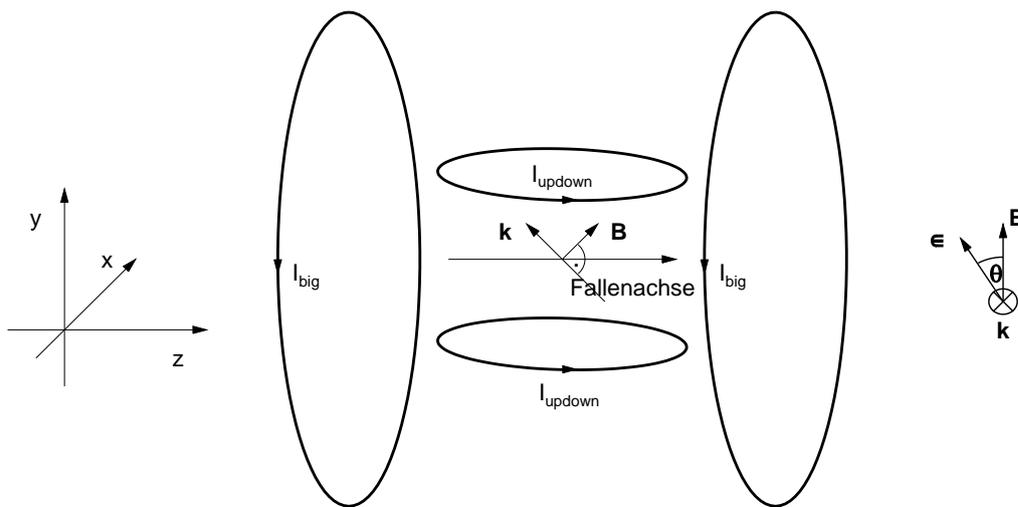
$$R_f \propto \frac{3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{4} \frac{\Omega^2/3}{1 + 3 \cos^2 \theta \Delta^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (\text{E.1.1})$$

wobei die Breite des Übergangs durch die Zeeman-Aufspaltung effektiv verbreitert wird

$$\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{3} \cos^2 \theta \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} \left( \frac{\Omega^4}{36\delta_B^2} + 4\delta_B^2 \right). \quad (\text{E.1.2})$$

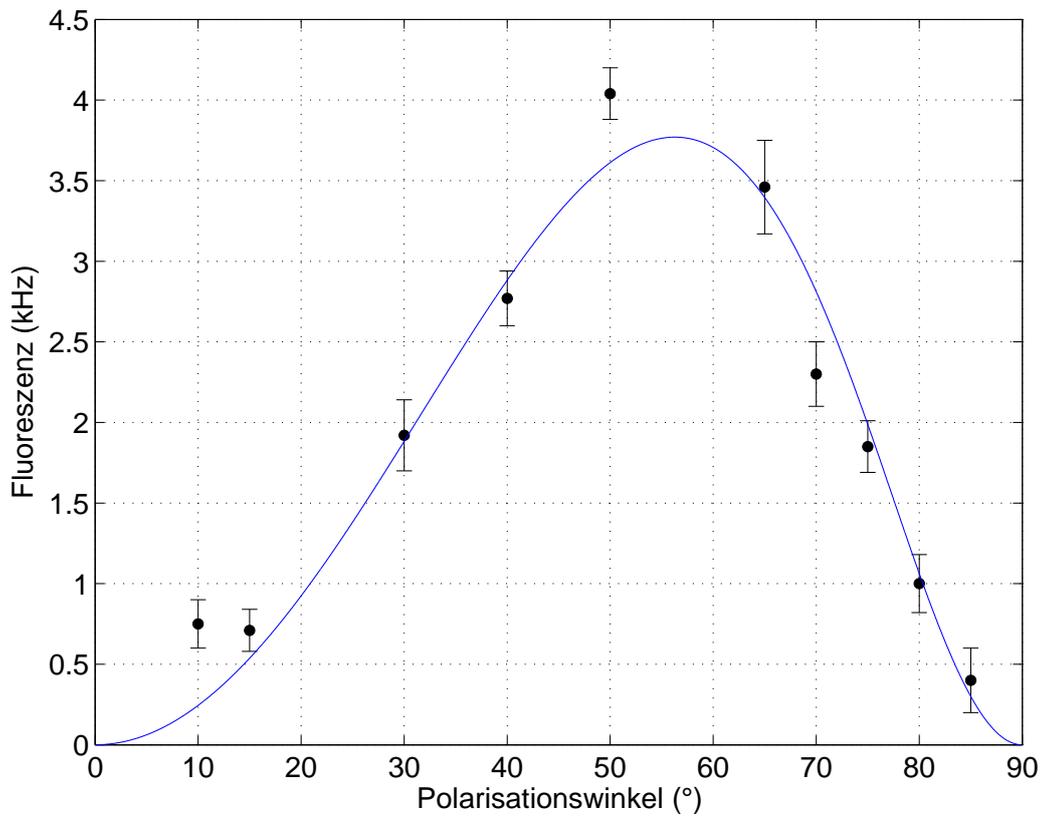
Die Größe  $\Omega$  entspricht der Rabi-Frequenz und  $\Delta$  der Verstimmung des Laserlichts, welches den Detektionsübergang  $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$  treibt. Der Winkel  $\theta$  bezeichnet den Winkel zwischen dem elektrischen Feld des Laserlichts und dem Magnetfeld, welches die Quantisierungsachse definiert.  $\delta_B$  entspricht der Zeeman-Aufspaltung der Hyperfeinzustände des Ions. Darüber hinaus wird davon ausgegangen, dass der Rückpumpübergang  $^2D_{3/2} \rightarrow ^3D[3/2]_{1/2}$  nahe 935 nm hinreichend getrieben wird und somit der Kühlübergang effektiv geschlossen ist.

## E.2. Einstellung der Laserpolarisationen



**Abbildung E.1.:** Relevante Koordinatensysteme. Siehe Text für Erläuterungen.

Zur Optimierung der Polarisation des Kühl- und Detektionslasers mit einer Emissionswellenlänge nahe 369 nm wurde zuerst ein einzelnes  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ion in die Falle geladen und lasergekühlt. Danach wurde das Magnetfeld der Quantisierungsachse  $\mathbf{B}$  so ausgerichtet, dass es senkrecht zum Ausbreitungsvektor des Laserlichts  $\mathbf{k}$  steht (siehe die Abbildung E.1). Hierfür wurde mit Hilfe eines elektrischen Stromes  $I_{\text{updown}}$  durch die Helmholtz-Spulen ein zusätzliches statisches Magnetfeld in  $y$ -Richtung erzeugt. Die



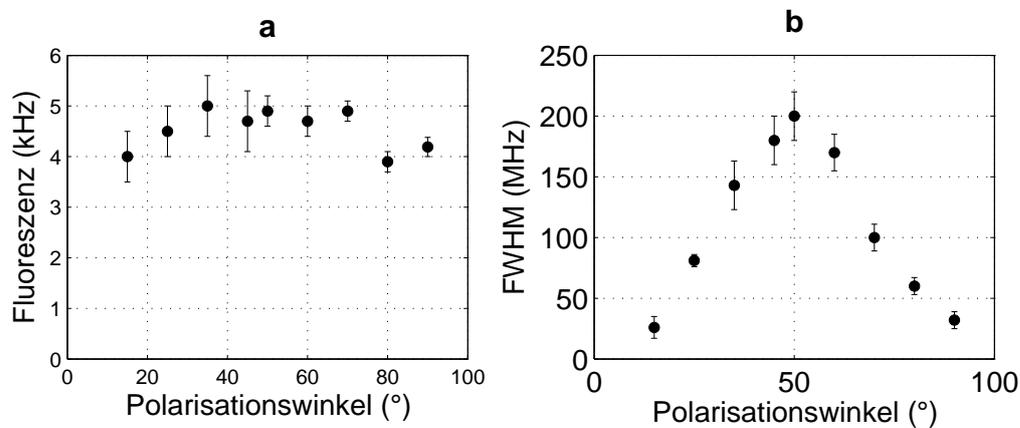
**Abbildung E.2.:** Beobachtete Resonanzfluoreszenz in Abhängigkeit von der Polarisationsrichtung des Kühllaserlichts.

Stärke dieses Feldes wurde dabei so gewählt, dass das resultierende Magnetfeld einen Winkel von  $45^\circ$  mit der z-Achse eingeschlossen hat. In dieser Konfiguration betrug das Magnetfeld entlang der z- bzw. y-Achse jeweils 2,9 G und das resultierende am Ort des Ions somit 4,1 G, was zu einer Zeeman-Aufspaltung von  $2\pi \times 5,7$  MHz führte. Die Laserleistung des Kühllasers betrug  $60 \mu\text{W}$  und die des Rückpumpasers 2 mW. Der Polarisationswinkel, also der Winkel zwischen dem elektrischen Feld des Laserlichts  $\mathbf{E}$  und dem Magnetfeld  $\mathbf{B}$  (siehe Abbildung E.1), des Rückpumpasers betrug  $50^\circ$ .

Nun wurde der Polarisationswinkel  $\theta$  des Kühllaserlichts durch Drehen des Polarisators variiert und die resultierende Fluoreszenz gemessen. Dafür wurde für jeden Winkel die Emissionswellenlänge des Kühllasers durchgestimmt und ein Spektrum wie in der Abbildung D.5 mit dem Photomultiplier aufgezeichnet<sup>1</sup>. In der Abbildung E.2 ist die beobachtete Resonanzfluoreszenz in Abhängigkeit des Polarisationswinkels  $\theta$  darge-

<sup>1</sup>Für die Messungen in diesem Abschnitt wurde der Photomultiplier R5600P von Hamamatsu verwendet.

stellt. Die Fehlerbalken der Datenpunkte ergeben sich dabei aus der Anpassung an das Spektrum. Die durchgezogene Linie entspricht einer Anpassung an die Daten mit dem obigen Fluoreszenzmodell aus den Gleichungen (E.1.1) und (E.1.2), wobei lediglich die Proportionalitätskonstante in (E.1.1) und die Rabi-Frequenz des optischen Übergangs die beiden freien Parameter waren. Wie man erkennen kann, beschreibt das Modell die Messdaten und das Maximum der Kühlfluoreszenz liegt wie erwartet bei einem Winkel von  $\theta_0 \approx 54,7^\circ$ , für den alle drei Übergänge  $P_{1/2}, F = 0$  nach  $S_{1/2}, F = 1$  gleich schnell getrieben werden.



**Abbildung E.3.:** Beobachtete Fluoreszenz in Abhängigkeit der Polarisationsrichtung des Rückpumpasers. (a) Die Resonanzfluoreszenz ist nur schwach von der Polarisation abhängig. (b) Die volle Halbwertsbreite des Rückpumpübergangs hingegen zeigt ein deutliches Maximum, für den der Rückpumpübergang am schnellsten getrieben wird.

Die Abhängigkeit der Fluoreszenzrate von der Polarisation des Rückpumpasers mit einer Emissionswellenlänge nahe 935 nm erfolgte analog. Für unterschiedliche Polarisationswinkel wurde die Wellenlänge des Kühllasers variiert und erneut Spektren wie in der Abbildung D.5 mit dem Photomultiplier aufgezeichnet. In der Abbildung E.3 (a) ist das jeweilige Maximum der Resonanzfluoreszenz in Abhängigkeit zur Polarisation aufgetragen. Wie man erkennen kann, ist die Abhängigkeit im Vergleich zu der von der Polarisation des Kühllasers nur sehr gering und die Fluoreszenz ändert sich nur um etwa 20%. Die Ursache ist die, dass für ein effektives Schließen des Kühlübergangs  $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{1/2}$  nur ein geringer Anteil des Rückpumpaserlichts ausreichend ist. Um die Abhängigkeit genauer untersuchen zu können, wurde die Messmethodik abgewandelt.

Statt die Resonanzfluoreszenz in Abhängigkeit der Polarisationsrichtung des Rückpumpasers zu messen, wurde die Breite des Rückpumpübergangs gemessen. Experimentell wurde nun für unterschiedliche Polarisationswinkel des Rückpumpasers seine Emissionswellenlänge variiert und Spektren wie in der Abbildung D.2 mit dem Photomultiplier aufgezeichnet. In der Abbildung E.3 (b) ist die ermittelte Halbwertsbreite in Abhängigkeit von der Polarisation aufgetragen. Man kann erkennen, dass die Abhängigkeit wesentlich stärker ist und sein Maximum ebenfalls nahe  $\theta_0 \approx 54,7^\circ$  hat. Für diesen Winkel wird der Übergang maximal gesättigt und am schnellsten getrieben.

Im experimentellen Betrieb ist das Magnetfeld im Gegensatz zu der obigen Konfiguration (vgl. die Abbildung E.1) parallel zur  $z$ - bzw. Fallachse orientiert. Die Polarisationen der beiden Laser werden nun so eingerichtet, dass sie einen Winkel von jeweils  $\theta_0$  mit dem statischen Magnetfeld entlang der  $z$ -Achse einschließen.

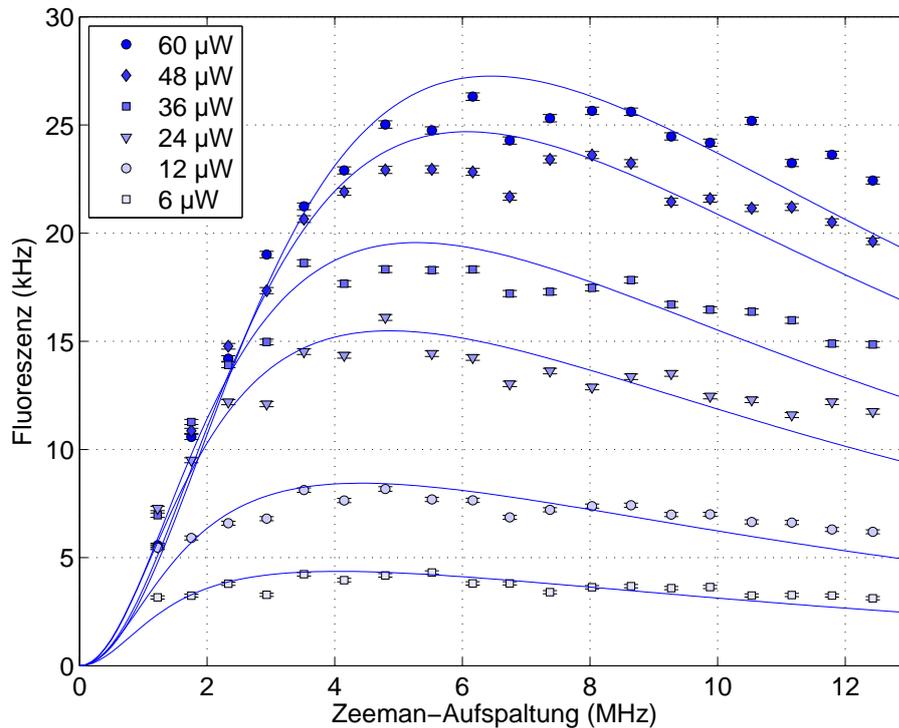
### E.3. Abhängigkeit von dem Magnetfeld

Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Kühlfluoreszenz von der Magnetfeldstärke wurde das Magnetfeld entlang der Fall- bzw.  $z$ -Achse ausgerichtet. Mittels der Helmholtz-Spulen und eines elektrischen Stroms  $I_{\text{big}}$  konnte nun die Stärke des Magnetfeldes variiert werden (vgl. die Abbildung E.1). Für unterschiedliche Ströme und somit Magnetfelder wurde zuerst die Zeeman-Aufspaltung mittels Resonanzspektroskopie (vgl. den Abschnitt 4.4) gemessen. Dann wurde jeweils ein Spektrum des Kühlübergangs mit dem Photomultiplier (wie in der Abbildung D.5) aufgenommen und dieses für unterschiedliche Laserleistungen wiederholt.

Man erkennt deutlich in der resultierenden Abbildung E.4, dass die Resonanzfluoreszenz jeweils ein Maximum aufweist<sup>2</sup>. Dieses ist darauf zurückzuführen, dass für ein zu geringes Magnetfeld Dunkelresonanzen erzeugt werden können und somit die Fluoreszenz unterdrückt wird [96]. Führt das Magnetfeld hingegen zu einer Zeeman-Aufspaltung, die größer als die Linienbreite des Übergangs ist, so werden die unterschiedlichen Hyperfeinübergänge aufgelöst und der Laser wird für einige mehr und mehr verstimmt, was die Fluoreszenz unterdrückt. Man kann darüber hinaus ebenfalls erkennen, dass das Maximum der Resonanzfluoreszenz für unterschiedliche optische Leistungen auch bei unterschiedlichen Zeeman-Aufspaltungen zu finden ist. Das lässt sich dadurch erklären, dass für größere Leistungen der Übergang aufgrund der Sättigung verbreitert wird und

---

<sup>2</sup>Die Abweichungen der Datenpunkte von der Anpassung sind auf Instabilitäten der Lasersysteme zurückzuführen. Während der Messungen, die mehrere Stunden beanspruchten, änderte sich die Emissionswellenlänge des Rückpumpasers und reduziert so die Fluoreszenz.



**Abbildung E.4.:** Die Abhängigkeit der Resonanzfluoreszenz von der Zeeman-Aufspaltung. Für jeden Datenpunkt wurde ein Spektrum des Kühl-Übergangs aufgezeichnet. Bei den durchgezogenen Linien handelt es sich um Anpassungen gemäß des Fluoreszenzmodells der Gleichungen (E.1.1) und (E.1.2) an die Daten.

somit vergrößert sich auch die Zeeman-Aufspaltung ab der diese mit der Linienbreite konkurriert.

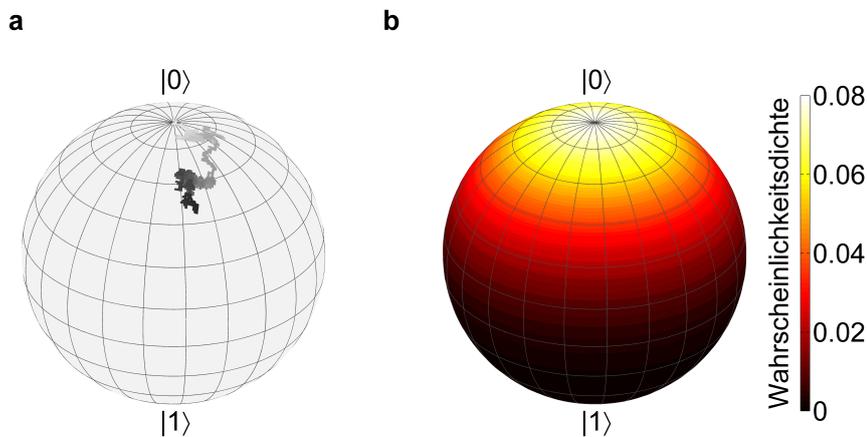
Für ein Magnetfeld von 4,3 G, was einer Zeeman-Aufspaltung von 6 MHz entspricht, wird für eine optische Leistung von  $60 \mu\text{W}$  die Fluoreszenz optimiert. Die Magnetfeldabhängigkeit ist für Zeeman-Aufspaltungen zwischen 4 MHz und 12 MHz jedoch gering und die Fluoreszenzrate ändert sich nur um etwa 10%. Für eine Kette von Ionen bedeutet das, dass die variierende Zeeman-Aufspaltung die Erwartungswerte der Poisson-Verteilungen für helle Ionen ebenfalls nur um etwa 10% ändert. Können die beiden Verteilungen für ein dunkles und ein helles Ion aufgelöst werden, kann man davon ausgehen, dass die Güte des Zustandsnachweises für alle Ionen nahezu gleich gut erfolgen kann.



## Benchmarking-Protokoll zum Messen nicht-resonanter Anregung

In dem vorliegenden Abschnitt wird das Benchmarking-Protokoll, welches zur Messung des Übersprechens in Quantenregistern in Kapitel 6 verwendet wurde, näher erläutert und motiviert. Für die typischen experimentellen Parameter des Quantenbytes (Rabi-Frequenz  $\Omega = 2\pi \times 20$  kHz und Frequenzabstand  $\Delta_{i,i+1} = 2\pi \times 2$  MHz) ist der Fehler, der durch nicht-resonante Anregung hervorgerufen wird, auf der Größenordnung von  $10^{-5}$ . Dieser Effekt ist deutlich kleiner als der typische Detektionsfehler von 0,04 (vgl. Abschnitt 4.3). Solche kleinen Effekte lassen sich mit der Methode des Randomized Benchmarking [89] messen. Dabei wird der Fehler, wie er sich in Folge der Anwendung mehrerer Gatter vergrößert, beobachtet und darauf der Fehler pro Einzelgatter bestimmt. Im Folgenden wird der Zerfall der Zustandsgüte eines Zustandes aufgrund von weit verstimmt Mikrowellenpulsen beschrieben. Das Ergebnis ist eine analytische Formel, welche die mittlere Fidelity nach Anwendung einer Pulssequenz, die aus Pulsen mit gegebener Verstimmung und Leistung sowie jeweils zufällig gewählten Phasen besteht, beschreibt.

Entsprechend der Diskussion in den Abschnitten 2.6.2 und 6.2.1 dreht ein einzelner Mikrowellenpuls, der resonant zu Qubit  $i$  eingestrahlt wird, immer auch den Zustandsvektor eines anderen Qubits  $j$ . Die Drehachse ist dabei von der Phase und der Verstimmung des Pulses  $\Delta_{i,j}$  abhängig. Eine Sequenz von mehreren Pulsen, deren Phasen jeweils zufällig gewählt sind, führt somit zu einer Zufallsbewegung, einem sogenannten Random Walk, des Zustandsvektors von Qubit  $j$  auf seiner Blochkugel.



**Abbildung F.1.:** Effekt von zufälligen Pulssequenzen. (a) Eine zufällige Sequenz von 1250 Pulsen mit einer Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 20$  kHz und einer Verstimmung von  $2\pi \times 2$  MHz führt zu einer Zufallsbewegung des Zustandsvektors, der in  $|0\rangle$  initialisiert war. Nach jedem Puls wird der Zustand durch einen Punkt auf der Bloch-Kugel dargestellt. Die Helligkeit des Punktes kennzeichnet seine Nummer (von hell für die Pulse am Anfang der Sequenz zu dunkel für die letzten Pulse der Sequenz). Für mehrere Pulssequenzen mit den gleichen Parametern wie in (a) ist der mittlere Endzustand über die Blochkugel verteilt. Dieses kann als Diffusionsprozess betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Endzustand ist auf der Blochkugel dargestellt.

Eine solche Zufallsbewegung ist in Abbildung F.1 (a) dargestellt. Diese Abbildung beruht auf einer Simulation von 1250 Pulsen mit einer Rabi-Frequenz von  $2\pi \times 20$  kHz und einer Verstimmung von  $2\pi \times 2$  MHz. Für jeden Puls wurde die Phase zufällig aus der Menge  $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  gewählt. Die Pulsdauer ist hierbei so gewählt, dass der Zustandsvektor des Qubits  $j$  um einen effektiven Winkel von  $\pi$  um die Drehachse rotiert wird und der Effekt aus nicht-resonanter Anregung gerade maximal ist. In der Simulation wird für jeden Puls die Drehmatrix entsprechend der Gleichung (2.6.10) berechnet und diese auf den Zustandsvektor angewandt. Der Anfangszustand ist der Grundzustand  $|0\rangle$ .

Wie eingangs erwähnt, ist die Fidelityänderung aufgrund eines Einzelpulses von der Größenordnung  $10^{-5} \ll 1$ . Aus diesem Grund lässt sich die Zufallsbewegung aufgrund der Pulse, die zu den Zeitpunkten  $t_n$ :  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  während der Benchmarking-Sequenz der Länge  $N \gg 1$  eingestrahlt werden, in guter Näherung als kontinuierliche Bewegung behandeln. Werden mehrere Benchmarking-Sequenzen betrachtet, so wird

der gemittelte Endzustand des Qubits  $j$  auf der Blochkugel verteilt sein (vgl. Abbildung F.1 b). Dieser Vorgang kann als Diffusion modelliert und durch die Diffusionsgleichung

$$\partial_t \phi_{i,j}(\mathbf{r}, t) = D_{i,j} \nabla^2 \phi_{i,j}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{F.0.1})$$

beschrieben werden. Hierbei bezeichnet  $\phi_{i,j}(\mathbf{r}, t)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte den Zustand des Qubits  $j$  zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $\mathbf{r}$  auf seiner Blochkugel vorzufinden. Die Größe  $D_{i,j}$  ist die Diffusionskonstante, die den Prozess beschreibt. Sie ist im Allgemeinen abhängig von den Pulsparametern wie der Leistung, der Dauer und der Verstimmung.

Die Beschreibung der Zustandsänderung findet anhand der Fidelity (vgl. Abschnitt 4.7) und nicht anhand der Lage auf der Blochkugel statt. Somit reduziert sich das Problem der Zustandsdiffusion auf eine einzelne Ortskoordinate  $x$ . Diese Koordinate entspricht dem Winkel zwischen dem Anfangszustand und dem Zustand während der Benchmarking-Sequenz. Für den Fall, dass der Anfangszustand beispielsweise der Zustand  $|0\rangle$  ist, entspricht die Ortskoordinate  $x$  gerade dem Breitengrad der Blochkugel. Der Grund hierfür ist, dass die Fidelity zwischen dem Zustand  $|0\rangle$  und allen anderen Zuständen auf dem jeweils gleichen Breitengrad identisch sind.

Im Folgenden wird das vereinfachte Problem für einen Energieeigenzustand oder einen Superpositionszustand gelöst. Für beide Fälle ist das entsprechende Polarkoordinatensystem gerade so gewählt, dass der Anfangszustand bei  $x_0 = \pi$  lokalisiert ist. In einem solchen Koordinatensystem beträgt die Fidelity  $F$  zwischen einem Zustand bei  $x$  und dem Anfangszustand  $F(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte unterliegt periodischen Randbedingungen aufgrund der Periodizität der Blochkugel und es gilt  $\phi(x + 2\pi) = \phi(x)$ . Die vereinfachte eindimensionale Diffusionsgleichung

$$\partial_t \phi_{i,j}(x, t) = D_{i,j} \partial_x^2 \phi_{i,j}(x, t). \quad (\text{F.0.2})$$

wird durch

$$\phi_{i,j}(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-D_{i,j}t/m^2} (-1)^m \cos(mx) - \frac{1}{2\pi}. \quad (\text{F.0.3})$$

gelöst und in der Abbildung F.1 (b) ist eine stationäre Lösung für den Anfangszustand  $|0\rangle$  dargestellt. Mit der Wahrscheinlichkeitsdichte für den Zustand kann die zeitabhängige Fidelity des Zustands zu

$$\begin{aligned} \langle F_{i,j}(t) \rangle &= \int_0^{2\pi} dx \phi_{i,j}(x, t) F(x), \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-D_{i,j}t}) \end{aligned} \quad (\text{F.0.4})$$

---

berechnet werden. Für den eindimensionalen *Random Walk* mit  $N$  Schritten der Schrittweite  $\delta x_{i,j}$ , die während einer Einzelschrittdauer von  $\tau$  zurückgelegt wird, beträgt die Diffusionskonstante  $D_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{\delta x_{i,j}^2}{\tau}$  (siehe zum Beispiels [185]). Die Gesamtdauer der Zufallsbewegung ist  $t = \tau N$  und jeder Schritt führt zu einer Änderung der *Fidelity* von  $C_{i,j} = 1 - F(\delta x) \approx \frac{\delta x_{i,j}^2}{4}$ . Somit lässt sich der Zusammenhang  $D_{i,j} t = 2C_{i,j} N$  zwischen der Diffusionskonstanten und der Zustandsänderung pro Einzelpuls  $C_{i,j}$  herstellen.

Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass die Diffusion des Zustands von Qubit  $j$  durch das Übersprechen der zufälligen Pulssequenz, die an Qubit  $i$  adressiert ist, hervorgerufen wird. Die mittlere Zustandsgüte von Qubit  $j$ , nachdem  $N$  Pulse mit zufälliger Phase an das Qubit  $i$  adressiert worden sind hängt somit von dem Fehler pro Einzelpuls ab und es resultiert das Ergebnis dieses Abschnitts, welches der Gleichung (6.2.3) entspricht

$$\langle F_{i,j}(N) \rangle = \frac{1}{2}(1 + e^{-2C_{i,j}N}). \quad (\text{F.0.5})$$

Das Benchmarking-Protokoll zur Messung des Fehler aus nicht-resonanter Anregung beispielsweise innerhalb eines Quantenbytes lautet somit wie folgt:

- Präpariere das Register in dem Grundzustand  $|00000000\rangle$ .
- Adressiere eine Pulssequenz der Länge  $N$  an eines der Qubits  $i$ . Die Pulsdauer und die Rabi-Frequenz sind dabei so gewählt, dass sie einem  $\pi$ -Puls des adressierten Qubits entsprechen. Für jeden einzelnen Puls wird die Phase hierbei zufällig aus der Menge  $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  gewählt.
- Messe die Anregung innerhalb des Registers.
- Wiederhole den Vorgang mit einer neuen zufälligen Pulssequenz.

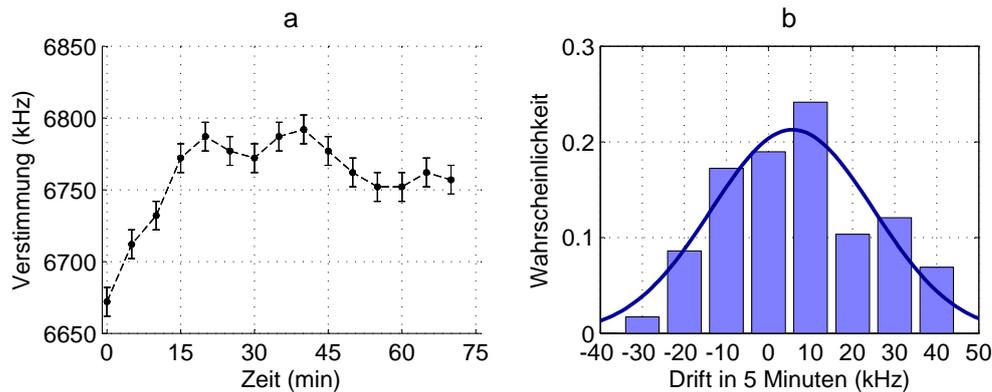
Dieses Protokoll wird für unterschiedliche Sequenzlängen  $N$  durchgeführt und aus der Beobachtung der Anregungen folgt der Zerfall der mittleren *Fidelity*  $\langle F_{i,j}(N) \rangle$  aller nicht-adressierten Qubits  $j$ , wie er von der obigen Gleichung (F.0.5) beschrieben wird. Die Zerfallskonstante entspricht hierbei gerade dem doppelten mittleren Fehler aus der Anwendung eines einzelnen Pulses.

# G

## Drift der Adressierungsfrequenzen

In dem experimentellen Aufbau ist eine langsame Drift der Adressierungsfrequenzen der Qubits zu beobachten. Zur Beschreibung dieser Drift wurde sie sechs Mal an vier verschiedenen Tagen gezielt aufgezeichnet. Hierfür wurde die Resonanzfrequenz des Übergangs  ${}^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow {}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 1$  in Abständen von fünf Minuten mittels mikrowellen-optischer Doppelresonanz-Spektroskopie (vgl. Abschnitt 4.4) gemessen, wobei die Messungen unmittelbar nach dem Laden des Ions gestartet wurde.

In der Abbildung G.1 (a) sind exemplarische Ergebnisse einer dieser Driftmessungen zu sehen. Wie man erkennen kann, ändert sich die Resonanzfrequenz nach dem Laden während der ersten 20 Minuten deutlich hin zu größeren Frequenzen. Die Frequenzänderung beträgt hierbei etwa 100 kHz. Danach hat die Frequenz ein stabiles Niveau erreicht, um das sie sich langsam während 50 Minuten ändert. Die Änderung ist hierbei auf einen Bereich von 50 kHz beschränkt und die Drift beträgt etwa  $3 \text{ kHz min}^{-1}$ . Ein vergleichbares Verhalten ist auch für alle anderen Messungen zu beobachten. Da eine solche Drift für den (in erster Ordnung) magnetfeldunabhängigen Übergang  ${}^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow {}^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  nicht beobachtet wird, und auch die verwendete Mikrowellenkette keine entsprechend große Drift aufweist, lässt sich darauf schließen, dass die Ursache der Drift ein sich änderndes Magnetfeld am Ort des Ions ist. Zur Untersuchung, was diese Magnetfeldänderung hervorruft, wurde der elektrische Strom, der durch die Helmholtz-Spulenpaare (vgl. den Abschnitt 3.2) fließt und somit das Magnetfeld in der Falle bestimmt, gemessen. Eine Frequenzänderung von 100 kHz entspricht für das verwendete Ion einer Magnetfeldänderung von 71 mG. Aus der Kalibrierung der Spulen (vgl. [56]) folgt der Zusammenhang zwischen dem Strom und dem



**Abbildung G.1.:** Drift der Adressierungsfrequenz eines magnetfeldabhängigen Qubits. (a) Die Verstimmung der Resonanzfrequenz des Übergangs  $^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow ^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 1$  von dem in erster Ordnung magnetfeldunabhängigen Übergang  $^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow ^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  wurde über eine Stunde lang mittels mikrowellen-optischer Doppelresonanz-Spektroskopie aufgezeichnet. Die gepunktete Linie dient der besseren Übersicht. (b) Die Drift zwischen jeweils zwei Messungen in einem Abstand von fünf Minuten folgt einer Gaußverteilung (durchgezogene Linie) mit einer Breite von 20 kHz, was den zufälligen Charakter der Drift widerspiegelt.

erzeugten Magnetfeld zu  $8,94(3) \text{ G A}^{-1}$ . Die notwendige Stromänderung, die zu der Magnetfeldänderung führen könnte, beträgt daher etwa 8 mA. Eine solche Stromänderung wurde jedoch nicht beobachtet und somit muss die Magnetfeldänderung eine andere Ursache haben.

Eine Erklärung für den Anstieg des Magnetfeldes unmittelbar nach dem Ladevorgang kann das elektrostatische Aufladen von Teilen der Fallenapparatur sein. Hierbei kann es sich entweder um eine Ablagerung von geladenen Ytterbium durch den Ladevorgang, oder aber um eine Aufladung von Material durch das Bestrahlen mit dem Ionisationslaser bei einer Wellenlänge von 399 nm handeln. Beides kann zu einem elektrostatischen Feld  $\mathbf{E}$  führen, welche eine Kraft  $\mathbf{F} = \mathbf{F} q$  (hier entspricht  $q$  der elektrischen Ladung des Ions) auf ein Ion ausübt und es in dem Pseudopotenzial der Paul-Falle verschiebt. Da sich das Ion in einem Magnetfeldgradienten befindet, führt eine solche Positionsänderung zwangsläufig zu einer Änderung des Magnetfelds, welches das Ion erfährt. Falls eine Ortsänderung in dem Gradienten von etwa  $19 \text{ Tm}^{-1}$  die Ursache für die Ma-

gnetafeldänderung von 71 mG ist, so entspricht sie einer Positionsänderung von 370 nm<sup>1</sup>.

Zur weiteren Beschreibung der Drift wird die Frequenzänderung innerhalb von 5 Minuten untersucht. Das Ergebnis ist in Abbildung G.1 (b) in Form eines Histogramms dargestellt. Die Anpassung einer Gaußglocke an die Daten ergibt eine volle Halbwertsbreite von 38(7) kHz, was einer Drift von etwa 4 kHz min<sup>-1</sup> entspricht. Der Mittelwert ist hierbei zu 6 kHz verschoben, was durch die konstante Drift unmittelbar nach dem Ladevorgang erklärt werden kann. Die Breite der Verteilung ist größer als der statistische Fehler einer Einzelmessung von 10 kHz und somit spiegelt die Verteilung den zufälligen Charakter der Drift wider.

Im experimentellen Betrieb konnte ebenfalls die Beobachtung gemacht werden, dass es zu einer deutlichen Drift der Resonanzfrequenz kommt, wenn man während einer Messsequenz die Dauer der Manipulation mit Mikrowellenpulsen ändert, und die Dauer der Doppler-Kühlung dabei konstant lässt (vgl. dazu den Abschnitt 4.2). Dieses Verhalten wurde näher untersucht, indem die Resonanzfrequenz eines magnetfeldabhängigen Hyperfeinübergangs (in diesem Fall  $^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow ^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1$ ) für unterschiedliche Manipulationsdauern über einen längeren Zeitraum erneut mittels mikrowellen-optischer Doppelresonanz-Spektroskopie gemessen wurden (vgl. Abschnitt 4.4). Hierbei betrug die Dauer der Laserkühlung  $T_{\text{Kühl}}=10$  ms. Die Dauer während der kein Laserlicht eingestrahlt wird beträgt entweder  $T_{\text{Warte}}=0,1$  ms oder  $T_{\text{Warte}}=50$  ms. Diese Zeiten definieren ein Tastverhältnis  $d$  des Kühlaserlichts von

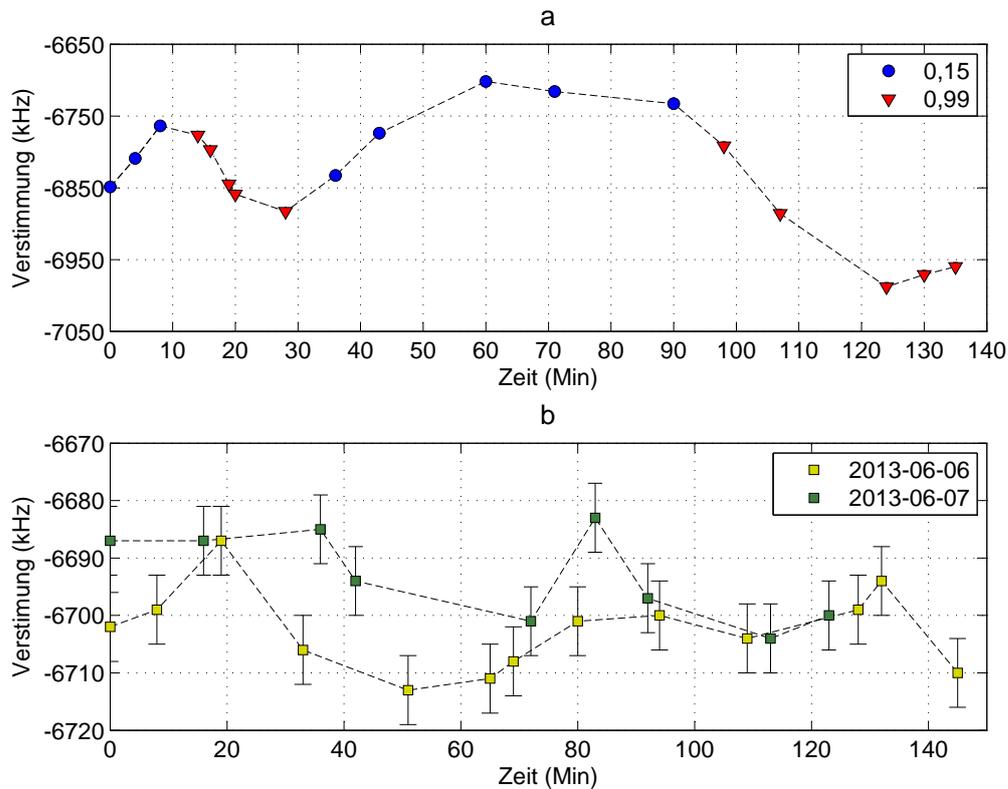
$$d = \frac{T_{\text{Kühl}}}{T_{\text{Kühl}} + T_{\text{Warte}}}, \quad (\text{G.0.1})$$

welches für die obigen Dauern 0,99 bzw. 0,15 beträgt.

Die Abbildung G.2 (a) enthält die Ergebnisse, nachdem das Ion für etwa 20 Minuten gespeichert ist und eine deutliche Drift nach dem Laden nicht länger zu beobachten ist. Das Kühlaserlicht wurde hierbei kontinuierlich eingestrahlt und das Tastverhältnis beträgt somit 1. Nach einem Wechsel des Tastverhältnisses auf 0,15 ändert sich die Resonanzfrequenz innerhalb von 10 Minuten um 100 kHz. Wechselt man das Tastverhältnis zurück nach 0,99, so ändert sich die Resonanzfrequenz in etwa 10 Minuten wieder hin zu dem Ausgangswert. Als etwa 30 Minuten nach dem Start der Beobachtung das Tastverhältnis wieder nach 0,15 gewechselt wird, erhöht sich die Adressierungsfrequenz binnen 30 Minuten um 200 kHz bis sie ein Plateau erreicht. In den folgenden 30 Minuten ändert sich die Frequenz dann nicht mehr. Etwa 90 Minuten nach dem Start wird das Tastverhältnis wieder nach 0,99 geändert und sofort ändert sich auch die Resonanzfrequenz wieder. Die Zeitkonstante beträgt auch hierbei etwa 30 Minuten,

---

<sup>1</sup>Mit dem vorhandenen Abbildungssystem sind solche geringen Positionsänderungen nicht nachzuweisen.



**Abbildung G.2.:** Drift der Resonanzfrequenz eines magnetfeldabhängigen Hyperfeinübergangs, wie sie von von unterschiedlichen Tastverhältnissen des Kühllasers hervorgerufen wird. Der Abstand der Resonanzfrequenz des Übergangs  $^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow ^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1$  von dem in erster Ordnung magnetfeldunabhängigen Übergang  $^2S_{1/2}, F = 0 \leftrightarrow ^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0$  wird über einen Zeitraum von mehr als zwei Stunden aufgezeichnet. In (a) wird dabei das Tastverhältnis des Kühllasers variiert. Es zeigt sich eine deutliche Korrelation. Die Fehlerbalken, die den statistischen Fehler einer Einzelmessung kennzeichnen sind hierbei zu klein, um sie erkennen zu können. In (b) wird an zwei Tagen die Messung wiederholt, jedoch beträgt hier das Tastverhältnis des Lasers konstant 0,2. Die Drift ist nun deutlich geringer. Gestrichelte Linien dienen der besseren Übersicht.

bevor erneut ein stabiler Wert erreicht wird. Für die zwei untersuchten Tastverhältnisse beträgt die Änderung der Resonanzfrequenz knapp 400 kHz. Falls dieses auf eine Verschiebung des Ions zurückzuführen ist, so entspricht es einer Positionsänderung von 1500 nm in dem Magnetfeldgradienten<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Eine solche Verschiebung ist noch zu gering, um sie mit dem gewählten Binning aus den Abbildungen nachzuweisen.

## G. Drift der Adressierungsfrequenzen

---

Um zu bestätigen, dass ein konstantes Tastverhältnis auch eine konstante Resonanzfrequenz garantiert, wurde diese an zwei Tagen über einen Zeitraum von mehr als zwei Stunden beobachtet. Die Wartezeit betrug dabei 37 ms, was einem Tastverhältnis von 0,2 entspricht. Etwa 45 Minuten nach dem Laden wurde die Adressierungsfrequenz verfolgt und aus den Ergebnissen, die in Abbildung G.2 (b) dargestellt sind, lässt sich in der Tat eine stabilere Resonanzfrequenz ablesen. Eine Änderung findet in einem Bereich von 30 kHz statt, wobei die Messwerte alle miteinander verträglich sind und die beobachtete Drift geringer als die in Abbildung G.1 ist.

Somit lässt sich feststellen, dass eine deutliche Drift der Resonanzfrequenz von magnetfeldabhängigen Hyperfeinübergängen stark mit dem Tastverhältnis des Kühllasers und dem Ladevorgang korreliert ist. Es ist nun naheliegend, den Zusammenhang dadurch zu erklären, dass der Kühllaser Teile der Fallenapparatur elektrostatisch auflädt und infolge ein gespeichertes Ion von den resultierenden elektrischen Potenzialen im Magnetfeldgradienten verschoben wird und somit eine Magnetfeldänderung erfährt.

Die Drift lässt sich nun dadurch reduzieren, dass entweder das Tastverhältnis der Laser konstant gehalten wird, oder aber dadurch, dass die Laser so in die Falle fokussiert werden, dass die keine Bauteile mehr aufladen können. In der Zwischenzeit wurde die Justage der Laserstrahlen dahingehend mehrfach optimiert und unmittelbar nach dem Ladevorgang ist nicht länger eine deutliche Drift zu erkennen. Die Drift aufgrund eines unterschiedlichen Tastverhältnisses des Kühllasers ist jedoch weiterhin zu beobachten.

# H

## Die Pauli-Matrizen

An dieser Stelle werden die Pauli-Matrizen und einige ihrer grundlegenden Eigenschaften vorgestellt. Diese bilden die Grundlage für Berechnungen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendet wurden. Die Beschreibung der Pauli-matrizen in diesem Kapitel orientiert sich an [17].

### H.1. Darstellungen der Pauli-Matrizen

In der Basis der Energieeigenzustände

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{H.1.1})$$

werden die drei Pauli-Matrizen üblicherweise dargestellt als

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|, \quad (\text{H.1.2})$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|), \quad (\text{H.1.3})$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|. \quad (\text{H.1.4})$$

In dieser Basis ist die ebenfalls nützliche Darstellung der Identität

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|. \quad (\text{H.1.5})$$

## H.2. Eigenschaften der Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen erfüllen die algebraische Relation

$$\sigma_l \sigma_m = \delta_{lm} \mathbb{1} + i \epsilon_{lmn} \sigma_n \quad \text{für } l, m, n = x, y, z \quad (\text{H.2.1})$$

mit dem Kronecker-Symbol  $\delta_{lm}$  und dem Levi-Civita-Symbol  $\epsilon_{lmn}$ , wobei über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Hieraus lassen sich einige grundlegende und nützliche Aussagen ableiten. So entspricht das Quadrat einer Pauli-Matrix der Identität

$$\sigma_l^2 = \mathbb{1} \quad \text{für } l = x, y, z \quad (\text{H.2.2})$$

und für den Kommutator bzw. Anti-Kommutator gilt

$$[\sigma_l, \sigma_m] = \sigma_l \sigma_m - \sigma_m \sigma_l = 2i \epsilon_{lmn} \sigma_n, \quad (\text{H.2.3})$$

$$\{\sigma_l, \sigma_m\} = \sigma_l \sigma_m + \sigma_m \sigma_l = 2\delta_{lm} \mathbb{1} \quad \text{für } l, m, n = x, y, z. \quad (\text{H.2.4})$$

## H.3. Nützliche Relationen

Aus den obigen Eigenschaften folgen einige Spezialfälle, die in Berechnungen, welche dieser Arbeit zugrunde liegen, Verwendung fanden. Diese sind die Anti-Vertauschung von  $\sigma_x$  beziehungsweise  $\sigma_y$  mit  $\sigma_z$

$$\sigma_x \sigma_z = -\sigma_z \sigma_x, \quad (\text{H.3.1})$$

$$\sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y. \quad (\text{H.3.2})$$

Für das Matrixexponential gilt außerdem der Ausdruck

$$e^{i\alpha \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{1} \cos(\alpha) + i(n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z) \sin(\alpha). \quad (\text{H.3.3})$$

Insbesondere gilt auch

$$e^{i\alpha \sigma_z} = \mathbb{1} \cos(\alpha) + i\sigma_z \sin(\alpha). \quad (\text{H.3.4})$$

Darauf aufbauend können weitere nützliche Ausdrücke hergeleitet werden. So folgt beispielsweise

$$e^{i\alpha \sigma_z} \sigma_x e^{i\beta \sigma_z} = (\mathbb{1} \cos \alpha + i\sigma_z \sin \alpha) \sigma_x (\mathbb{1} \cos \beta + i\sigma_z \sin \beta) \quad (\text{H.3.5})$$

$$= (\mathbb{1} \cos \alpha + i\sigma_z \sin \alpha) (\mathbb{1} \cos \beta - \sigma_z \sin \beta) \sigma_x \quad (\text{H.3.6})$$

$$= e^{i(\alpha-\beta)\sigma_z} \sigma_x, \quad (\text{H.3.7})$$

wobei die Darstellung (H.3.4) des Matrixexponentials und die Anti-Vertauschung von  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$  (H.3.1) verwendet worden ist. Da die gleiche Anti-Vertauschung auch analog für  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$  gilt (vgl. Gleichung (H.3.2)), ergibt sich allgemein

$$e^{i\alpha\sigma_z}(\sigma_x \cos \varphi - \sigma_y \sin \varphi)e^{i\beta\sigma_z} = e^{i(\alpha-\beta)\sigma_z}(\sigma_x \cos \varphi - \sigma_y \sin \varphi). \quad (\text{H.3.8})$$

In einem höherdimensionalen Vektorraum, der zum Beispiel Mehr-Qubit-Systeme beschreiben soll, werden Kronecker-Produkte von Pauli-Matrizen verwendet. In dem Hamilton-Operator, der die J-Kopplung zwischen zwei Qubits beschreiben soll (siehe Gl. (2.5.18)) steht zum Beispiel der Ausdruck  $\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$ , was verkürzt das Kronecker-Produkt  $\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$  bezeichnet. In solchen Vektorräumen (eines Zwei-Qubit-Systems) bezeichnet dann  $\sigma_z^{(1)}$  auch beispielsweise das Produkt  $\sigma_z^{(1)} \otimes \mathbb{1}^{(2)}$ , wobei  $\mathbb{1}^{(2)}$  der Identität in dem Unterraum von Qubit 2 entspricht.

Nützliche Relationen sind nun die Kommutation von Pauli-Matrizen, die sich auf unterschiedliche Untervektorräume  $j, k$  beziehen,

$$[\sigma_l^{(j)}, \sigma_m^{(k)}] = 0 \quad \text{für } l, m = x, y, z \quad \text{und } j \neq k. \quad (\text{H.3.9})$$

Für das Matrixexponential gilt die zu (H.3.4) analoge Darstellung

$$e^{i\alpha\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} = \mathbb{1}^{(j,k)} \cos \alpha + i\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)} \sin \alpha, \quad (\text{H.3.10})$$

wobei  $\mathbb{1}^{(j,k)}$  die Identität  $\mathbb{1}^{(j)} \otimes \mathbb{1}^{(k)}$  bezeichnet. Hierauf aufbauend lässt sich die nützliche Relation

$$e^{i\alpha\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} \sigma_x^{(j)} e^{i\beta\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} = (\mathbb{1}^{(j,k)} \cos \alpha + i\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)} \sin \alpha) \sigma_x^{(j)} (\mathbb{1}^{(j,k)} \cos \beta + i\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)} \sin \beta) \quad (\text{H.3.11})$$

$$= (\mathbb{1}^{(j,k)} \cos \alpha + i\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)} \sin \alpha) (\mathbb{1}^{(j,k)} \cos \beta - i\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)} \sin \beta) \sigma_x^{(j)} \quad (\text{H.3.12})$$

$$= e^{i(\alpha-\beta)\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} \sigma_x^{(j)} \quad (\text{H.3.13})$$

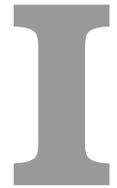
herleiten, wobei ebenfalls die Darstellung des Matrixexponentials (H.3.10) und die Anti-Vertauschung von Pauli-Matrizen des gleichen Unterraums (vgl. Gl. (H.3.1)) verwendet wurde. Die zweifache Anwendung der obigen Relation (H.3.13) ergibt den ebenfalls nützlichen Ausdruck

$$e^{i\alpha\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} \sigma_x^{(j)} \sigma_x^{(k)} e^{i\beta\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} = e^{i\alpha\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} \sigma_x^{(k)} e^{-i\beta\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} \sigma_x^{(j)} \quad (\text{H.3.14})$$

$$= e^{i\alpha\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} e^{i\beta\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} \sigma_x^{(j)} \sigma_x^{(k)} \quad (\text{H.3.15})$$

$$= e^{i(\alpha+\beta)\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(k)}} \sigma_x^{(j)} \sigma_x^{(k)}. \quad (\text{H.3.16})$$

Da die Anti-Vertauschungsrelationen analog für  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  gelten, lassen sich in (H.3.13) und (H.3.16) von  $\sigma_x^{(j)}$  entsprechend auf  $\sigma_x^{(j)} \cos \varphi^{(j)} - \sigma_y^{(j)} \sin \varphi^{(j)}$  verallgemeinern.



# Berechnungen zur dynamischen Entkopplung

In diesem Kapitel werden einige Rechnungen näher ausgeführt, die bei der Diskussion der dynamischen Entkopplung in Kapitel 7 herangezogen werden.

## I.1. Anwendung eines Spin-Echo-Pulses

Der grundlegende Baustein einer jeden Sequenz von dynamischen Entkopplungspulsen ist ein resonanter  $\pi$ -Puls, welcher (bis auf eine Phase) der Anwendung eines NOT-Gatters auf dem adressierten Qubit entspricht. Vor und nach diesem Puls entwickelt sich das Qubit entsprechend den Magnetfeldfluktuationen, die im Zeitmittel zu einer Dephasierung führen (siehe Abschnitt 7.1.1). An dieser Stelle wird gezeigt, dass für das vorhandene Rauschen jeder resonante  $\pi$ -Puls als dynamischer Entkopplungspuls verwendet werden kann, egal welche Phase er hat. Bedeutung hat dieser Umstand bei der Kontruktion pulsfehlertoleranter Sequenzen, die auf  $\pi$ -Pulsen mit unterschiedlichen Phasen beruhen (vgl. Abschnitt 7.1.4).

Der Hamilton-Operator, der die Magnetfeldfluktuationen beschreibt, welche auf ein Einzelqubit wirken, lautet (siehe (7.1.2)):

$$H_{\text{Deph}} = \frac{\hbar}{2} \xi(t) \sigma_z. \quad (\text{I.1.1})$$

Die Zeitentwicklung ist dann (vgl.(7.1.3))

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{2} \int_{t_0}^t \xi(t') \sigma_z dt'} \quad (I.1.2)$$

und entspricht einer Drehung um die z-Achse, wobei der Drehwinkel

$$\phi(t, t_0) = \int_{t_0}^t \xi(t') dt' \quad (I.1.3)$$

ist. Für einen resonanten  $\pi$ -Puls mit der beliebigen Phase  $\varphi$  lautet die Zeitentwicklung (vgl. Gl. (2.6.4))

$$U_\pi(\varphi) = i(\cos \varphi \sigma_x - \sin \varphi \sigma_y). \quad (I.1.4)$$

Für die Anwendung eines solchen beliebigen Pulses (mit einer Drehachse in der  $xy$ -Ebenen) zwischen zwei Wartedauern lautet dann die resultierende Zeitentwicklung

$$U_{SE} = U(t_2, t_1) U_\pi(\varphi) U(t_1, t_0), \quad (I.1.5)$$

$$= e^{-\frac{i}{2} \phi(t_2, t_1) \sigma_z} i(\cos \varphi \sigma_x - \sin \varphi \sigma_y) e^{-\frac{i}{2} \phi(t_1, t_0) \sigma_z}. \quad (I.1.6)$$

Mit Hilfe der Gleichung (H.3.8) folgt nun unmittelbar

$$U_{SE} = U(t_2, t_1) U_\pi(\varphi) U(t_1, t_0), \quad (I.1.7)$$

$$= e^{-\frac{i}{2} (\phi(t_2, t_1) - \phi(t_1, t_0)) \sigma_z} U_\pi(\varphi). \quad (I.1.8)$$

Sind nun die Zeitintervalle gleich lang und ändert sich  $\xi(t)$  auf dieser Zeitskala kaum, so wird der Einfluss des Rauschens für jeden beliebigen  $\pi$ -Puls (in der  $xy$ -Ebenen) kompensiert.

## I.2. Dynamische Entkopplung eines Mehr-Qubit-Systems

Hier soll nun der Einfluss von resonanten  $\pi$ -Pulsen auf die Zeitentwicklung eines Mehr-Qubit-Systems betrachtet werden. Der einfachste zu diskutierende Fall ist der des gekoppelten dephasierenden Zwei-Qubit-Systems, das durch den Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar}{2} J_{12} \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} + \frac{\hbar}{2} \xi_1(t) \sigma_z^{(1)} + \frac{\hbar}{2} \xi_2(t) \sigma_z^{(2)} \quad (I.2.1)$$

beschrieben wird. Da alle Operatoren kommutieren (vgl. Anhang H), lässt sich die Zeitentwicklung

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} H(t) dt} \quad (1.2.2)$$

dieses Systems in der Form

$$U(t_1, t_0) = \Theta_{12}(t_1, t_0) \Xi_1(t_1, t_0) \Xi_2(t_1, t_0) \quad (1.2.3)$$

mit den Operatoren

$$\Theta_{12}(t_1, t_0) = e^{\frac{i}{2} J_{12} \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} (t_1 - t_0)} \quad (1.2.4)$$

$$\Xi_1(t_1, t_0) = e^{-\frac{i}{2} \int_{t_0}^{t_1} \xi_1(t) \sigma_z^{(1)} dt} \quad (1.2.5)$$

$$\Xi_2(t_1, t_0) = e^{-\frac{i}{2} \int_{t_0}^{t_1} \xi_2(t) \sigma_z^{(2)} dt} \quad (1.2.6)$$

darstellen.

Bei der Untersuchung des Effekts von unterschiedlichen  $\pi$ -Pulsen wird im Weiteren davon ausgegangen, dass sie alle die Phase  $\varphi = 0$  haben. Somit wird ein Puls, der an das Qubit  $j$  adressiert wird, beschrieben durch  $X_j = i\sigma_x^{(j)}$ . Wie in Kapitel H diskutiert wurde, lassen sich aber alle Ergebnisse analog auf die Anwendung eines beliebigen  $\pi$ -Pulses der Form  $\sigma_x^{(j)} \cos \varphi^{(j)} - \sigma_y^{(j)} \sin \varphi^{(j)}$  übertragen.

Die simultane Anwendung von je einem Puls an zwei Qubits ergibt nun die Zeitentwicklung

$$U(t_2, t_1) X_1 X_2 U(t_1, t_0) = [\Theta_{12}(t_2, t_1) \Xi_1(t_2, t_1) \Xi_2(t_2, t_1)] X_1 X_2 [\Xi_1(t_1, t_0) \Xi_2(t_1, t_0) \Theta_{12}(t_1, t_0)] \quad (1.2.7)$$

Weil  $\Xi_2(t_2, t_1)$  mit  $X_1$  und  $\Xi_1(t_1, t_0)$  mit  $X_2$  kommutiert (siehe Kapitel H), lässt sich die rechte Seite von (1.2.7) schreiben als

$$\Theta_{12}(t_2, t_1) \left( \underbrace{\Xi_1(t_2, t_1) X_1 \Xi_1(t_1, t_0)}_{\approx X_1} \right) \left( \underbrace{\Xi_2(t_2, t_1) X_2 \Xi_2(t_1, t_0)}_{\approx X_2} \right) \Theta_{12}(t_1, t_0). \quad (1.2.8)$$

Die Ausdrücke in den runden Klammern entsprechen der Zeitentwicklung eines Einzelqubit unter Anwendung eines einzelnen dynamischen Entkopplungspulses. Für einen Spin-Echo-Puls unterdrückt dieser idealerweise das Rauschen und die Zeitentwicklung entspricht lediglich der Anwendung des Pulses (siehe Gleichungen (H.3.8) und (I.1.8)).

Eine nicht-perfekte Kompensation führt zu Operatoren der Form  $e^{i\alpha\sigma_z^{(i)}} : i = 1, 2$ , die mit  $\Theta_{12}$  kommutieren. Die Gleichung (1.2.7) lässt sich somit in guter Näherung schreiben als

$$U(t_2, t_1) X_1 X_2 U(t_1, t_0) \approx \Theta_{12}(t_2, t_1) X_1 X_2 \Theta_{12}(t_1, t_0) \quad (1.2.9)$$

$$\approx \Theta_{12}(t_2, t_1) \Theta_{12}(t_1, t_0) X_1 X_2, \quad (1.2.10)$$

wobei eventuelle Operatoren, die eine unzureichende Kompensation des Magnetfeldrauschens beschreiben, vernachlässigt und die Gleichung (H.3.16) verwendet wurden.

Physikalisch bedeutet diese Gleichung erstens, dass die Leistungsfähigkeit dynamischer Entkopplungspulse, der Dephasierung entgegenzuwirken, nicht von der vorhandenen J-Kopplung beeinflusst wird. Die Diskussion kann aus diesem Grund dahingehend vereinfacht werden, dass sie sich auf eine Dephasierung und die dynamische Entkopplung von Einzelqubits reduziert. Alle Resultate von Einzelqubits (im Falle einer reinen Dephasierung aufgrund von (1.2.1)) lassen sich dann auf Mehr-Qubit-Systeme übertragen. Zweitens bedeutet diese Gleichung, dass die simultanen Entkopplungspulse die Dynamik basierend auf der J-Kopplung ungestört lassen.

Für eine Sequenz von  $N$  Pulsen (wobei  $N$  gerade sei) mit einer CPMG-Taktung lautet die resultierende Zeitentwicklung (siehe Abschnitt 7.1.4)

$$(\Theta_{12}X_1X_2\Theta_{12})^N = (\Theta_{12}X_1X_2\Theta_{12})^{N/2}(\Theta_{12}X_1X_2\Theta_{12})^{N/2} \quad (1.2.11)$$

$$= (\Theta_{12}\Theta_{12}X_1X_2)^{N/2}(X_1X_2\Theta_{12}\Theta_{12})^{N/2} \quad (1.2.12)$$

$$= \Theta_{12}^{2N}, \quad (1.2.13)$$

wobei  $\Theta_{12}$  entsprechend der Gleichung (1.2.4) der bedingten Dynamik während einer festen Wartedauer entspricht. Bei der Berechnung wurde die Vertauschung dieser Zeitentwicklung mit den simultanen Pulsen (vgl. Gleichung (H.3.16)) und die Eigenschaften der Pauli-Matrizen (siehe Kapitel H) verwendet. Die effektive Zeitentwicklung einer CPMG-Sequenz von  $N$  simultanen Pulsen entspricht also der freien Entwicklung des gekoppelten Systems. Dieser Sachverhalt bildet die Grundlage der dynamischen Entkopplungssequenzen, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht und verwendet wurden.

Nun soll die Wirkung eines einzelnen  $\pi$ -Pulses (zum Beispiel  $X_1$ ) auf die Dynamik betrachtet werden. Die Zeitentwicklung ist nun

$$U(t_2, t_1) X_1 U(t_1, t_0) = [\Theta_{12}(t_2, t_1) \Xi_1(t_2, t_1) \Xi_2(t_2, t_1)] \\ X_1 [\Xi_1(t_1, t_0) \Xi_2(t_1, t_0) \Theta_{12}(t_1, t_0)] . \quad (1.2.14)$$

Analog zu dem vorherigen Fall kann die rechte Seite vereinfacht werden zu

$$\Theta_{12}(t_2, t_1) \left( \underbrace{\Xi_1(t_2, t_1) X_1 \Xi_1(t_1, t_0)}_{\approx X_1} \right) \Xi_2(t_2, t_1) \Xi_2(t_1, t_0) \Theta_{12}(t_1, t_0) . \quad (1.2.15)$$

Für die Zeitentwicklung folgt nun

$$U(t_2, t_1) X_1 U(t_1, t_0) \approx \Theta_{12}(t_2, t_1) X_1 \Theta_{12}(t_1, t_0) \Xi_2(t_2, t_1) \Xi_2(t_1, t_0) \quad (1.2.16)$$

$$\approx X_1 \Xi_2(t_2, t_1) \Xi_2(t_1, t_0) . \quad (1.2.17)$$

Wegen der Gleichung (H.3.13) führt dies zu einer vollständigen Kompensation der Beiträge aufgrund der J-Kopplung für den Fall, dass die Zeitintervalle  $t_2 - t_1$  und  $t_1 - t_0$  gleich lang sind. Das erste Qubit verhält sich also so, als würde die Kopplung nicht wirken und erfährt nur den  $\pi$ -Puls. Das zweite Qubit dephasiert lediglich und zeigt keine Dynamik basierend auf der gemeinsamen Kopplung.

Werden an beide Qubits Sequenzen von dynamischen Entkopplungspulsen adressiert, so kann die Dephasierung auf beiden Qubits unterdrückt werden und das System entwickelt sich ungestört entsprechend der wechselseitigen J-Kopplung (siehe Gleichung (I.2.13)). Zusätzliche  $\pi$ -Pulse, die an einzelne Qubits adressiert werden, können mittels einer ausgewählten Ankopplung die Auswirkung ausgewählter Kopplungen unterdrücken und effektiv so nur bestimmte Kopplungen wirken lassen. Geht man davon aus, dass beide Qubits mittels einer Pulssequenz vor einer Dephasierung geschützt sind, wird ihre Zeitentwicklung von der Gleichung (I.2.13) beschrieben. Wird genau in der Mitte der Pulssequenz eines der Qubits mit einem zusätzlichen  $\pi$ -Puls manipuliert (zum Beispiel das erste), so folgt aufgrund von Gleichung (H.3.13) die Zeitentwicklung

$$\Theta_{12}^N X_1 \Theta_{12}^N = X_1. \quad (I.2.18)$$

Somit können dann beide Qubits vor einer Dephasierung geschützt und ihre Kopplung effektiv unterdrückt werden.

Die Erweiterung aller bisherigen Überlegungen an einem gekoppelten dephasierenden Zwei-Qubit-System lassen sich analog auf Mehr-Qubit-Systeme erweitern. Der Hamilton-Operator lautet dann

$$H = -\frac{\hbar}{2} \sum_{j < k}^N J_{jk} \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(k)} + \frac{\hbar}{2} \sum_{j=1}^N \xi_j(t) \sigma_z^{(j)} \quad (I.2.19)$$

und es folgt die Zeitentwicklung in der Form

$$U(t_1, t_0) = \prod_{j < k}^N \Theta_{jk} \prod_j^N \Xi_j(t_1, t_0), \quad (I.2.20)$$

wobei die Operatoren  $\Theta_{jk}$  und  $\Xi_j$  sich analog zu den Gleichungen (I.2.4) bzw. (I.2.5) ergeben. Anhand der Überlegungen dieses Kapitels kann dann die resultierende Zeitentwicklung unter der Anwendung von  $\pi$ -Pulsen berechnet werden. Ein Spezialfall ist dabei die simultane Anwendung von dynamischen Entkopplungspulsen auf alle Qubits. Das System ist dann vor einer Dephasierung geschützt und entwickelt sich bis auf die lokalen Rotationen der Puls frei unter der wechselseitigen J-Kopplungen. Werden während der Sequenz von simultanen Entkopplungspulsen zusätzliche Pulse zur ausgewählten Ankopplung ausgeführt, lassen sich ausgewählte Kopplungen effektiv unterdrücken.

# J

## Simulationen zur dynamischen Entkopplung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse von Simulationsrechnungen, die zur Anwendung dynamischer Entkopplungspulse durchgeführt worden sind, zusammengefasst. Im Rahmen dieser Dissertation waren diese Simulationen geeignet, um unterschiedliche Strategien und Pulssequenzen für die dynamische Entkopplung zu vergleichen. Hierbei wurde die Dephasierung vernachlässigt und lediglich der Einfluss von Pulsfehlern auf das zu schützende System untersucht. In den Simulationen wird dann jeder Puls durch seine Drehmatrix (siehe Abschnitt 2.6) beschrieben. Die bedingte Dynamik aufgrund der Kopplung zwischen mehreren Qubits kann ebenfalls als Matrix dargestellt werden und eine Pulssequenz entspricht somit dem Produkt mehrerer Matrizen. Mit der Verwendung von MATLAB zur Berechnung dieser Matrixprodukte kann der Vergleich der Fehlertoleranz unterschiedlicher Sequenzen wesentlich schneller als durch umfangreiche experimentelle Studien erfolgen. Die Ergebnisse der Berechnungen sind dabei qualitativ immer im Einklang mit den Messdaten und anderen Simulationen in der Literatur (vgl. zum Beispiel [141; 140]). Zuerst werden nun die Ergebnisse der Simulationen und danach der exemplarische Quellcode in MATLAB dargelegt.

### J.1. Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Simulationsrechnungen zur Pulsfehlertoleranz unterschiedlicher Sequenzen von dynamischen Entkopplungspulsen vorgestellt. Die unter-

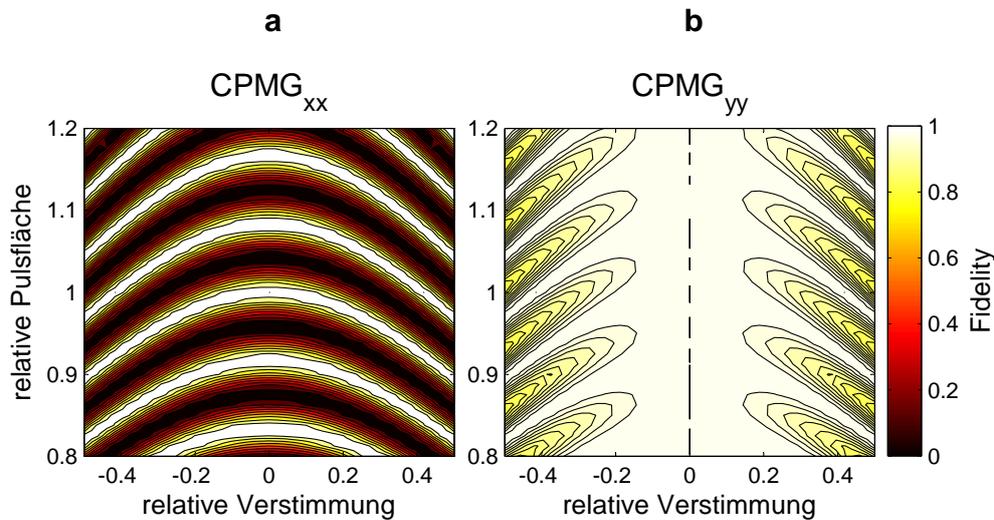
suchten Pulsfehler sind hierbei eine Verstimmung der Pulse oder aber Pulsflächenfehler (vgl. Abschnitt 2.6.2). Die relative Verstimmung  $\Delta/\Omega$  beschreibt hierbei die Verstimmung  $\Delta$  in Relation zur Rabi-Frequenz  $\Omega$ . Ein Pulsflächenfehler wird durch die relative Pulsfläche beschrieben. Hierbei entspricht die Pulsfläche eines Rechteckpulses  $\Omega\tau$  dem Produkt aus der Rabi-Frequenz und der Pulsdauer  $\tau$  und beschreibt den Drehwinkel, um den der Zustandsvektor im Bild der Bloch-Kugel gedreht wird. Die relative Pulsfläche setzt dabei die Pulsfläche in das Verhältnis zur Pulsfläche eines idealen Pulses. Eine relative Pulsfläche von mehr als eins entspricht dann einem Puls, der entweder zu lange wirkt oder aber eine zu große Leistung aufweist. Bei relativen Pulsflächen von weniger als eins sind diese Größen dann kleiner als im Idealfall.

Die Untersuchung des Einflusses von Pulsfehlern geht in diesem Kapitel über den Bereich der typischen Pulsfehler in dem experimentellen Aufbau hinaus. Typische Pulsfehler sind hierbei eine Verstimmung von 10 kHz bei einer Rabi-Frequenz von 50 kHz (und somit einer relativen Verstimmung von 0,2) und ein Pulsflächenfehler von weniger als 0,05 (vgl. Abschnitt 2.6.2).

### **J.1.1. Pulse gleicher Phase**

Als erstes werden zwei Sequenzen mit jeweils konstanten Phasen auf einen Superpositionszustand angewandt. Die Pulse entsprechen dann Drehungen um eine Achse, die entweder senkrecht oder parallel zum Zustandsvektor im Bild der Bloch-Kugel liegt. Die jeweils resultierende Zustandsfidelity ist in der Abbildung J.1 zu finden. Konkret entsprechen die Sequenzen einer CPMG<sub>xx</sub> (a) bzw. CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz (b) mit je 24 Pulsen, die auf den Zustand  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$  angewandt werden. Wie man erkennen kann, weisen beide Sequenzen ein unterschiedliches Verhalten auf. Stehen die Drehachse und der Zustandsvektor wie bei der CPMG<sub>xx</sub>-Sequenz senkrecht aufeinander, können sich Pulsfehler sehr schnell aufaddieren und zu einer reduzierten Fidelity führen. Eine hohe Fidelity trotz vorhandener Pulsfehler beruht auf einer Drehung des Zustandsvektors von unterschiedlichen Vielfachen von  $2\pi$ , was zu einem scheinbar periodischen Verhalten führt. Ein anderes Verhalten zeigt sich für den Fall, dass die Drehachse parallel (oder auch anti-parallel) zum Zustandsvektor liegt. Hier zeigt sich für die CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz ein deutliches Plateau und die Fidelity des Zustands ist nahezu unabhängig von Pulsfehlern.

In einem Quantenalgorithmus ist der Zustand eines Qubits jedoch im Allgemeinen unbekannt und somit würden diese beiden Sequenzen mal mehr und mal weniger robust gegenüber Pulsfehlern sein. Die beiden obigen Beispiele stellen somit die beiden Extremsituationen der möglichen Fehlertoleranz dar.



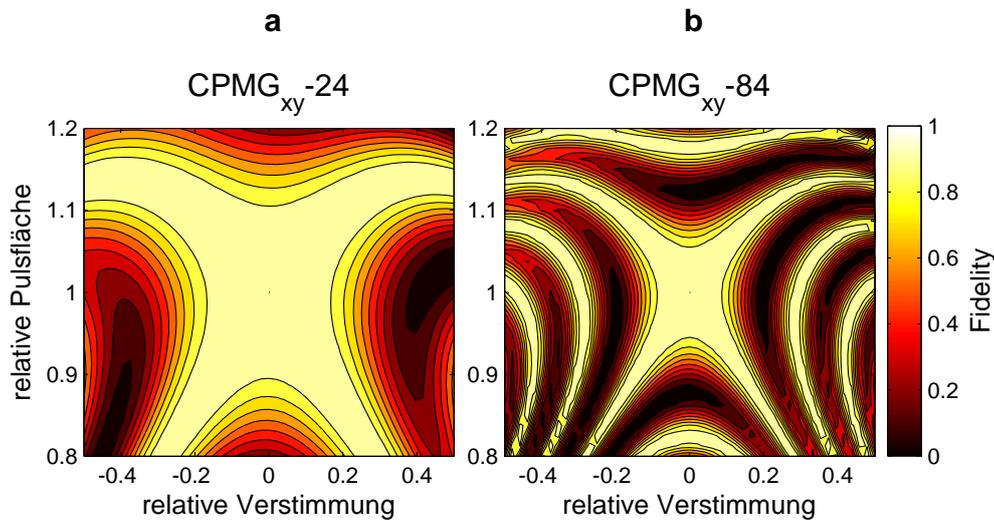
**Abbildung J.1.:** Die Fehlertoleranz der Fidelity einer  $\text{CPMG}_{xx}$ - und  $\text{CPMG}_{yy}$ -Sequenz mit 24 Pulsen angewandt auf den Anfangszustand  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ . (a) Für die  $\text{CPMG}_{xx}$ -Sequenz ist die Fidelity sehr stark abhängig von Pulsfehlern. Die Regionen hohe Fidelity, die trotz Pulsfehlern beobachtet werden können, resultieren dabei aus Rotationen des Qubits um unterschiedliche Vielfache von  $2\pi$ . (b) Für die  $\text{CPMG}_{yy}$ -Sequenz hingegen wird die Fidelity von Pulsfehlern kaum beeinträchtigt.

### J.1.2. Pulse mit alternierenden Phasen

Für die Stabilisierung von quantenlogischen Operationen ist es vorteilhaft, Sequenzen zu wählen, die für jeden Eingangszustand (nahezu) gleich pulsfehlertolerant sind. Dieses kann erreicht werden, wenn der Zustand während der Sequenz gleich häufig um die  $x$ -Achse bzw. die  $y$ -Achse gedreht wird. Eine solche Sequenz ist die  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz.

Für 24 Pulse zeigt sich in der Abbildung J.2 (a) für die typischen Obergrenzen der Pulsfehler (relativer Pulslängenfehler von 0,1 und einer relativen Verstimmung von 0,2) ein Plateau von 0,95 Fidelity. Anhand dieser Sequenz wird deutlich, dass es Sequenzen gibt, in denen sich die Pulsfehler nicht aufaddieren, sondern gegenseitig kompensieren können. So ist beispielsweise die Fidelity nach der Sequenz gegebenenfalls besser als die nach einem einzelnen Puls. Es zeigt sich in der Teilabbildung J.2 (b), dass dieses Plateau für eine steigende Pulsanzahl die Sequenz wieder fehleranfälliger wird. Für 84 Pulse reduziert sich das Plateau der hohen Fidelity auf Pulsflächenfehler von 0,05 und eine relative Verstimmung von 0,1.

Neben der Anwendung solcher Pulse auf einen Superpositionszustand, kann auch die Anwendung auf einen Energieeigenzustand simuliert werden. In der Abbildung J.3 finden

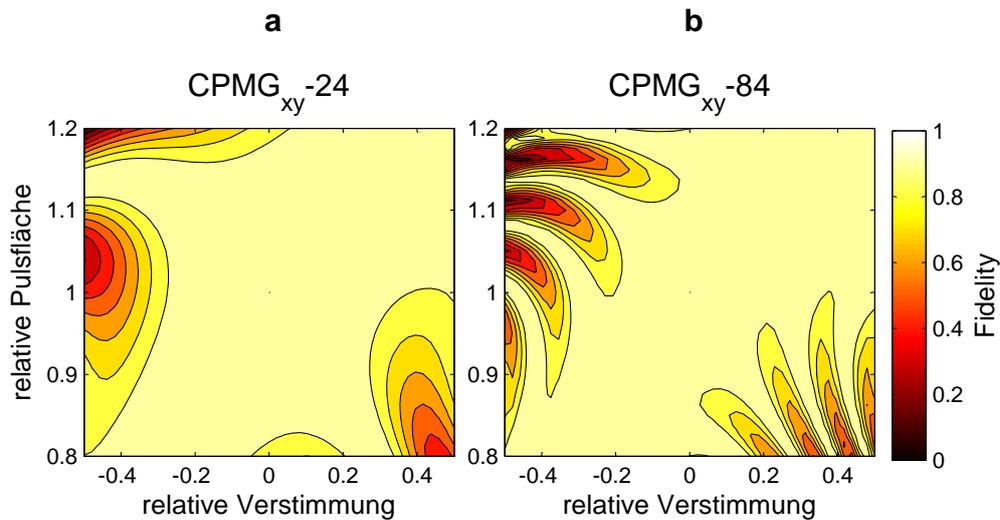


**Abbildung J.2.:** Die Fehlertoleranz der Fidelity einer  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz mit 24 (a) bzw. 84 (b) Pulsen angewandt auf den Anfangszustand  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ . Es gibt ein deutliches Plateau, in dem trotz Pulsfehlern eine Fidelity von 0,95 erreicht wird. Jedoch wird diese Region mit steigender Pulszahl kleiner und die Sequenz somit fehleranfälliger. Für einen anderen Superpositionszustand wie beispielsweise  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$  zeigt sich das gleiche Verhalten und die Fehlertoleranz ist unabhängig von der Phase des Superpositionszustands.

sich die resultierende Darstellung der Fidelity. Für den Zustand  $|1\rangle$  (für  $|0\rangle$  zeigen sich die gleichen Ergebnisse) ist die resultierende Fidelity weniger stark abhängig von Pulsfehlern als für einen Superpositionszustand. Auch hier steigt die Fehleranfälligkeit mit der Pulsanzahl an.

### J.1.3. Robuste Pulse und selbtkorrigierende Sequenzen

Eine denkbare Strategie, um eine Pulssequenz gegenüber Pulsfehlern robuster zu machen, wäre die Verwendung von robusten Einzelpulsen. Solche können beispielsweise zusammengesetzte Pulse [127] oder Pulse aus optimaler Kontrolltheorie [128] sein. Um abzuschätzen welche der beiden Strategien - die Konstruktion von selbstkompensierenden Sequenzen oder Sequenzen aus robusten Pulsen - vorteilhafter ist, wurden beispielhafte Sequenzen miteinander verglichen. Die eine Sequenz ist die  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz mit einfachen Rechteckpulsen und die  $\text{CPMG}_{xx}$ -Sequenz mit robusten zusammengesetzten Pulsen. Für diese Pulse wurden sogenannte BB1-Pulse gewählt, die sowohl gegenüber Verstimmungen als auch Pulsflächenfehlern robust sind. Das Ergebnis für



**Abbildung J.3.:** Die Fehlertoleranz der Fidelity einer  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz mit 24 (a) bzw. 84 (b) Pulsen angewandt auf den Anfangszustand  $|1\rangle$ . Die Sequenz ist sehr tolerant gegenüber Pulsfehlern, jedoch steigt die Fehleranfälligkeit mit der Pulsanzahl.

die  $\text{CPMG}_{xx}$ -Sequenz mit 24 robusten Einzelpulsen ist in der Abbildung J.4 dargestellt und für einfache Rechteckpulse ergibt sich das Ergebnis aus der Abbildung J.1 a.

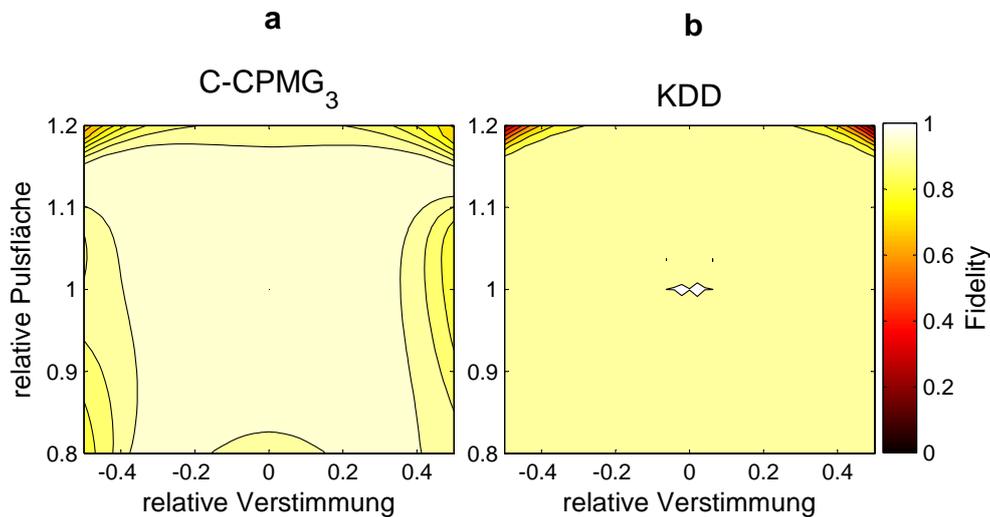
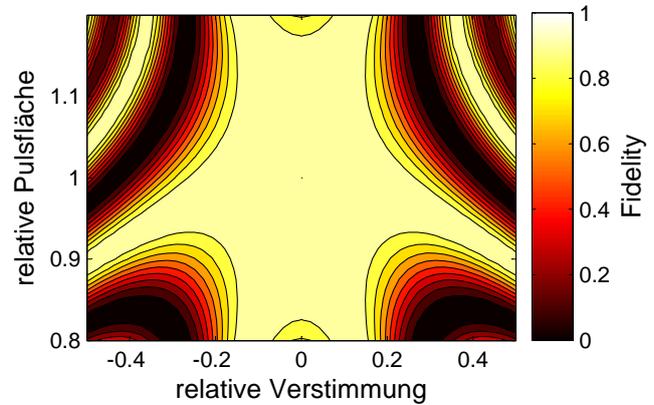
Der Anfangszustand ist für beide Fälle der Zustand  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ . Aus dem Vergleich der beiden Plots erkennt man, wie die robusten zusammengesetzten Pulse die Sequenz toleranter gegenüber Pulsfehlern machen. Vergleicht man jedoch die resultierende Fidelity in der Abbildung J.4 mit dem für eine Sequenz mit alternierenden Phasen aus der Abbildung J.2 (a), so lässt sich eine qualitativ vergleichbare Fehlertoleranz feststellen.

Somit gibt es selbstkorrigierende Pulssequenzen, die eine ähnliche Fehleranfälligkeit aufweisen können wie fehleranfällige Sequenzen aus robusten Einzelpulsen. Aus diesem Grund wurde - auch zur Vereinfachung - die Strategie von selbstkorrigierenden Sequenzen weiterverfolgt.

#### J.1.4. Komplexere Pulssequenzen

Soll der Zustand eines Qubits über einen immer längeren Zeitraum vor Dephasierung geschützt werden, so ist in der Regel auch eine größere Anzahl von dynamischen Entkopplungspulsen notwendig. Für die  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz wurde jedoch in Abbildung J.2 gezeigt, dass die Fehlertoleranz auch mit der Pulsanzahl anwächst. Aus diesem Grund

**Abbildung J.4:** Die Fehler-toleranz der Fidelity einer CPMG<sub>xx</sub>-Sequenz mit 24 robusten Einzelpulsen. Jeder Einzelpuls entspricht einem BB1-Puls, der robust gegenüber Pulsflächenfehlern und einer Verstimmung ist. Angewandt werden die Pulse auf den Anfangszustand  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ .



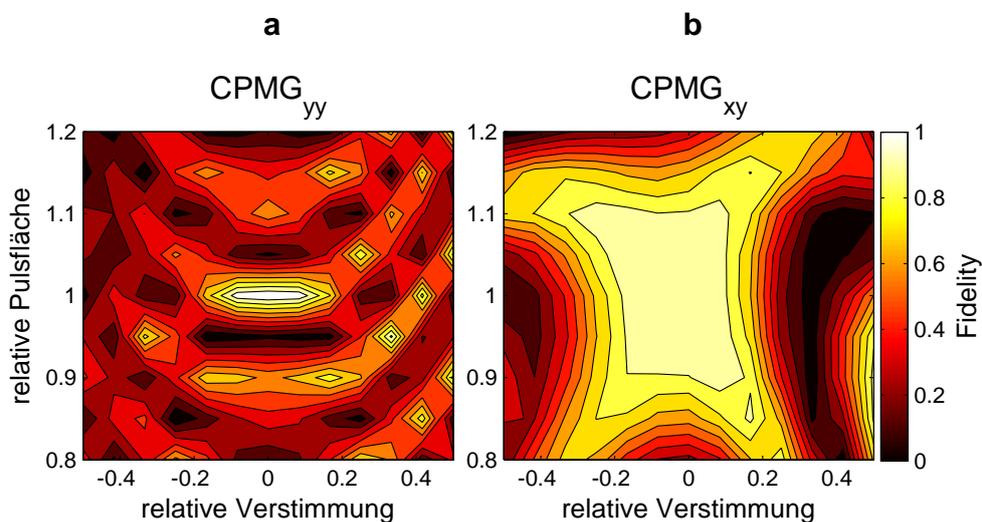
**Abbildung J.5.:** Vergleich der C-CPMG<sub>3</sub>- und der KDD-Sequenz. Die C-CPMG<sub>3</sub>-Sequenz besteht aus 84 Pulsen. Die resultierende Fidelity nach Anwendung auf den Superpositionszustand  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$  (a) zeigt ein deutliches Plateau. Die vierfache Wiederholungen der KDD-Sequenz besteht aus 80 Pulsen und die resultierende Fidelity (b) ist ebenfalls nahezu unabhängig von Pulsfehlern.

wurden weitere komplexere Pulssequenzen untersucht, die eine höhere Pulsfehlertoleranz aufweisen. Zwei dieser Sequenzen sind die CPMG-Sequenzen, bei denen die Phasenlagen der Pulse komplizierter konstruiert werden als bei der einfachen Abwechslung von zwei Phasen. In der Abbildung J.5 sind die Resultate der C-CPMG<sub>3</sub>-Sequenz mit 84

Pulsen und einer vierfachen Wiederholung der KDD-Sequenz mit 80 Pulsen<sup>1</sup> dargestellt (siehe Abschnitt 7.1.4). Beide Sequenzen sind sehr tolerant gegenüber Pulsfehlern, was umso deutlicher wird, wenn man die Fidelityplots mit denen für die  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz mit 24 oder 84 Pulsen aus der Abbildung J.2 vergleicht. Somit zeigen die C-CPMG- und die KDD-Sequenz eine überragende Pulsfehlertoleranz.

Die KDD-Sequenz erlaubt die Konstruktion von Sequenzen mit Pulsanzahlen von beliebigen Vielfachen von 20 (siehe Abschnitt 7.1.4) und ist aus diesem Grund etwas flexibler als die C-CPMG-Sequenzen.

### J.1.5. Bedingte Zwei-Qubit-Dynamik

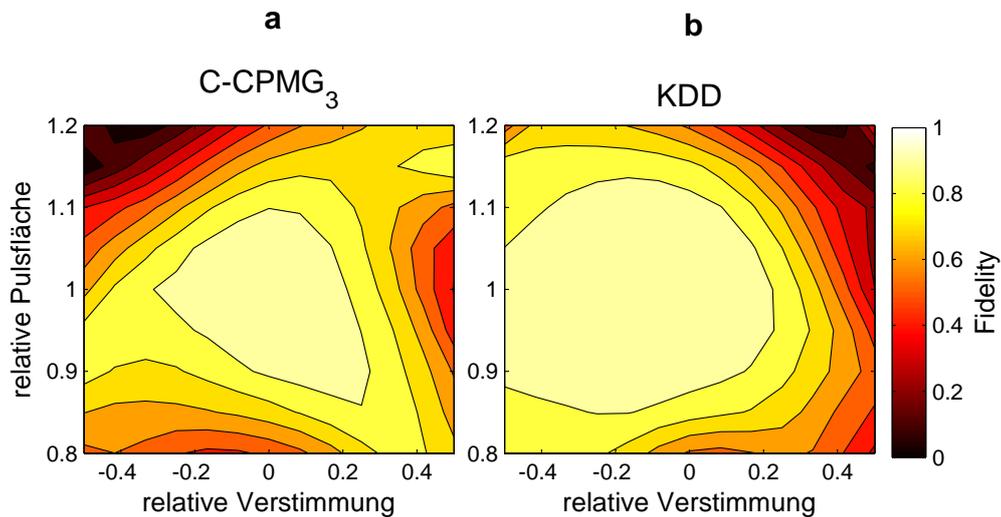


**Abbildung J.6.:** Darstellung der Zwei-Qubit-Zustandsfidelity für die Anwendung einer  $\text{CPMG}_{yy}$ - (a) bzw.  $\text{CPMG}_{xy}$ -Sequenz (b) mit jeweils 24 dynamischen Entkopplungspulsen zur Stabilisierung eines CNOT-Gatters. Der Anfangszustand ist der Zwei-Qubit-Zustand  $|10\rangle$  und der ideale Endzustand ist  $|11\rangle$ , wobei das erste Qubit das Kontroll-Qubit und das zweite Qubit das Ziel-Qubit ist.

Neben dem Speichern eines Quantenzustands wurden im Rahmen dieser Arbeit zeitgleich mit Arbeiten in anderen Forschergruppen [147; 148] zum ersten Mal dynamische Entkopplungspulse auch dazu verwendet, die bedingte Dynamik eines Zwei-Qubit-Systems zu stabilisieren. Auf jedem der beiden Qubits wird simultan die gleiche Sequenz angewandt. Simulationsberechnungen der Zwei-Qubit-Zustandsfidelity für die untersuch-

<sup>1</sup>Die  $\text{C-CPMG}_3$ -Sequenz besteht entsprechend ihrer Definition aus 84 Pulsen und die KDD-Sequenz kann nur zu Vielfachen von 20 Pulsen kombiniert werden.

ten CPMG<sub>yy</sub>- und CPMG<sub>xy</sub>-Sequenzen mit jeweils 24 Pulsen sind in der Abbildung J.6 dargestellt. Die CPMG<sub>yy</sub>-Sequenz, die für einen bestimmten Ein-Qubit-Zustand sehr robust war, zeigt nun eine hohe Fehleranfälligkeit. Die CPMG<sub>xy</sub>-Sequenz hingegen zeigt für die typischen Pulsfehler eine Region von hoher Fidelity.



**Abbildung J.7.:** Die Fehlertoleranz der Fidelity einer C-CPMG<sub>3</sub>- (a) bzw. KDD-Sequenz mit 80 Pulsen (b). Beide Sequenzen zeigen eine ähnliche Fehlertoleranz.

Werden die komplexeren Sequenzen C-CPMG<sub>3</sub> oder KDD verwendet, so zeigen diese eine ähnliche Fehlertoleranz. In der Abbildung J.7 sind die resultierenden Fidelity-Plots dargestellt. Die Fehlertoleranz wird hier durch die beiden  $\pi/2$ -Pulse des CNOT-Gatters begrenzt. Robuste  $\pi/2$ -Pulse könnten die Fehlertoleranz des stabilisierten Gatters noch weiter erhöhen.

## J.2. Quellcodes

In diesem Abschnitt werden exemplarisch die MATLAB-Quellcodes der im vorherigen Abschnitt präsentierten Simulationsrechnungen dargestellt.

### J.2.1. Quellcode für Ein-Qubit-Zustand

**Code J.1:** Beispielcode für die Berechnung der Fidelity der CPMG<sub>xy</sub>-Sequenz.

```
1 %=====
```

---

```

2 %evaluate the state fidelity for a CPMGxy sequence
3 %=====
4 function Fidelity=CPMGxySequence(Delta,f,n,initial_state)
5     ;
6     %Delta is the absolute pulse detuning in kHz
7     %f is the relative pulse area
8     %n is the number of dynamical decoupling pulses
9     %initial_state is the initial state in the computational
10    basis...
11    %... denoted by a normalized 1x2 array
12    %the sequence is a repetition of pi-pulses along the x-
13    and y-axis
14    Sxy=R(pi,pi/2,Delta,f)*R(pi,0,Delta,f);
15    S=Sxy^(n/2);
16    %evaluate the final state
17    final_state=S*initial_state;
18    %the initial state should be preserved
19    desired_state=initial_state;
20    %evaluate the state fidelity
21    Fidelity=sum((desired_state.*conj(final_state)))*sum((
22    final_state.*conj(desired_state)));
23
24
25 %=====
26 %the effect of a single-qubit pulse with errors
27 %=====
28 function P=R(theta,phi,Delta,f);
29 %theta is the rotation angle
30 %phi is the microwave phase
31 %Delta is the absolute detuning in kHz
32 %f is the relative pulse area
33
34 %definition of Pauli spin operators
35 sigma_x=[0 1; 1 0];
36 sigma_y=[0 -i; i 0];
37 sigma_z=[1 0 ; 0 -1];

```

```
38 ident=[1 0; 0 1];
39
40 %assume a Rabi frequency of 60 kHz
41 Omega=60e3;
42 %evaluate the resulting rotation angle through ...
43 %the generalized Rabi frequency
44 theta=f*theta*sqrt(Omega^2+Delta^2)/Omega;
45
46 %evaluate the axis of rotation defined by the detuning
47 if Delta==0
48     nperp=1;
49     nz=0;
50 else
51     nperp=Omega/sqrt(Omega^2+Delta^2);
52     nz=Delta/sqrt(Omega^2+Delta^2);
53 end;
54
55 %evaluate the matrix that describes the faulty pulse
56 P=cos(theta/2)*ident-i*sin(theta/2)*(nperp*(cos(phi)*
    sigma_x-sin(phi)*sigma_y)+nz*sigma_z);
```

## J.2.2. Quellcode für bedingte Zwei-Qubit-Dynamik

**Code J.2:** Beispielcode für die Fidelityberechnung eines mit der CPMG<sub>xy</sub>-Sequenz stabilisierten CNOT-Gatters.

```

57 %=====
58 %evaluate the state fidelity for a CPMGxy sequence
59 %while protecting a CNOT gate against dephasing
60 %=====
61 function Fidelity=CNOT2qubitsCPMGxy(Delta,f,initial_state
    );
62 %Delta is the absolute pulse detuning in kHz
63 %f is the relative pulse area
64 %n is the number of dynamical decoupling pulses
65 %initial_state is the initial state in the computational
    basis...
66 %... denoted by a normalized 1x4 array
67
68 %define the experimental parameters
69 %-----
70 %the J coupling strength in Hz
71 J=2*pi*[0 50; 50 0];
72 %the conditional evolution time in s
73 T1=5e-3;
74
75 %some definitions
76 %-----
77 %ideal representation of CNOT gate
78 CNOTideal=[1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 0 1; 0 0 1 0];
79 %identity matrix
80 ident=[1 0; 0 1];
81 %identity of the two-qubit system
82 IDENT=tensor(ident,ident);
83
84 %phases of the dynamical decoupling pulses
85 %-----
86 DDsequence=[1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
    0]*pi/2;
87
88 %construct the protected conditional evolution

```

```

89 %-----
90 tau1=T1/2/length(DDsequence);
91 E1=IDENT;
92 for l=1:length(DDsequence)
93     E1=PHI(tau1,J)*tensor(R(pi,DDsequence(l),Delta,f),R(pi,
94         DDsequence(l),Delta,f))*PHI(tau1,J)*E1;
95
96 %construct the CNOT gate
97 %-----
98 R1=tensor(ident,R(pi/2,0,Delta,f));
99 R2=tensor(ident,R(pi/2,3*pi/2,Delta,f));
100 CNOTgate=R2*E1*R1;
101
102 %evaluate the final state
103 final_state=CNOTgate*initial_state;
104
105 %normalize the final state
106 N=sum((final_state.*conj(final_state)))*sum((final_state
107     .*conj(final_state)));
108 final_state=1/N*final_state;
109
110 %evaluate the final state
111 desired_state=CNOTideal*initial_state;
112
113 %evaluate the two-qubit state fidelity
114 Fidelity=sum((desired_state.*conj(final_state)))*sum((
115     final_state.*conj(desired_state)));
116
117 %=====
118 %the effect of a single-qubit pulse with errors
119 %=====
120 function P=R(theta,phi,Delta,f);
121 %theta is the rotation angle
122 %phi is the microwave phase
123 %Delta is the absolute detuning in kHz
124 %f is the relative pulse area
125
126 %definition of Pauli spin operators

```

---

```

126 sigma_x=[0 1; 1 0];
127 sigma_y=[0 -i; i 0];
128 sigma_z=[1 0 ; 0 -1];
129 ident=[1 0; 0 1];
130
131 %assume a Rabi frequency of 60 kHz
132 Omega=60e3;
133 %evaluate the resulting rotation angle through ...
134 %the generalized Rabi frequency
135 theta=f*theta*sqrt(Omega^2+Delta^2)/Omega;
136
137 %evaluate the axis of rotation defined by the detuning
138 if Delta==0
139     nperp=1;
140     nz=0;
141 else
142     nperp=Omega/sqrt(Omega^2+Delta^2);
143     nz=Delta/sqrt(Omega^2+Delta^2);
144 end;
145
146 %evaluate the matrix that describes the fault pulse
147 P=cos(theta/2)*ident-i*sin(theta/2)*(nperp*(cos(phi)*
    sigma_x+sin(phi)*sigma_y)+nz*sigma_z);
148
149
150 %=====
151 %the effect of a coupling during the conditional
    evolution
152 %=====
153 function U=PHI(T,J);
154 sigma_z=[1 0 ; 0 -1];
155 U=expm(i*T/2*(J(1,2)*tensor(sigma_z,sigma_z)));

```

# K

## Filterfunktionen

In dem Kapitel 7 wurde der Zerfall der Kohärenz eines Qubits diskutiert.

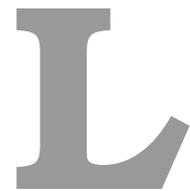
$$\chi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{S_\xi(\omega)}{\omega^2} F(\omega t) d\omega, \quad (\text{K.0.1})$$

wobei  $\chi(t)$  der zeitabhängigen Kohärenz entsprach und  $S_\xi(\omega)$  die Rauschleistungsdichte bei der Frequenz  $\omega$  beschrieb.

Eine Möglichkeit, die Qubitkohärenz vor Rauschen zu schützen, besteht in der Anwendung von Sequenzen dynamischer Entkopplungspulse. Die Wirkung dieser Pulssequenzen entspricht einer Filterfunktion. In diesem Kapitel werden die Filterfunktionen, die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Pulssequenzen zur dynamischen Entkopplung aufgelistet. Filterfunktionen für weitere Pulssequenzen und zusätzliche Diskussionen sind beispielsweise in [152] und [151] zu finden.

**Tabelle K.1.:** Filterfunktionen der verwendeten Pulssequenzen mit  $n$ -vielen Pulsen [152]. FID (free induction decay) entspricht dem Zerfall der Kohärenz ohne irgendeinen Puls. Die SE-Sequenz entspricht der Anwendung eines einzelnen Spin-Echo-Pulses und die anderen Sequenzen bezeichnen die Sequenzen, die in Abschnitt 7.1.4 beschrieben sind.

Pulssequenz	Filterfunktion $F(\omega t)$
FID	$2 \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$
SE	$8 \sin^4\left(\frac{\omega t}{4}\right)$
CPMG mit gerader Pulsanzahl	$8 \sin^4\left(\frac{\omega t}{4n}\right) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) / \cos^2\left(\frac{\omega t}{2n}\right)$
CPMG mit ungerader Pulsanzahl	$8 \sin^4\left(\frac{\omega t}{4n}\right) \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) / \cos^2\left(\frac{\omega t}{2n}\right)$
PDD mit gerader Pulsanzahl	$2 \tan^2\left(\frac{2}{2n+2}\right) \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$
PDD mit ungerader Pulsanzahl	$2 \tan^2\left(\frac{2}{2n+2}\right) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$
UDD	$\frac{1}{2} \left  \sum_{k=-n-1}^n (-1)^k \exp\left[\frac{i\omega t}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)\right] \right ^2$



## Quellcode zu Simulationen der QFT

In diesem Abschnitt werden exemplarisch die MATLAB-Quellcodes der im vorherigen Abschnitt präsentierten Simulationsrechnungen dargestellt.

**Code L.1:** Quellcode für die Simulation der QFT mit realistischen Fehlerquellen.

```
156
157
158 function output=QFT3qubitsREC_dephasing_fid(initial_state
      ,phi1,phi2,phi3,gamma_deph,detection_error);
159
160 %assume perfect pulses
161 Delta=0;
162 f=1.00;
163
164 %define the experimental parameters
165 %-----
166 %the J coupling strength in Hz
167 J=2*pi*[0 32 18; 32 0 33; 18 33 0];
168 %the conditional evolution times
169 T1=(3.69e-3);
170 T3=4.87e-3;
171 %the pulse parameters
172 A1=0.686*pi;
173 A2=0.716*pi;
```

---

```

174
175 %some definitions
176 %-----
177 %identity matrix
178 ident=[1 0; 0 1];
179 %identitiy of the three-qubit system
180 IDENT=tensor(ident,ident,ident);
181 %initial density matrix
182 rho_initial=tensor(initial_state',initial_state);
183
184
185 %evaluate the single-qubit dephasing during T1
186 %-----
187 gamma_E1_1=gamma_deph;
188 gamma_E1_2=gamma_deph;
189 gamma_E1_3=gamma_deph;
190 dec_E1_1=[1 exp(-gamma_E1_1); exp(-gamma_E1_1) 1];
191 dec_E1_2=[1 exp(-gamma_E1_2); exp(-gamma_E1_2) 1];
192 dec_E1_3=[1 exp(-gamma_E1_3); exp(-gamma_E1_3) 1];
193 %construct the 8x8 matrix that describes the decays
194 DEC_E1=tensor(dec_E1_1,dec_E1_2,dec_E1_3);
195
196 %evaluate the single-qubit dephasing during T3
197 %-----
198 gamma_E3_1=gamma_deph;
199 gamma_E3_2=gamma_deph;
200 gamma_E3_3=gamma_deph;
201 dec_E3_1=[1 exp(-gamma_E3_1); exp(-gamma_E3_1) 1];
202 dec_E3_2=[1 exp(-gamma_E3_2); exp(-gamma_E3_2) 1];
203 dec_E3_3=[1 exp(-gamma_E3_3); exp(-gamma_E3_3) 1];
204 %construct the 8x8 matrix that describes the decays
205 DEC_E3=tensor(dec_E3_1,dec_E3_2,dec_E3_3);
206
207
208 %simulate the conditional evolution with DD pulses
209 %-----
210 %during T1
211 KDD=[1/6 0 1/2 0 1/6]*pi;
212 DDsequence1=[KDD KDD+pi/2 KDD KDD+pi/2]; %KDD-20
213 tau1=T1/2/length(DDsequence1);

```

```

214 E1=IDENT;
215 for l=1:length(DDsequence1)
216 E1=PHI3(tau1,J)*tensor(R(pi,DDsequence1(l),Delta,f),R(pi,
      DDsequence1(l),Delta,f),R(pi,DDsequence1(l),Delta,f))*
      PHI3(tau1,J)*E1;
217 end;
218 %during T3
219 DDsequence3=[KDD KDD+pi/2 KDD KDD+pi/2]; %KDD-20
220 tau3=T3/2/length(DDsequence3);
221 E3=IDENT;
222 for l=1:length(DDsequence3)
223 E3=PHI2(tau3,J)*tensor(ident,R(pi,DDsequence3(l),Delta,f)
      ,R(pi,DDsequence3(l),Delta,f))*PHI2(tau3,J)*E3;
224 end;
225 %include SE pulse on qubit 1 and the appropriate z
      rotation
226 E3=tensor(R(pi,pi/2,Delta,f),ident,ident)*E3;
227 E3=tensor(R(pi,-27*pi/16+pi,Delta,f),ident,ident)*E3;
228
229 %simulate the local rotations
230 %-----
231 HR1=tensor(R(pi/2,3*pi/2,Delta,f)*R(pi,0,Delta,f),ident,
      ident);
232 R2=tensor(ident,R(pi,pi,Delta,f),ident);
233 R3=tensor(R(pi,pi,Delta,f),ident,ident);
234 R5=tensor(ident,ident,R(pi,13/16*pi+pi,Delta,f));
235 R6=tensor(ident,R(A1,3*pi/4+pi,Delta,f),ident);
236 R7=tensor(R(pi,3*pi/16+pi,Delta,f),ident,ident);
237 R8=tensor(ident,ident,R(pi/2,pi/2+pi,Delta,f));
238 R9=tensor(ident,R(A2,3*pi/4+pi,Delta,f),ident);
239
240 %construct the sequence
241 QFTgate=R9*R8*E3*R6*R2*R5*E1*HR1;
242
243
244 %simulate the experimentela errors
245 %=====
246 %simulate the dephasing of the density matrix
247 %-----
248 rho_final=HR1*rho_initial*HR1';

```

---

```

249 rho_final=E1*rho_final*E1';
250 %dephasing after T1
251 rho_final=DEC_E1.*rho_final;
252 rho_final=P*R5*rho_final*R5'*P';
253 rho_final=E3*rho_final*E3';
254 %dephasing after T3
255 rho_final=DEC_E3.*rho_final;
256 rho_final=R9*R8*rho_final*R8'*R9';
257
258 %add Ramsey rotations to measure the fidelity
259 %-----
260 if phi1==inf
261     RamseyPulse=tensor(ident,R(pi/2,phi2,0,1),R(pi/2,phi3
262         ,0,1));
263 else
264     RamseyPulse=tensor(R(pi/2,phi1,0,1),R(pi/2,phi2,0,1),
265         R(pi/2,phi3,0,1));
266 end;
267 %calculate the state after the pulses
268 rho_final=RamseyPulse*rho_final*RamseyPulse';
269
270 %include the detection and pulse errors by
271 %phenomenological formula
272 %-----
273
274 p=detection_error;
275 rho_final=(1-p)*rho_final+p*(1/8)*tensor(ident, ident,
276     ident);
277
278 %the resulting histogram
279 %-----
280 output=abs(diag(rho_final));
281
282 %=====
283 function U=PHI2(T,J);

```

```
283 %definition of Pauli spin operators
284 sigma_x=[0 1; 1 0];
285 sigma_y=[0 -i; i 0];
286 sigma_z=[1 0 ; 0 -1];
287 ident=[1 0; 0 1];
288 U=expm(i*T/2*(J(2,3)*tensor(ident,sigma_z,sigma_z)));
289
290
291
292 function U=PHI3(T,J);
293 %definition of Pauli spin operators
294 sigma_x=[0 1; 1 0];
295 sigma_y=[0 -i; i 0];
296 sigma_z=[1 0 ; 0 -1];
297 ident=[1 0; 0 1];
298 U=expm(i*T/2*(J(1,2)*tensor(sigma_z,sigma_z,ident)+J(1,3)
    *tensor(sigma_z,ident,sigma_z)+J(2,3)*tensor(ident,
    sigma_z,sigma_z)));
```

Der Quellcode für die Funktion R(theta,phi,Delta,f) findet sich im Anhang J.



## Parameter der EMCCD-Kamera

Die Parameter zur Datennamhe mit der verwendeten EMCCD-Kamera sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

<b>Parameter</b>	<b>Wert</b>
trigger mode	external
acquisition mode	kinetics
readout mode	image
exposure time	2 ms
frame transfer mode	on
vertical pixel shift speed	0,3 $\mu$ s
vertical clock voltage	+1
readout rate	17 MHz
preamplifier gain	3
EM gain	300

# Danksagung

Mein besonderer Dank gilt

- meinem Doktorvater **Prof. Dr. Christof Wunderlich** für die Ausgabe des Themas und der damit verbundenen Möglichkeit an spannender aktueller Forschung mitarbeiten zu können. Er gewährte mir stets die nötigen Freiräume, um mit Spaß an der Sache arbeiten zu können. Bei Problemen und Rückschlägen zeigte er die nötige Geduld und hatte stets ein offenes Ohr und einen guten Ratschlag.
- **Dr. Andrés Varon** und **Dr. Michael Johanning** dafür, dass sie meinen Weg zum Wissenschaftler über viele Jahre hin begleitet und unterstützt haben.
- meinen Kollegen **Dr. Anastasiya Khromova** und **Dr. Benedikt Scharfenberger** aus der Zeit, während das Experiment fertig aufgebaut und die ersten Messungen durchgeführt wurden. Darüber hinaus **Theeraphot Sriarunothai** aka Mo und **Dr. Gouri Giri**, die nun das Experiment weiterführen. **Dr. Sabine Wölk** und **Dr. Svetoslav Ivanov** gilt mein Dank für die Zusammenarbeit an unterschiedlichen Themen dieser Arbeit. Die Diskussion mit theoretischen Physikern war immer sehr spannend... für beide Seiten.
- allen, die ihre Spuren an dem Experiment durch Bachelor- und Masterarbeiten hinterlassen haben. Besonders hervorzuheben sind dabei **Patrick Barthel**, **Lukas Bogunia**, **Sodbilek Erdenebayar** aka Scott und **Felix Matuschke**.
- **Dr. Delia Kaufmann** für das Korrekturlesen der Arbeit und ihre kritischen und hilfreichen Kommentare.
- meinen Bürokollegen **Peter Kaufmann** und **Timm Gloger** für die notwendige Zerstreuung so wie den schnellen und heftigen Schlagabtausch. Es hat immer Spaß gemacht!
- **allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Quantenoptik**, die durch ihre offene Art zu einer wunderbaren Arbeitsatmosphäre beigetragen haben. Darunter ganz besonders **Gudrun Bingener**.

---

Darüber hinaus haben auch andere Menschen außerhalb der Arbeitsgruppe zum Gelingen dieser Arbeit wesentlich beigetragen. An dieser Stelle möchte ich daher **meinen Eltern** für ihre Unterstützung während des gesamten Studiums danken. Ganz besonders möchte ich mich bei meiner Frau **Kirsten** für ihre unermüdliche Geduld und ihr Interesse bedanken. Kirsten, du hast mir immer das Gefühl gegeben etwas ganz besonderes zu tun.

# Literaturverzeichnis

- [1] Stolze, J. ; Suter, D.: *Quantum Computing*. Weinheim : Wiley-VCH, 2008
- [2] Benioff, P.: Quantum mechanical Hamiltonian models of turing machines. In: *Journal of Statistical Physics* 29 (1982), S. 515
- [3] Feynman, R. P.: Simulating physics with computers. In: *International Journal of Theoretical Physics* 21 (1982), S. 467
- [4] Bernstein, E. ; Vazirani, U.: Quantum complexity theory. In: *in Proc. 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM*, 1993, S. 11
- [5] Lloyd, S.: Universal quantum simulators. In: *Science* (1996), S. 1073
- [6] Cirac, J. I. ; Zoller, P.: Goals and opportunities in quantum simulation. In: *Nature Phys.* 8 (2012), S. 264
- [7] Georgescu, I. M. ; Ashhab, S. ; Nori, Franco: Quantum simulation. In: *Rev. Mod. Phys.* 86 (2014), S. 153
- [8] Shor, P. W.: Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In: *Proc. Annu. Symp. Found. Comput. Sci.* 26 (1994), S. 124
- [9] Grover, L. K.: A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search. In: *Proceedings of the Twenty-eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1996, S. 212
- [10] Harrow, A. W. ; Hassidim, A. ; Lloyd, S.: Quantum Algorithm for Linear Systems of Equations. In: *Phys. Rev. Lett.* 103 (2009), S. 150502
- [11] Li, J. ; Peng, X. ; Du, J. ; Suter, D.: An Efficient Exact Quantum Algorithm for the Integer Square-free Decomposition Problem. In: *Scientific Reports* 2 (2012), S. 1
- [12] Wiebe, N. ; Braun, D. ; Lloyd, S.: Quantum Algorithm for Data Fitting. In: *Phys. Rev. Lett.* 109 (2012), S. 050505

- 
- [13] Bennett, C. H. ; Brassard, G.: Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, 1984, S. 175
- [14] Briegel, H.-J. ; Dür, W. ; Cirac, J. I. ; Zoller, P.: Quantum Repeaters: The Role of Imperfect Local Operations in Quantum Communication. In: *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998), S. 5932
- [15] DiVincenzo, D. P.: The Physical Implementation of Quantum Computation. In: *Fortschritte der Physik* 48 (2000), S. 771
- [16] Vandersypen, L. M. K. ; Steffen, M. ; Breyta, G. ; Yannoni, C. S. ; Sherwood, M. H. ; Chuang, I. L.: Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. In: *Nature* 414 (2001), S. 883
- [17] Nielsen, M. ; Chuang, I.: *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000
- [18] Cirac, J. I. ; Zoller, P.: Quantum Computations with Cold Trapped Ions. In: *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995), S. 4091
- [19] Blatt, R. ; Wineland, D.: Entangled states of trapped atomic ions. In: *Nature* 453 (2008), S. 1008
- [20] Blatt, R. ; Roos, C. F.: Quantum simulations with trapped ions. In: *Nature Phys.* 8 (2012), S. 277
- [21] Steane, A. M.: Error Correcting Codes in Quantum Theory. In: *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996), S. 793
- [22] Preskill, J.: Reliable quantum computers. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 454 (1998), S. 385
- [23] Knill, E.: Physics: quantum computing. In: *Nature* 463 (2010), S. 441
- [24] Mintert, F. ; Wunderlich, C.: Ion-Trap Quantum Logic Using Long-Wavelength Radiation. In: *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), S. 257904
- [25] Brown, K. R. ; Wilson, A. C. ; Colombe, Y. ; Ospelkaus, C. ; Meier, A. M. ; Knill, E. ; Leibfried, D. ; Wineland, D. J.: Single-qubit-gate error below  $10^{-4}$  in a trapped ion. In: *Phys. Rev. A* 84 (2011), S. 030303

- [26] Harty, T. P. ; Allcock, D. T. C. ; Ballance, C. J. ; Guidoni, L. ; Janacek, H. A. ; Linke, N. M. ; Stacey, D. N. ; Lucas, D. M.: High-fidelity preparation, gates, memory, and readout of a trapped-ion quantum bit. In: *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014), Nr. 22, S. 220501
- [27] Braun, A.: *Addressing single Yb<sup>+</sup> Ions: A new scheme for quantum computing in linear ion traps*, Universität Siegen, Diss., 2007
- [28] Johanning, M. ; Braun, A. ; Timoney, N. ; Elman, V. ; Neuhauser, W. ; Wunderlich, C.: Individual Addressing of Trapped Ions and Coupling of Motional and Spin States Using rf Radiation. In: *Phys. Rev. Lett.* 102 (2009), S. 073004
- [29] Khromova, A. ; Piltz, C. ; Scharfenberger, B. ; Gloger, T. F. ; Johanning, M. ; Varón, A. F. ; Wunderlich, C.: Designer Spin Pseudomolecule Implemented with Trapped Ions in a Magnetic Gradient. In: *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012), S. 220502
- [30] Scharfenberger, B. J.: *Seitenbandkühlung von gespeicherten Ytterbium-Ionen im Mikrowellenregime*, Universität Siegen, Diss., 2012
- [31] Timoney, N. ; Baumgart, I. ; Johanning, M. ; Varón, A. F. ; Plenio, M. B. ; Retzker, A. ; Wunderlich, C.: Quantum gates and memory using microwave-dressed states. In: *Nature* 476 (2011), S. 185
- [32] Randall, J. ; Weidt, S. ; Standing, E. D. ; Lake, K. ; Webster, S. C. ; Murgia, D. F. ; Navickas, T. ; Roth, K. ; Hensinger, W. K.: Efficient preparation and detection of microwave dressed-state qubits and qutrits with trapped ions. In: *Phys. Rev. A* 91 (2015), S. 012322
- [33] Lekitsch, B. ; Weidt, S. ; Fowler, A. G. ; Mølmer, K. ; Devitt, S. J. ; Wunderlich, C. ; Hensinger, W. K.: Blueprint for a microwave ion trap quantum computer. In: *Preprint* (2015), S. <https://arxiv.org/abs/1508.00420>
- [34] Vandersypen, L. M. K. ; Chuang, I. L.: NMR techniques for quantum control and computation. In: *Rev. Mod. Phys.* 76 (2005), S. 1037
- [35] Blatt, R. ; Schnatz, H. ; Werth, G.: Ultrahigh-Resolution Microwave Spectroscopy on Trapped <sup>171</sup>Yb<sup>+</sup> Ions. In: *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982), S. 1601
- [36] Olmschenk, S. ; Younge, K. C. ; Moehring, D. L. ; Matsukevich, D. N. ; Maunz, P. ; Monroe, C.: Manipulation and detection of a trapped Yb<sup>+</sup> hyperfine qubit. In: *Phys. Rev. A* 76 (2007), S. 052314

- [37] Mårtensson-Pendrill, A.-M. ; Gough, D. S. ; Hannaford, P.: Isotope shifts and hyperfine structure in the 369.4-nm  $6s - 6p_{1/2}$  resonance line of singly ionized ytterbium. In: *Phys. Rev. A* 49 (1994), S. 3351
- [38] Pinnington, E. H. ; Rieger, G. ; Kernahan, J. A.: Beam-laser measurements of the lifetimes of the  $6p$  levels in Yb II. In: *Phys. Rev. A* 56 (1997), S. 2421
- [39] Olmschenk, S. ; Hayes, D. ; Matsukevich, D. N. ; Maunz, P. ; Moehring, D. L. ; Younge, K. C. ; Monroe, C.: Measurement of the lifetime of the  $6p^2P_{1/2}^0$  level of  $\text{Yb}^+$ . In: *Phys. Rev. A* 80 (2009), S. 022502
- [40] Yu, N. ; Maleki, L.: Lifetime measurements of the  $4f^{14}5d$  metastable states in single ytterbium ions. In: *Phys. Rev. A* 61 (2000), S. 022507
- [41] Berends, R. W. ; Pinnington, E. H. ; Guo, B. ; Ji, Q.: Beam-laser lifetime measurements for four resonance levels of Yb II. In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 26 (1993), S. L701
- [42] Biémont, E. ; Dutrieux, J.-F. ; Martin, I. ; Quinet, P.: Lifetime calculations in Yb II. In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 31 (1998), S. 3321
- [43] Timoney, N. P.: *Robust rotations & coherent quantum states with a single trapped ion*, Universität Siegen, Diss., 2010
- [44] Lehmitz, H. ; Hattendorf-Ledwoch, J. ; Blatt, R. ; Harde, H.: Population trapping in excited Yb ions. In: *Phys. Rev. Lett.* 62 (1989), S. 2108
- [45] Schauer, M. M. ; Danielson, J. R. ; Nguyen, A.-T. ; Wang, L.-B. ; Zhao, X. ; Torgerson, J. R.: Collisional population transfer in trapped  $\text{Yb}^+$  ions. In: *Phys. Rev. A* 79 (2009), S. 062705
- [46] Hosaka, K. ; Webster, S. A. ; Blythe, P. J. ; Stannard, A. ; Beaton, D. ; Margolis, H. S. ; Lea, S. N. ; Gill, P.: An optical frequency standard based on the electric octupole transition in  $^{171}\text{Yb}^+$ . In: *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on* 54 (2005), S. 759
- [47] Pierce, J. R.: *Theory and Design of Electron Beams*. 2. Auflage. Princeton : van Nostrand, 1954
- [48] Paul, W. ; Osberghaus, O. ; Fischer, E.: *Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen*. Köln, Opladen : Westdeutscher Verlag, 1958

- [49] Dehmelt, H. G. ; Major, F. G.: Orientation of  $(\text{He}^4)^+$  Ions by Exchange Collisions with Cesium Atoms. In: *Phys. Rev. Lett.* 8 (1962), S. 213
- [50] Major, F. G. ; Werth, G.: High-Resolution Magnetic Hyperfine Resonance in Harmonically Bound Ground-State  $^{199}\text{Hg}$  Ions. In: *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973), S. 1155
- [51] Neuhauser, W. ; Hohenstatt, M. ; Toschek, P. E. ; Dehmelt, H.: Localized visible  $\text{Ba}^+$  mono-ion oscillator. In: *Phys. Rev. A* 22 (1980), S. 1137
- [52] Diedrich, F. ; Bergquist, J. C. ; Itano, W. M. ; Wineland, D. J.: Laser Cooling to the Zero-Point Energy of Motion. In: *Phys. Rev. Lett.* 62 (1989), S. 403
- [53] Monroe, C. ; Meekhof, D. M. ; King, B. E. ; Itano, W. M. ; Wineland, D. J.: Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate. In: *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995), S. 4714
- [54] Johanning, M. ; Varón, A. F. ; Wunderlich, C.: Quantum simulations with cold trapped ions. In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 42 (2009), S. 154009
- [55] Gulde, S. T.: *Experimental Realization of Quantum Gates and the Deutsch-Jozsa Algorithm with Trapped  $^{40}\text{Ca}^+$  Ions*, Universität Innsbruck, Diss., 2000
- [56] Khromova, A.: *Quantum Gates with Trapped Ions using Magnetic Gradient Induced Coupling*, Universität Siegen, Diss., 2012
- [57] Wunderlich, C.: *Conditional Spin Resonance with Trapped Ions. In: Laser Physics at the Limits*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002
- [58] Balzer, C. ; Braun, A. ; Hannemann, T. ; Paape, C. ; Ettl, M. ; Neuhauser, W. ; Wunderlich, C.: Electrodynamically trapped  $\text{Yb}^+$  ions for quantum information processing. In: *Phys. Rev. A* 73 (2006), S. 041407
- [59] Major, F. G. ; Gheorghie, V. N. ; Werth, G.: *Charged particle traps*. Berlin : Springer, 2005
- [60] Ghosh, P. K.: *Ion Traps*. Oxford, New York : Oxford University Press, 1995
- [61] Steane, A.: The ion trap quantum information processor. In: *Applied Physics B* 64 (1997), S. 623
- [62] James, D. F. V.: Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation. In: *Applied Physics B: Lasers and Optics* 66 (1998), S. 181

- 
- [63] Mayer-Kuckuk, T.: *Atomphysik*. Stuttgart : Teubner, 1977
- [64] Wunderlich, C. ; Balzer, C.: Quantum measurements and new concepts for experiments with trapped ions. In: *Advances in Atomic Molecular, and Optical Physics* 49 (2003), S. 293
- [65] Wunderlich, C. ; Morigi, G. ; Reiß, D.: Simultaneous cooling of axial vibrational modes in a linear ion trap. In: *Phys. Rev. A* 72 (2005), S. 023421
- [66] Erdenebayar, S.: *Microwave Sideband Cooling of Trapped Ytterbium Ions in a Linear Paul Trap*, Universität Siegen, Master-Arbeit, 2016
- [67] Ernst, R. R. ; Bodenhausen, G. ; Wokaun, A.: *Principles of Nuclear Magnetic Resonance in One and Two Dimensions*. Oxford : Oxford University Press, 1987
- [68] Freeman, R.: *Spin Choreography*. Oxford : Spektrum, 1997
- [69] Manual: *Versatile 150 MHz Frequency Generator*. TOPTICA Photonics AG: Gräfelfing, 2010
- [70] Piltz, C. ; Scharfenberger, B. ; Khromova, A. ; Varón, A. F. ; Wunderlich, C.: Protecting Conditional Quantum Gates by Robust Dynamical Decoupling. In: *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013), S. 200501
- [71] Schindler, P. ; Nigg, D. ; Monz, T. ; Barreiro, J. T. ; Martinez, E. ; Wang, S. X. ; Quint, S. ; Brandl, M. F. ; Nebendahl, V. ; Roos, C. F. u. a.: A quantum information processor with trapped ions. In: *New Journal of Physics* 15 (2013), S. 123012
- [72] Demtröder, W.: *Laserspektroskopie*. 4. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2000
- [73] Reuner, J.: *Aufbau frequenzstabilisierter Diodenlasersysteme mit Emissionswellenlängen bei 399 nm, 638 nm und 935 nm*, Universität Siegen, Master-Arbeit, 2009
- [74] Kielpinski, D. ; Cetina, M. ; Cox, J. A. ; Kärtner, F. X.: Laser cooling of trapped ytterbium ions with an ultraviolet diode laser. In: *Opt. Lett.* 31 (2006), Nr. 6, S. 757
- [75] Kaufmann, P., persönliche Mitteilung, 2010
- [76] Piltz, C.: *Aufbau von Laserlichtquellen und Optik zur Speicherung und Kühlung von Ytterbium<sup>+</sup>-Ionen*, Universität Siegen, Master-Arbeit, 2010

- [77] Liu, Jia-Ming: *Photonic Devices*. Cambridge : Cambridge University Press, 2005
- [78] Weiss, C.: *Simulation und Erzeugung elektromagnetischer Impulse zur Quantenzustandsmanipulation*, Universität Siegen, Diplomarbeit, 2007
- [79] Schneider, C.: *Entwicklung eines Objektivs hoher numerischer Apertur zum Nachweis der Resonanzfluoreszenz einzelner gespeicherter Ionen*, Universität Siegen, Master-Arbeit, 2007
- [80] Bogunia, L.: *Streulichtunterdrückung zur Detektion von Resonanzfluoreszenz gespeicherter Ionen*, Universität Siegen, Bachelor-Arbeit, 2012
- [81] Sankari, M. ; Suryanarayana, M. V.: Studies on the isotope selective photoionization of the low-abundant  $^{168}\text{Yb}$  isotope. In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 31 (1998), S. 261
- [82] Johanning, M. ; Braun, A. ; Eiteneuer, D. ; Paape, C. ; Balzer, C. ; Neuhauser, W. ; Wunderlich, C.: Resonance-enhanced isotope-selective photoionization of YbI for ion trap loading. In: *Applied Physics B* 103 (2011), S. 327
- [83] Baumgart, I.: *Optimierte Präparation eines  $^{171}\text{Yb}^+$ -Ions in den Zustand  $^2\text{S}_{1/2}, F = 0$* , Universität Siegen, Diplomarbeit, 2008
- [84] Stenholm, S.: The semiclassical theory of laser cooling. In: *Rev. Mod. Phys.* 58 (1986), S. 699
- [85] Larson, D. J. ; Bergquist, J. C. ; Bollinger, J. J. ; Itano, W. M. ; Wineland, D. J.: Sympathetic cooling of trapped ions: A laser-cooled two-species nonneutral ion plasma. In: *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986), S. 70
- [86] Myerson, A. H. ; Szwer, D. J. ; Webster, S. C. ; Allcock, D. T. C. ; Curtis, M. J. ; Imreh, G. ; Sherman, J. A. ; Stacey, D. N. ; Steane, A. M. ; Lucas, D. M.: High-Fidelity Readout of Trapped-Ion Qubits. In: *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008), S. 200502
- [87] Manual: *iXon Ultra*. LOT-Oriel: Andor Technology, 2012
- [88] Rabi, I. I.: Space Quantization in a Gyating Magnetic Field. In: *Phys. Rev.* 51 (1937), S. 652
- [89] Knill, E. ; Leibfried, D. ; Reichle, R. ; Britton, J. ; Blakestad, R. B. ; Jost, J. D. ; Langer, C. ; Ozeri, R. ; Seidelin, S. ; Wineland, D. J.: Randomized benchmarking of quantum gates. In: *Phys. Rev. A* 77 (2008), S. 012307

- 
- [90] Ramsey, N. F.: A Molecular Beam Resonance Method with Separated Oscillating Fields. In: *Phys. Rev.* 78 (1950), S. 695
- [91] Jozsa, R.: Fidelity for Mixed Quantum States. In: *Journal of Modern Optics* 41 (1994), Nr. 12, S. 2315
- [92] Nolting, W.: *Grundkurs Theoretische Physik, Band 5 Quantenmechanik, Teil 2 Methoden und Anwendungen*. 3. Auflage. Braunschweig, Wiesbaden : vieweg, 1993
- [93] Sackett, C. A. ; Kielpinski, D. ; King, B. E. ; Langer, C. ; Meyer, V. ; Myatt, C. J. ; Rowe, M. ; Turchette, Q. A. ; Itano, W. M. ; Wineland, D. J.: Experimental entanglement of four particles. In: *Nature* 404 (2000), S. 256
- [94] Kotler, S. ; Akerman, N. ; Glickman, Y. ; Keselman, A. ; Ozeri, R.: Single-ion quantum lock-in amplifier. In: *Nature* 473 (2011), Nr. 7345, S. 61
- [95] Wölk, S. ; Piltz, C. ; Sriarunothai, T. ; Wunderlich, C.: State selective detection of hyperfine qubits. In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 48 (2015), S. 075101
- [96] Ejtemaee, S. ; Thomas, R. ; Haljan, P. C.: Optimization of Yb<sup>+</sup> fluorescence and hyperfine-qubit detection. In: *Phys. Rev. A* 82 (2010), S. 063419
- [97] Berkeland, D. J. ; Boshier, M. G.: Destabilization of dark states and optical spectroscopy in Zeeman-degenerate atomic systems. In: *Phys. Rev. A* 65 (2002), S. 033413
- [98] Barthel, P.: *Zeitaufgelöste Detektion eines Ytterbium - Qubits*, Universität Siegen, Bachelor-Arbeit, 2013
- [99] Wunderlich, C. ; Hannemann, T. ; Körber, T. ; Häffner, H. ; Roos, C. ; Hänsel, W. ; Blatt, R. ; Schmidt-Kahler, F.: Robust state preparation of a single trapped ion by adiabatic passage. In: *Journal of Modern Optics* 54 (2007), S. 1541
- [100] Wölk, S., persönliche Mitteilung, 2014
- [101] Noek, R. ; Vrijsen, G. ; Gaultney, D. ; Mount, E. ; Kim, T. ; Maunz, P. ; Kim, J.: High speed, high fidelity detection of an atomic hyperfine qubit. In: *Opt. Lett.* 38 (2013), S. 4735
- [102] Warring, U. ; Ospelkaus, C. ; Colombe, Y. ; Jördens, R. ; Leibfried, D. ; Wineland, D. J.: Individual-Ion Addressing with Microwave Field Gradients. In: *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013), S. 173002

- [103] Turchette, Q. A. ; Wood, C. S. ; King, B. E. ; Myatt, C. J. ; Leibfried, D. ; Itano, W. M. ; Monroe, C. ; Wineland, D. J.: Deterministic Entanglement of Two Trapped Ions. In: *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998), S. 3631
- [104] Nägerl, H. C. ; Leibfried, D. ; Rohde, H. ; Thalhammer, G. ; Eschner, J. ; Schmidt-Kaler, F. ; Blatt, R.: Laser addressing of individual ions in a linear ion trap. In: *Phys. Rev. A* 60 (1999), S. 145
- [105] Shen, C. ; Gong, Z.-X. ; Duan, L.-M.: Individual addressing in quantum computation through spatial refocusing. In: *Phys. Rev. A* 88 (2013), S. 052325
- [106] Wang, S. X. ; Labaziewicz, J. ; Ge, Y. ; Shewmon, R. ; Chuang, I. L.: Individual addressing of ions using magnetic field gradients in a surface-electrode ion trap. In: *Applied Physics Letters* 94 (2009), S. 094103
- [107] Schrader, D. ; Dotsenko, I. ; Khudaverdyan, M. ; Miroshnychenko, Y. ; Rauschenbeutel, A. ; Meschede, D.: Neutral Atom Quantum Register. In: *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004), S. 150501
- [108] Staantum, P. ; Drewsen, M.: Trapped-ion quantum logic utilizing position-dependent ac Stark shifts. In: *Phys. Rev. A* 66 (2002), S. 040302
- [109] Haljan, P. C. ; Lee, P. J. ; Brickman, K-A. ; Acton, M. ; Deslauriers, L. ; Monroe, C.: Entanglement of trapped-ion clock states. In: *Phys. Rev. A* 72 (2005), S. 062316
- [110] Navon, N. ; Kotler, S. ; Akerman, N. ; Glickman, Y. ; Almog, I. ; Ozeri, R.: Addressing Two-Level Systems Variably Coupled to an Oscillating Field. In: *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013), S. 073001
- [111] Lee, J. H. ; Montano, E. ; Deutsch, I. H. ; Jessen, P. S.: Robust site-resolvable quantum gates in an optical lattice via inhomogeneous control. In: *Nat. Commun.* 4 (2013)
- [112] Piltz, C. ; Sriarunothai, T. ; Varón, A. F. ; Wunderlich, C.: A trapped-ion-based quantum byte with  $10^{-5}$  next-neighbour cross-talk. In: *Nat. Commun.* 5 (2014), S. 4679
- [113] Crain, S. ; Mount, E. ; Baek, S. ; Kim, J.: Individual addressing of trapped  $^{171}\text{Yb}^+$  ion qubits using a microelectromechanical systems-based beam steering system. In: *Applied Physics Letters* 105 (2014), S. 181115
- [114] Jackson, J. D.: *Klassische Elektrodynamik*. 2. Auflage. Berlin, New York : Werner de Gruyter, 1983

- 
- [115] Gambetta, J. M. ; Córcoles, A. D. ; Merkel, S. T. ; Johnson, B. R. ; Smolin, J. A. ; Chow, J. M. ; Ryan, C. A. ; Rigetti, C. ; Poletto, S. ; Ohki, T. A. ; Ketchen, M. B. ; Steffen, M.: Characterization of Addressability by Simultaneous Randomized Benchmarking. In: *Phys. Rev. Lett.* 109 (2012), S. 240504
- [116] Mc Hugh, D. ; Twamley, J.: Quantum computer using a trapped-ion spin molecule and microwave radiation. In: *Phys. Rev. A* 71 (2005), S. 012315
- [117] Lin, G.-D. ; Zhu, S.-L. ; Islam, R. ; Kim, K. ; Chang, M.-S. ; Korenblit, S. ; Monroe, C. ; Duan, L.-M.: Large-scale quantum computation in an anharmonic linear ion trap. In: *EPL (Europhysics Letters)* 86 (2009), S. 60004
- [118] Hughes, M. D. ; Lekitsch, B. ; Broersma, J. A. ; Hensinger, W. K.: Microfabricated ion traps. In: *Contemporary Physics* 52 (2011), S. 505
- [119] Welzel, J ; Bautista-Salvador, A ; Abarbanel, C ; Wineman-Fisher, V ; Wunderlich, Ch ; Folman, R ; Schmidt-Kaler, F: Designing spin-spin interactions with one and two dimensional ion crystals in planar micro traps. In: *The European Physical Journal D* 65 (2011), Nr. 1-2, S. 285–297
- [120] Wilpers, G. ; See, P. ; Gill, P. ; Sinclair, A. G.: A monolithic array of three-dimensional ion traps fabricated with conventional semiconductor technology. In: *Nature nanotechnology* 7 (2012), S. 572
- [121] Kaufmann, D. ; Collath, T. ; Baig, M. T. ; Kaufmann, P. ; Asenwar, E. ; Johanning, M. ; Wunderlich, C.: Thick-film technology for ultra high vacuum interfaces of micro-structured traps. In: *Applied Physics B* 107 (2012), S. 935
- [122] Kunert, P. J. ; Georgen, D. ; Bogunia, L. ; Baig, M. T. ; Baggash, M. A. ; Johanning, M. ; Wunderlich, C.: A planar ion trap chip with integrated structures for an adjustable magnetic field gradient. In: *Applied Physics B* 114 (2014), S. 27
- [123] Emsley, L. ; Bodenhausen, G.: Phase shifts induced by transient Bloch-Siegert effects in NMR. In: *Chemical Physics Letters* 168 (1990), S. 297
- [124] Roos, I. ; Mølmer, K.: Quantum computing with an inhomogeneously broadened ensemble of ions: Suppression of errors from detuning variations by specially adapted pulses and coherent population trapping. In: *Phys. Rev. A* 69 (2004), S. 022321
- [125] Craik, D. P. L. A. ; Linke, N. M. ; Harty, T. P. ; Ballance, C. J. ; Lucas, D. M. ; Steane, A. M. ; Allcock, D. T. C.: Microwave control electrodes for scalable, parallel, single-qubit operations in a surface-electrode ion trap. In: *Applied Physics B* 114 (2014), S. 3

- [126] Leung, D. W. ; Chuang, I. L. ; Yamaguchi, F. ; Yamamoto, Y.: Efficient implementation of coupled logic gates for quantum computation. In: *Phys. Rev. A* 61 (2000), S. 042310
- [127] Cummins, H. K. ; Llewellyn, G. ; Jones, J. A.: Tackling systematic errors in quantum logic gates with composite rotations. In: *Phys. Rev. A* 67 (2003), S. 042308
- [128] Timoney, N. ; Elman, V. ; Glaser, S. ; Weiss, C. ; Johanning, M. ; Neuhauser, W. ; Wunderlich, C.: Error-resistant single-qubit gates with trapped ions. In: *Phys. Rev. A* 77 (2008), S. 052334
- [129] Barenco, A. ; Bennett, C. H. ; Cleve, R. ; DiVincenzo, D. P. ; Margolus, N. ; Shor, P. ; Sleator, T. ; Smolin, J. A. ; Weinfurter, H.: Elementary gates for quantum computation. In: *Phys. Rev. A* 52 (1995), S. 3457
- [130] Biercuk, M. ; Uys, H. ; VanDenvender, A. P. ; Shiga, N. ; Itano, W. M. ; Bollinger, J. J.: Optimized dynamical decoupling in a model quantum memory. In: *Nature* 458 (2009), S. 996
- [131] Szwer, D. J. ; Webster, S. C. ; Steane, A. M. ; M., Lucas D.: Keeping a single qubit alive by experimental dynamic decoupling. In: *Applied Physics B* 44 (2011), S. 025501
- [132] Hahn, E. L.: Spin Echoes. In: *Phys. Rev.* 80 (1950), S. 580
- [133] Carr, H. Y. ; Purcell, E. M.: Effects of Diffusion on Free Precession in Nuclear Magnetic Resonance Experiments. In: *Phys. Rev.* 94 (1954), S. 630
- [134] Meiboom, S. ; Gill, D.: Modified Spin Echo Method for Measuring Nuclear Relaxation Times. In: *Review of Scientific Instruments* 29 (1958), S. 688
- [135] Viola, L. ; Lloyd, S.: Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems. In: *Phys. Rev. A* 58 (1998), S. 2733
- [136] Uhrig, G. S.: Keeping a Quantum Bit Alive by Optimized  $\pi$ -Pulse Sequences. In: *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), S. 100504
- [137] Khodjasteh, K. ; Lidar, D. A.: Fault-Tolerant Quantum Dynamical Decoupling. In: *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005), S. 180501
- [138] West, J. R. ; Lidar, D. I. A. ; Fong, B. H. ; Gyure, M. F.: High Fidelity Quantum Gates via Dynamical Decoupling. In: *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), S. 230503

- 
- [139] Du, J. ; Rong, X. ; Zhao, N. ; Wang, Y. ; Liu, R. B.: Preserving electron spin coherence in solids by optimal dynamical decoupling. In: *Nature* 461 (2009), S. 1265
- [140] Souza, A. M. ; Álvarez, G. A. ; Suter, D.: Robust Dynamical Decoupling for Quantum Computing and Quantum Memory. In: *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011), S. 240501
- [141] Peng, X. ; Suter, D. ; Lidar, D. A.: High fidelity quantum memory via dynamical decoupling: theory and experiment. In: *Applied Physics B* 44 (2011), S. 154003
- [142] Ryan, C. A. ; Hodges, J. S. ; Cory, D. G.: Robust Decoupling Techniques to Extend Quantum Coherence in Diamond. In: *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), S. 200402
- [143] Lange, G. de ; Wang, Z. H. ; Riste, D. ; Dobrovitski, V. V. ; Hanson, R.: Universal Dynamical Decoupling of a Single Solid-State Spin from a Spin Bath. In: *Science* 330 (2010), S. 60
- [144] Wang, Y. ; Rong, X. ; Feng, P. ; Xu, W. ; Chong, B. ; Su, J.-H. ; Gong, J. ; Du, J.: Preservation of Bipartite Pseudoentanglement in Solids Using Dynamical Decoupling. In: *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011), S. 040501
- [145] Gustavsson, S. ; Yan, F. ; Bylander, J. ; Yoshihara, F. ; Nakamura, Y. ; Orlando, T. P. ; Oliver, W. D.: Dynamical Decoupling and Dephasing in Interacting Two-Level Systems. In: *Phys. Rev. Lett.* 109 (2012), S. 010502
- [146] Souza, A. M. ; Álvarez, G. A. ; Suter, D.: Experimental protection of quantum gates against decoherence and control errors. In: *Phys. Rev. A* 86 (2012), S. 050301
- [147] Sar, T. van d. ; Wang, Z. H. ; Blok, M. S. ; Bernien, H. ; Taminiiau, T. H. ; Toyli, D. M. ; Lidar, D. A. ; Awschalom, D. D. ; Hanson, R. ; Dobrovitski, V. V.: Decoherence-protected quantum gates for a hybrid solid-state spin register. In: *Nature* 484 (2012), S. 82
- [148] Shulman, M. D. ; Dial, O. E. ; Harvey, S. P. ; Bluhm, H. ; Umansky, V. ; Yacoby, A.: Demonstration of Entanglement of Electrostatically Coupled Singlet-Triplet Qubits. In: *Science* 336 (2012), Nr. 6078, S. 202
- [149] Bernád, J. Z. ; Frydrych, H.: Effects of stochastic noise on dynamical decoupling procedures. In: *Phys. Rev. A* 89 (2014), S. 062327

- [150] Piltz, C. ; Sriarunothai, T. ; Ivanov, S. S. ; Wölk, S. ; Wunderlich, C.: Versatile microwave-driven trapped ion spin system for quantum information processing. In: *Science Advances* 2 (2016), S. e1600093
- [151] Biercuk, M. ; Doherty, A. C. ; Uys, H.: Dynamical decoupling sequence construction as a filter-design problem. In: *Applied Physics B* 44 (2011), S. 154002
- [152] Cywiński, Ł. ; Lutchnyn, R. M. ; Nave, C. P. ; Das Sarma, S.: How to enhance dephasing time in superconducting qubits. In: *Phys. Rev. B* 77 (2008), S. 174509
- [153]
- [154] Yuge, T. ; Sasaki, S. ; Hirayama, Y.: Measurement of the Noise Spectrum Using a Multiple-Pulse Sequence. In: *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011), S. 170504
- [155] Álvarez, G. A. ; Suter, D.: Measuring the Spectrum of Colored Noise by Dynamical Decoupling. In: *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011), S. 230501
- [156] Medford, J. ; Cywiński, Ł. ; Barthel, C. ; Marcus, C. M. ; Hanson, M. P. ; Gossard, A. C.: Scaling of Dynamical Decoupling for Spin Qubits. In: *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012), S. 086802
- [157] Schmidt-Kaler, F. ; Häffner, H. ; Gulde, S. ; Riebe, M. ; Lancaster, G.P.T. ; Deuschle, T. ; Becher, C. ; Hänsel, W. ; Eschner, J. ; Roos, C.F. ; Blatt, R.: How to realize a universal quantum gate with trapped ions. In: *Applied Physics B* 77 (2003), S. 789
- [158] Kobzar, K. ; Skinner, T. E. ; Khaneja, N. ; Glaser, S. J. ; Luy, B.: Exploring the limits of broadband excitation and inversion: II. Rf-power optimized pulses. In: *Journal of Magnetic Resonance* 194 (2008), S. 58
- [159] Porras, D. ; Cirac, J. I.: Quantum simulations with cold trapped ions. In: *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004), S. 207901
- [160] Friedenauer, A. ; Schmitz, H. ; Glueckert, J. T. ; Porras, D. ; Schaetz, T.: Simulating a quantum magnet with trapped ions. In: *Nature Phys.* 4 (2008), S. 757
- [161] Kim, K. ; Chang, M. S. ; Korenblit, S. ; Islam, R. ; Edwards, E. E. ; Freericks, J. K. ; Lin, G. D. ; L. M. Duan, and C. M.: Quantum simulation of frustrated Ising spins with trapped. In: *Nature* 465 (2010), S. 590

- 
- [162] Richerme, P. ; Gong, Z.-X. ; Lee, A. ; Senko, C. ; Smith, J. ; Foss-Feig, M. ; Michalakis, S. ; Gorshko, A. V. ; Monroe, Ch.: Non-local propagation of correlations in quantum systems with long-range interactions. In: *Nature* 511 (2014), S. 198
- [163] Jurcevic, P. ; Lanyon, B. P. ; Hauke, P. ; Hempel, C. ; Zoller, P. ; Blatt, R. ; Roos, C. F.: Quasiparticle engineering and entanglement propagation in a quantum many-body system. In: *Nature* 511 (2014), S. 202
- [164] Wilson, A. C. ; Colombe, Y. ; Brown, K. R. ; Knill, E. ; Leibfried, D. ; Wineland, D. J.: Tunable spin-spin interactions and entanglement of ions in separate potential wells. In: *Nature* 512 (2014), S. 57
- [165] Chiaverini, J. ; Lybarger, W. E.: Laserless trapped-ion quantum simulations without spontaneous scattering using microtrap arrays. In: *Phys. Rev. A* 77 (2008), S. 022324
- [166] Ospelkaus, C. ; Langer, C. E. ; Amini, J. M. ; Brown, K. R. ; Leibfried, D. ; Wineland, D. J.: Trapped-ion quantum logic gates based on oscillating magnetic fields. In: *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008), S. 090502
- [167] Korenblit, S. ; Kafri, D. ; Campbell, W. C. ; Islam, R. ; Edwards, E. E. ; Gong, Z.-X. ; Lin, G.-D. ; Duan, L.-M. ; Kim, J. ; Kim, K. ; Monroe, C.: Quantum simulation of spin models on an arbitrary lattice with trapped ions. In: *New Journal of Physics* 14 (2012), S. 095024
- [168] Ospelkaus, C. ; Warring, U. ; Colombe, Y. ; Brown, K. R. ; Amini, J. M. ; Leibfried, D. ; J. Wineland, D.: Microwave quantum logic gates for trapped ions. In: *Nature* 476 (2011), S. 181
- [169] Webster, S. C. ; Weidt, S. ; Lake, K. ; McLoughlin, J. J. ; Hensinger, W. K.: Simple Manipulation of a Microwave Dressed-State Ion Qubit. In: *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013), S. 140501
- [170] Jozsa, R.: Quantum algorithms and the Fourier transform. In: *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 454 (1998), S. 323
- [171] Bowden, C. M. ; Chen, G. ; Diao, Z. ; Klappenecker, A.: An Efficient Exact Quantum Algorithm for the Integer Square-free Decomposition Problem. In: *J. Math. Anal. Appl.* 274 (2002), S. 69
- [172] Deutsch, D.: Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 400 (1985), Nr. 1818, S. 97

- [173] Jordan, S. P.: Fast Quantum Algorithm for Numerical Gradient Estimation. In: *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005), S. 050501
- [174] Szkopek, T. ; Roychowdhury, V. ; Yablonoitch, E. ; Abrams, D. S.: Eigenvalue estimation of differential operators with a quantum algorithm. In: *Phys. Rev. A* 72 (2005), S. 062318
- [175] Childs, A. M. ; Dam, W. van: Quantum algorithms for algebraic problems. In: *Rev. Mod. Phys.* 82 (2010), S. 1
- [176] S.Weinstein, Y. ; Pravia, M. A. ; Fortunato, E. M. ; Lloyd, S. ; Cory, D. G.: Implementation of the Quantum Fourier Transform. In: *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001), S. 1889
- [177] Chiaverini, J. ; Britton, J. ; Leibfried, D. ; Knill, E. ; Barrett, M. D. ; Blakestad, R. B. ; Itano, W. M. ; Jost, J. D. ; Langer, C. ; R. Ozeri, T. Schaeetz ; Wineland, D. J.: Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. In: *Science* 308 (2005), S. 997
- [178] Coppersmith, D.: An Approximate Fourier Transform Useful in Quantum Factoring. In: *IBM Research Report* 19642 (1994)
- [179] Dorai, K. ; Suter, D.: Efficient Implementation of the Quantum Fourier Transform: An Experimental Perspective. In: *Int. J. Quant. Inf.* 3 (2005), S. 413
- [180] Jones, M. D. Bowdreyand J. A.: Compiling gate networks on an Ising quantum computer. In: *Phys. Rev. A* 72 (2005), S. 032315
- [181] Schulte-Herbrüggen, T. ; Spörl, A. ; Khaneja, N. ; Glaser, S. J.: Optimal control-based efficient synthesis of building blocks of quantum algorithms: A perspective from network complexity towards time complexity. In: *Phys. Rev. A* 72 (2005), S. 042331
- [182] Fisher, R. ; Helmer, F. ; Glaser, S. J. ; Marquardt, F. ; Schulte-Herbrüggen, T.: Optimal control of circuit quantum electrodynamics in one and two dimensions. In: *Phys. Rev. B* 81 (2010), S. 085328
- [183] Ivanov, S. S. ; Johanning, M. ; Wunderlich, Ch.: Simplified implementation of the quantum Fourier transform with Ising-type Hamiltonians: Example with ion traps. In: *Preprint* (2015), S. <http://arxiv.org/abs/1503.08806>
- [184] Fuchs, C. A.: Distinguishability and Accessible Information in Quantum Theory. In: *Preprint* (1996), S. <http://arxiv.org/abs/9601020>

- [185] Mahnke, R. ; Kaupuzs, J. ; Lubashevsky, I.: *Physics of stochastic processes: how randomness acts in time*. New York : John Wiley & Sons, 2009

# Lebenslauf

## **Persönliche Daten**

Name Christian Marcus Piltz  
Geburtsdatum 02.06.1982  
Email piltz@physik.uni-siegen.de

## **Schulbildung**

1989 - 1993 Friedrich-Flender Grundschule, Siegen  
1993 - 2002 Fürst-Johann-Moritz Gymnasium, Siegen

## **Zivildienst**

08/2002 - 05/2003 Diakonie Siegen

## **Studium**

10/2003 - 07/2006 Bachelor of Science in Physics, Universität Siegen  
10/2006 - 02/2010 Master of Science in Physics, Universität Siegen

## **Promotion**

02/2010 - heute Promotium am Lehrstuhl für experimentelle Quantenoptik,  
Universität Siegen