

Quantenmechanik in einer Paul-Falle

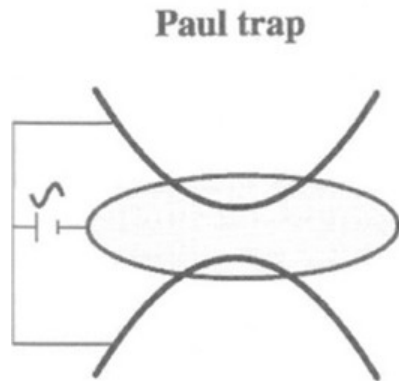
Seminarvortrag von
Christian Piltz

Gliederung

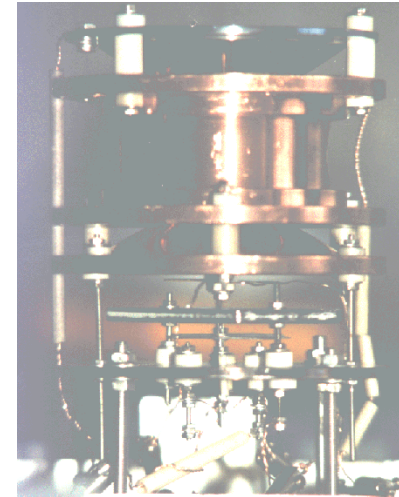
- I. Paul-Falle
- II. Quantenmechanische Bewegung
- III. Kopplung an Felder
- IV. Anwendung als Quantencomputer
- V. Anhang

I. Paul-Falle

- Earnshaw-Theorem:
 - „Statische Felder können eine Ladung nicht stabil einfangen.“



[SS04]



[Mainz]

- Schema einer Paul-Falle:
 - Axialsymmetrie
 - Endkappen- und Ringelektrode entgegengesetzt gepolt
 - Sinusspannung: im Zeitmittel Kraft zum Zentrum
 - Mechanisches Analogon: Kugel auf rotierender Sattelfläche
- Anwendung:
 - z. B.: Grundlagenforschung der QM, Quantencomputer

Nobelpreis 1989



The Nobel Prize in Physics 1989

"for the invention of the separated oscillatory fields method and its use in the hydrogen maser and other atomic clocks" "for the development of the ion trap technique"



**Norman F.
Ramsey**



Hans G. Dehmelt



Wolfgang Paul

[NP]

II. Quantenmechanische Bewegung

- Zeitentwicklung des Zustandsvektors durch die Schrödinger-Gleichung definiert: $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_{cm}(t)\rangle = \hat{H}_{cm}(t) |\Psi_{cm}(t)\rangle$

- Hamilton-Operator der Schwerpunktbewegung:

$$\hat{H}_{cm}(t) \equiv \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2(t) \hat{x}^2$$

- entspricht harmonischem Oszillator mit zeitabhängiger Frequenz:

$$\omega^2(t) = [a + 2q \cos(\omega_{rf}t)]$$

- Geräteparameter a , q und ω_{rf}

- Schrödinger-Gleichung lässt sich formal mit dem Zeitentwicklungsoperator lösen:

$$\hat{U}_{cm}(t) \equiv \hat{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt \hat{H}_{cm}(\hat{t}) \right]$$

- Für den Zustandsvektor folgt hieraus:

$$|\Psi_{cm}(t)\rangle = \hat{U}_{cm}(t) |\Psi_{cm}(0)\rangle$$

Orts- und Impulsoperator

- Wahl von zeitunabhängigen Referenzoszillator, dessen Energieeigenzustände ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) bilden
 - Definiere Zustände und Operatoren bezüglich dieses Oszillators.

- Ort und Impuls:

$$\hat{x} \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_r}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad \hat{p} \equiv \sqrt{\frac{\hbar\omega_r M}{2}} \frac{1}{i} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger)$$

- Im Heisenbergbild:

$$\hat{x}(t) \equiv \hat{U}_{cm}^\dagger(t) \hat{x} \hat{U}_{cm}(t) \quad \hat{p}(t) \equiv \hat{U}_{cm}^\dagger(t) \hat{p} \hat{U}_{cm}(t)$$

- Man kann zeigen, dass gilt:

-

$$\begin{aligned} \hat{U}_{cm}^\dagger(t) \hat{x} \hat{U}_{cm}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_r}} \left[\epsilon^*(t) \hat{b} + \epsilon(t) \hat{b}^\dagger \right] \\ \hat{U}_{cm}^\dagger(t) \hat{p} \hat{U}_{cm}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar M}{2\omega_r}} \left[\dot{\epsilon}^*(t) \hat{b} + \dot{\epsilon}(t) \hat{b}^\dagger \right] \end{aligned}$$

- Beweisidee: Beide Seiten erfüllen die gleiche Differentialgleichung bei gleichen Anfangsbedingungen; sind also gleich.

Operatoren im Heisenbergbild

$$\begin{aligned} \hat{U}_{cm}^\dagger(t) \hat{x} \hat{U}_{cm}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_r}} \left[\epsilon^*(t) \hat{b} + \epsilon(t) \hat{b}^\dagger \right] \\ \hat{U}_{cm}^\dagger(t) \hat{p} \hat{U}_{cm}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar M}{2\omega_r}} \left[\dot{\epsilon}^*(t) \hat{b} + \dot{\epsilon}(t) \hat{b}^\dagger \right] \end{aligned}$$

- Zeitabhängige Funktion erfüllt Mathieu-Gleichung:

$$\ddot{\epsilon} + \underbrace{[a + 2q \cos(\omega_{rf}t)]}_{\omega^2(t)} \epsilon = 0$$

- Floquet-Theorem bietet allgemeine und spezielle physikalische Lösung:

$$\epsilon^{(F)}(t) = e^{i\mu t} \phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i(n\omega_{rf} + \mu)t)$$

- μ, ω_{rf} Frequenz des mittleren Potentials und der Wechselspannung
- Zeitabhängigkeit durch klassische Bewegung enthalten.
- Quantenmechanik durch Vernichtungs- und Erzeugungsoperator gegeben.
- Quantenmechanische Bewegung im Phasenraum prinzipiell gelöst.

III. Kopplung an Felder

- Zeitentwicklung des Zustandsvektors wieder durch Schrödinger-Gleichung gegeben:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle$$

- Mit dem Hamilton-Operator:

$$\hat{H}(t) \equiv \hat{H}_{cm}(t) + \hat{H}_a + \hat{H}_{int}(t)$$

- Summe aus Schwerpunktbewegung, inneren Anregungen und Wechselwirkung mit Feldern

Interne Anregung

- für nur zwei innere Zustände, die ein VONS bilden, lässt sich Hamilton-Operator in dieser Basis entwickeln:

$$\hat{H}_a = \sum_{i,j=0,1} |i\rangle \underbrace{\langle i|\hat{H}_a|j\rangle}_{E_i \delta_{ij}} \langle j| = E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1|$$

- mit der Vektordarstellung $|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\hat{H}_a = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(E_0 + E_1) \cdot I + \frac{1}{2}(E_1 - E_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Identität entspricht in der Zeitentwicklung reiner Phase:

→

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \hat{\sigma}_z$$

Semiklassische Kopplungen

- Semiklassisch:
 - Ion und seine Bewegung wird quantenmechanisch beschrieben.
 - Elektromagnetisches Feld wird klassisch beschrieben (kein quantisiertes Feld).

- Denkbare Wechselwirkungen:

- laufende Laserwelle:

$$\hat{H}_{int}^{(r)}(t) = \hbar g (\hat{\sigma}^\dagger \exp[-i(\omega_L t - k\hat{x})] + \hat{\sigma} \exp[i(\omega_L t - k\hat{x})])$$

- stehende Laserwelle:

$$\hat{H}_{int}^{(s)}(t) = 2\hbar g \cos(\omega_L t) (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger) \sin(k\hat{x})$$

- mit Kopplungsstärke, Laserfrequenz, –wellenzahl und Ortsoperator
- Erzeuger und Vernichter von Anregungszuständen:

$$\hat{\sigma}^\dagger \equiv |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma} \equiv |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wechselwirkungsbild

- Dynamik im Wechselwirkungsbild (oft auch Dirac-Bild) ist nur durch Hamiltonoperator der Wechselwirkung gegeben.
- Transformation ins Wechselwirkungsbild:

$$\hat{H}_{int}(t) = \hat{U}_{cm}^\dagger(t) \hat{U}_a^\dagger(t) \hat{H}_{int}(t) \hat{U}_a(t) \hat{U}_{cm}(t)$$

- Transformation von Vernichter und Ortsoperator:

$$\hat{U}_a^\dagger(t) \hat{\sigma} \hat{U}_a(t) = e^{\frac{i}{2} \omega_a \hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma} e^{-\frac{i}{2} \omega_a \hat{\sigma}_z t}$$

- nutze Hausdorff-Identität:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

$$\hat{U}_a^\dagger(t) \hat{\sigma} \hat{U}_a(t) = \hat{\sigma} + \frac{i}{2} \omega_a t [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}] + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2} \omega_a t \right)^2 [\hat{\sigma}_z, [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}]] + \dots$$

- mit Matrixdarstellung:

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2\hat{\sigma} \end{aligned}$$

Transformation des Vernichters

- damit:

$$\begin{aligned}\hat{U}_a^\dagger(t)\hat{\sigma}\hat{U}_a(t) &= \hat{\sigma} + \frac{i}{2}\omega_a t [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}] + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2}\omega_a t\right)^2 [\hat{\sigma}_z, [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}]] + \dots \\ &= \hat{\sigma} - i\omega_a t \hat{\sigma} + \frac{1}{2!} (i\omega_a t)^2 \hat{\sigma} + \dots\end{aligned}$$

$$\hat{U}_a^\dagger(t)\hat{\sigma}\hat{U}_a(t) = \hat{\sigma}e^{-i\omega_a t}$$

analog:
$$\hat{U}_a^\dagger(t)\hat{\sigma}^\dagger\hat{U}_a(t) = \hat{\sigma}^\dagger e^{i\omega_a t}$$

• Ortsoperator:
$$\hat{U}_{cm}^\dagger(t)e^{\hat{x}}\hat{U}_{cm}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{U}_{cm}^\dagger(t)\hat{x}^n\hat{U}_{cm}(t)$$

- nutze Unitarität

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\hat{U}_{cm}^\dagger(t)\hat{x}\hat{U}_{cm}(t)\right)^n$$

$$\hat{U}_{cm}^\dagger(t)e^{\hat{x}}\hat{U}_{cm}(t) = \exp\left[\hat{U}_{cm}^\dagger(t)\hat{x}\hat{U}_{cm}(t)\right]$$

- mit Zeitentwicklung des Ortsoperators:

$$\hat{U}_{cm}^\dagger(t)\hat{x}\hat{U}_{cm}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_r}} \left[\epsilon^*(t)\hat{b} + \epsilon(t)\hat{b}^\dagger\right]$$

Verschiebe-Operator

– folgt:
$$\hat{U}_{cm}^\dagger(t) \exp(ik\hat{x})\hat{U}_{cm}(t) = \exp\left(ik\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_r}} \left[\epsilon^*(t)\hat{b} + \epsilon(t)\hat{b}^\dagger\right]\right)$$

- Definition des Verschiebe-Operators:

$$\hat{D}(\alpha(t)) \equiv \exp\left(\alpha(t)\hat{b}^\dagger - \alpha^*(t)\hat{b}\right) \quad \text{mit} \quad \hat{D}^\dagger(\alpha(t)) = \hat{D}(-\alpha(t))$$

- mit Zeitabhängigkeit im komplexwertigen Parameter: $\alpha(t) \equiv i\eta\epsilon(t)$

- Lamb-Dicke Parameter

$$\eta \equiv k\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_r}} \equiv \sqrt{2\pi} \frac{\Delta x}{\lambda}$$

definiert die Länge der Verschiebung im Phasenraum relativ zur Wellenlänge des einfallenden Lichtes.

- Erzeugt kohärenten Zustand

- Transformation des Ortsoperatoranteils:

$$\hat{U}_{cm}^\dagger(t) \exp(ik\hat{x})\hat{U}_{cm}(t) = \hat{D}(\alpha(t))$$

Transformation der Wechselwirkung

- Transformation des Hamilton-Operators:

$$\hat{H}_{int}^{(r)}(t) = \hbar g \hat{U}_{cm}^\dagger(t) \hat{U}_a^\dagger(t) [e^{-i\omega_L t} \hat{\sigma}^\dagger e^{ik\hat{x}} + e^{i\omega_L t} \hat{\sigma} e^{-ik\hat{x}}] \hat{U}_a(t) \hat{U}_{cm}(t)$$

- Idee: Ortsoperator und Operatoren der inneren Anregung wirken auf verschiedene Unterräume.
- Zeitentwicklung der Schwerpunktbewegung und der inneren Anregung kommutieren.
- Damit ist Aufspalten der Zeitentwicklungen möglich.

$$\hat{H}_{int}^{(r)}(t) = \hbar g \left[e^{-i\omega_L t} \underbrace{\hat{U}_a^\dagger(t) \hat{\sigma}^\dagger \hat{U}_a(t)}_{\hat{\sigma}^\dagger e^{i\omega_a t}} \underbrace{\hat{U}_{cm}^\dagger(t) e^{ik\hat{x}} \hat{U}_{cm}(t)}_{\hat{D}(\alpha(t))} + h.c. \right]$$

Wechselwirkungen im Dirac-Bild

- laufende Laserwelle:

$$\hat{H}_{int}^{(r)}(t) = \hbar g \left[\hat{\sigma}^\dagger e^{-i\Delta t} \hat{D}(\alpha(t)) + \hat{\sigma} e^{i\Delta t} \hat{D}(-\alpha(t)) \right]$$

- Verstimmung: $\Delta \equiv \omega_L - \omega_a$

- stehende Laserwelle:

$$\hat{H}_{int}^{(s)}(t) = \hbar g \cos(\omega_L t) (\hat{\sigma} e^{-i\omega_a t} + \hat{\sigma}^\dagger e^{i\omega_a t}) \frac{1}{i} \left(\hat{D}(\alpha(t)) - \hat{D}(-\alpha(t)) \right)$$

- Hamilton-Operatoren beeinhaltten explizite Zeitabhängigkeit.
 - durch Laserfrequenz und Anregungsenergie
 - durch Verschiebung im Phasenraum (aus klassischer Bewegung)
- Verschränkung von Anregung und Verschiebungen im Phasenraum

Lamb-Dicke Näherung

- Längenskala der quantenmechanischen Bewegung sei klein gegenüber der Wellenlänge des Lichtes: $\eta \ll 1$

- Entwickle Verschiebe-Operator:

$$\hat{D}(\alpha(t)) \equiv \exp \left(i\eta\epsilon(t)\hat{b}^\dagger + i\eta\epsilon^*(t)\hat{b} \right) \approx 1 + i\eta \left(\epsilon(t)\hat{b}^\dagger + \epsilon^*(t)\hat{b} \right)$$

- eingesetzt in Wechselwirkung mit stehender Laserwelle:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int}^{(s)}(t) &= \hbar g \cos(\omega_L t) (\hat{\sigma} e^{-i\omega_a t} + \hat{\sigma}^\dagger e^{i\omega_a t}) \frac{1}{i} \left(\hat{D}(\alpha(t)) - \hat{D}(-\alpha(t)) \right) \\ &\approx \hbar g (e^{i\omega_L t} + e^{-i\omega_L t}) (\hat{\sigma} e^{-i\omega_a t} + \hat{\sigma}^\dagger e^{i\omega_a t}) \frac{1}{i} \left(i\eta \left(\epsilon(t)\hat{b}^\dagger + \epsilon^*(t)\hat{b} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\hat{H}_{int}^{(s)}(t) \approx \eta \hbar g \left(\epsilon^*(t)\hat{b} + \epsilon(t)\hat{b}^\dagger \right) \left[(1 + e^{-2i\omega_L t}) \hat{\sigma} e^{i\Delta t} + h.c. \right]$$

- Weitere Vereinfachung durch Floquet-Lösung:

$$\epsilon^{(F)}(t) = e^{i\mu t} \phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(\mu+n\omega_{rf})t}$$

führt zu:

...

Jaynes-Cummings-Paul Modell (JCP)

$$\hat{H}_{int}^{(s)}(t) \approx \eta \hbar g (1 + e^{-2i\omega_L t}) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp [i (\Delta - \mu - n\omega_{rf}) t] \hat{\sigma} \hat{b} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp [i (\Delta + \mu + n\omega_{rf}) t] \hat{\sigma} \hat{b}^\dagger \right] + h.c.$$

- Hamilton-Operator beinhaltet sowohl Erzeuger und Vernichter von Anregungs-, als auch von Schwingungszuständen.
 - Kombinationen $\hat{\sigma} \hat{b}^\dagger, \hat{\sigma}^\dagger \hat{b}$ entsprechen JCP:
Ion geht z. B. in den Grundzustand bei Anregung der Schwingung
 - Kombinationen: $\hat{\sigma} \hat{b}, \hat{\sigma}^\dagger \hat{b}^\dagger$ entsprechen Anti-JCP:
Ion geht z. B. in den Grundzustand bei Verlust einer Schwingungsquantenzahl
- Wahl der Verstimmung unterdrückt ein Modell.

Drehwellen-Näherung

- Wähle Verstimmung so, dass sich ein Term im zeitabhängigen Hamilton-Operator langsam ändert und alle anderen schnell oszillieren. z. B.: $(-\Delta - \mu) = n_0 \omega_{rf}$
- Gute Näherung durch größten Entwicklungskoeffizienten:
 - c_0 ist größter Koeffizient: $c_{n_0} = c_0$
 - Verstimmung: $\Delta = -\mu$

$$\hat{H}_{int}^{(s)}(t) \approx \eta \hbar g (1 + e^{-2i\omega_L t}) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp [i (-2\mu - n\omega_{rf}) t] \hat{\sigma} \hat{b} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp [i (n\omega_{rf}) t] \hat{\sigma} \hat{b}^\dagger \right] + h.c.$$

- Berechne Zeitmittel:

$$\hat{H} = \int_0^T \frac{dt}{T} \hat{H}(t)$$

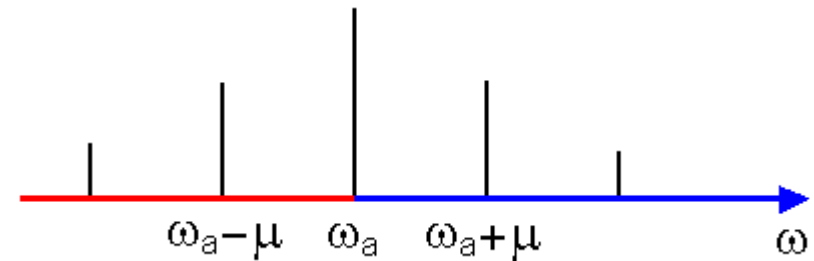
- oszillierende Terme werden klein

Zeitmittelung

- Also folgt im Zeitmittel Jaynes-Cummings-Paul Modell:

$$\hat{H}_{int}^{(s)} \approx \eta c_0 \hbar g (\hat{\sigma} \hat{b}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{b})$$

- keine Zeitabhängigkeit
- Spektrum und Verstimmung:
 - innere Anregung
 - diskrete Schwingungsmoden
 - rotes Seitenband
 - blaues Seitenband

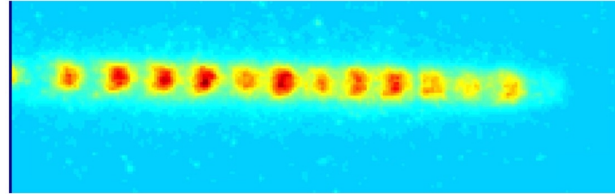


- Fazit: In der Lamb-Dicke-Näherung reduziert sich der Hamilton-Operator der Wechselwirkung mit einer stehenden Laserwelle bei geeigneter Verstimmung zum Jaynes-Cummings-Paul Modell.
 - oder analog zum Anti-JCP

IV. Anwendung als Quantencomputer

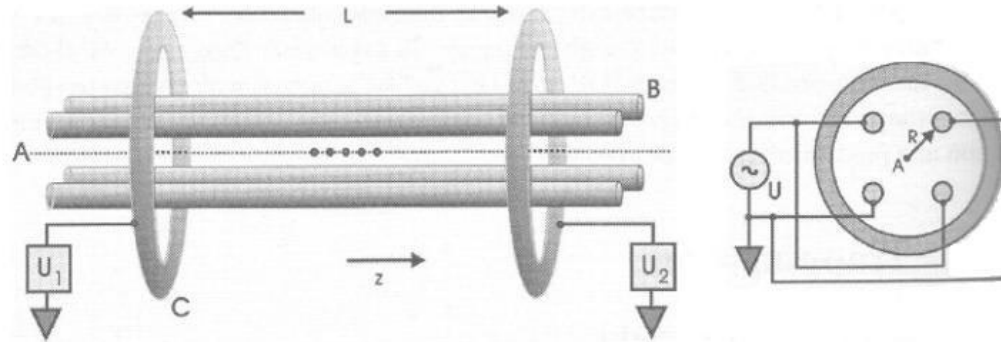
- Quantencomputer
 - Verarbeitet Quanteninformation
 - bestehen aus Qubits (ein Paar von quantenmechanischen Zuständen)
 - Vektorraumstruktur der Quantenmechanik erlaubt den Zustand: logisch eins und null (paralleles Rechnen möglich)
- Quantencomputer-Algorithmen
 - benötigen universelle Palette aus Quantengattern (CNOT und NOT reichen aus)
 - Beispiel: Shor-Algorithmus zur Primfaktorzerlegung (wesentlich effektiver als jeder klassische Algorithmus)
- Quantencomputing ist noch Gegenstand von Grundlagenforschung.

Linearfalle



[W06]

- Linearfalle ist denkbarer Ansatz für einen Quantencomputer.
- Schema:



[SS04]

- lineare Erweiterung der Paul-Falle
 - Quadrupolfeld zwingt Ionen auf Symmetrieachse
 - Statisches Potential als Verschluss
 - Ionen können einzeln mit Lasern manipuliert werden
 - Ionen durch Coulomb-Abstoßung gekoppelt
 - Gemeinsame Schwingungsmoden
- Anregungszustände der Ionen dienen als Qubits.
- Schwingungsmoden dienen als Bus-System.

Verstimmte $k\pi$ -Pulse

- Wechselwirkung in Lamb-Dicke-Näherung bei Einwirkung einer stehender Laserwelle im roten Seitenband auf Ion n :

$$\hat{H}_n = \frac{\eta}{\sqrt{N}} \frac{\Omega}{2} (\hat{\sigma}^\dagger \hat{b} + \hat{\sigma} \hat{b}^\dagger)$$

- vgl. JCP mit Anzahl der Ionen und Rabi-Frequenz
- Wähle Produktzustände aus interner Anregung des n -ten Ions und Schwingungsmode des Gesamtsystems. z. B.: $|0\rangle_n |1\rangle$
- Zeitentwicklung für gegebene Pulsdauer: $t = \frac{k\pi}{\Omega\eta/\sqrt{N}}$ (typisch: $10\mu\text{s}$)

$$\hat{U}(k) = \exp\left(-i \frac{k\pi}{2} (\hat{\sigma}^\dagger \hat{b} + \hat{\sigma} \hat{b}^\dagger)\right)$$

Aufspalten der Reihendarstellung

- spalte Reihendarstellung in gerade und ungerade Anteile auf:

$$\begin{aligned} \hat{U}(k)|0\rangle_n|1\rangle &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \left(\frac{k\pi}{2}\right)^{2l} (\hat{\sigma}^\dagger \hat{b} + \hat{\sigma} \hat{b}^\dagger)^{2l} |0\rangle_n|1\rangle \\ &\quad - i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \left(\frac{k\pi}{2}\right)^{2l+1} (\hat{\sigma}^\dagger \hat{b} + \hat{\sigma} \hat{b}^\dagger)^{2l+1} |0\rangle_n|1\rangle \end{aligned}$$

- Potenzen der Operatoren:

$$(\hat{\sigma}^\dagger \hat{b} + \hat{\sigma} \hat{b}^\dagger) |0\rangle_n|1\rangle = |1\rangle_n|0\rangle \quad \text{und}$$

$$(\hat{\sigma}^\dagger \hat{b} + \hat{\sigma} \hat{b}^\dagger)^2 |0\rangle_n|1\rangle = (\hat{\sigma}^\dagger \hat{b} + \hat{\sigma} \hat{b}^\dagger) |1\rangle_n|0\rangle = |0\rangle_n|1\rangle$$

- für gerade Potenzen ergibt sich: $|0\rangle_n|1\rangle$ und für ungerade: $|1\rangle_n|0\rangle$

Zeitentwicklung

- Darstellung durch trigonometrische Funktionen:

$$\hat{U}(k)|0\rangle_n|1\rangle = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)|0\rangle_n|1\rangle - i \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)|1\rangle_n|0\rangle$$

analog:

$$\hat{U}(k)|1\rangle_n|0\rangle = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)|1\rangle_n|0\rangle - i \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)|0\rangle_n|1\rangle$$

und:

$$\hat{U}(k)|0\rangle_n|0\rangle = |0\rangle_n|0\rangle$$

- Verstimmter π -Puls überträgt den Zustand der inneren Anregung auf die Schwingungsmode (SWAP).
- 2π -Puls über einen Hilfszustand ändert das Vorzeichen des Zustandes nur, falls es sich um $|0\rangle_n|1\rangle$ handelt.

CNOT-Gatter

- CNOT zwischen den Ionen m und n
 - Ziel-Qubit n ändert den Zustand nur, falls Kontroll-Qubit m in einem bestimmten Zustand ist.
- 1. Schritt: π -Puls auf das m-te Ion (SWAP)
- 2. Schritt: 2π -Puls auf das n-te Ion
- 3. Schritt: π -Puls auf das m-te Ion (SWAP)

$$\begin{array}{l}
 |0\rangle_m |0\rangle_n |0\rangle \xrightarrow{\pi_m} |0\rangle_m |0\rangle_n |0\rangle \xrightarrow{2\pi_n} |0\rangle_m |0\rangle_n |0\rangle \xrightarrow{\pi_m} |0\rangle_m |0\rangle_n |0\rangle \\
 |0\rangle_m |1\rangle_n |0\rangle \xrightarrow{\pi_m} |0\rangle_m |1\rangle_n |0\rangle \xrightarrow{2\pi_n} |0\rangle_m |1\rangle_n |0\rangle \xrightarrow{\pi_m} |0\rangle_m |1\rangle_n |0\rangle \\
 |1\rangle_m |0\rangle_n |0\rangle \xrightarrow{\pi_m} -i|0\rangle_m |0\rangle_n |1\rangle \xrightarrow{2\pi_n} i|0\rangle_m |0\rangle_n |1\rangle \xrightarrow{\pi_m} |1\rangle_m |0\rangle_n |0\rangle \\
 |1\rangle_m |1\rangle_n |0\rangle \xrightarrow{\pi_m} -i|0\rangle_m |1\rangle_n |1\rangle \xrightarrow{2\pi_n} -i|0\rangle_m |1\rangle_n |1\rangle \xrightarrow{\pi_m} -|1\rangle_m |1\rangle_n |0\rangle
 \end{array}$$

- Vorzeichenwechsel nur bei anfänglicher Anregung beider Ionen

Abhängige Logik

- Definiere Superpositionszustand:

$$|\pm\rangle_n \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (|0\rangle_n \pm |1\rangle_n)$$

- Wirkung der CNOT-Operation:

$$|0\rangle_m |\pm\rangle_n \longrightarrow |0\rangle_m |\pm\rangle_n$$

$$|1\rangle_m |\pm\rangle_n \longrightarrow |1\rangle_m |\mp\rangle_n$$

- Abhängige Logik erreicht!

NOT-Gatter

- Resonante Anregung eines Ions (keine Verstimmung) in Lamb-Dicke Näherung durch stehende Laserwelle:

$$\hat{H}_n = \frac{\Omega}{2} (\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})$$

- Zeitentwicklung durch $k\pi$ -Puls:

$$\hat{U}(k)|0\rangle_n = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)|0\rangle_n - i \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)|1\rangle_n$$

$$\hat{U}(k)|1\rangle_n = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)|1\rangle_n - i \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)|0\rangle_n$$

- NOT-Gatter entspricht π -Puls.
- Jede logische Operation kann mit Lasern und gespeicherten Ionen durchgeführt werden.
- Einstieg in das Quanteninformations-Zeitalter?!

V. Anhang

- Literatur und Bildnachweis:

- [Sch01] Wolfgang Schleich: *Quantum Mechanics in Phase Space*
- [SS04] Joachim Stolze, Dieter Suter: *Quantum Computing*
- [W06] Persönliche Leihgabe von Herrn Prof. C. Wunderlich, Universität Siegen
- [NP] <http://nobelprize.org/>
- [Mainz] <http://wswww.physik.uni-mainz.de/werth/nlinres/falle.gif>
- [CZ95] J. I. Cirac und P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* 74, 4091 (1995)
- [P90] W. Paul, *Rev. Mod. Phys.* 62, 531 (1990)
- [CG69] K. E. Cahill und R. J. Glauber, *Phys. Rev.* 177, 1857 (1969)