

Klausur zur Vorlesung „ Experimentalphysik II (SS 2018)“

Aufgabe 1: Kurzfragen

(19 Punkte)

Beantworten Sie so kurz wie möglich:

- i) 3 P. Nennen Sie die Kontinuitätsgleichung und erläutern Sie diese.

Die Kontinuitätsgleichung ist gegeben durch

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

wobei ρ die Ladungsdichte und \vec{j} die Stromdichte bezeichnet. Diese verknüpft die zeitliche Änderung der Ladungsdichte mit der räumlichen Änderung der Stromdichte.

- ii) 3 P. Nennen Sie die vier Maxwell-Gleichungen und erläutern Sie diese. Welche fundamentale Gleichung wird nicht mehr erfüllt, wenn der Verschiebungsstrom nicht beachtet wird?

Die vier Maxwell-Gleichungen lauten

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \mu_0 \vec{j}$$

Man beachte das die Maxwell-Gleichungen hier in differentieller Form angegeben sind und somit nicht koordinatenunabhängig sind. Man erhält die koordinatenunabhängige integrale Formulierung mittels Anwendung des Gaußschen bzw. Stokesches Integralsatzes. Die erste Gleichung besagt, dass die Quelle des elektrischen Feldes die elektrische Ladung bzw. die elektrische Ladungsdichte ist. Die zweite besagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt. Die dritte besagt, dass die zeitliche Änderung eines magnetischen Feldes ein elektrisches Wirbelfeld hervorruft. Das Minuszeichen schlägt sich in der Lenzschen Regel nieder. Die vierte Maxwell-Gleichung setzt sich aus dem Ampereschen Durchflutungsgesetz und dem Verschiebungsstrom zusammen. Würde man den Verschiebungsstrom nicht beachten, so würden die Maxwell-Gleichungen nicht die Kontinuitätsgleichung erfüllen.

- iii) 2 P. Erläutern Sie den Gaußschen und Stokeschen Integralsatz und geben Sie beide in Formeln an.

Der Gaußsche Integralsatz lautet

$$\int_V dV \nabla \Phi = \oint_{\partial V} d\vec{A} \Phi$$

Dieser besagt, dass das Integral über ein Volumen bzw. ein Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ über den Gradienten einer Funktion Φ gleich dem Integral über die geschlossene Oberfläche bzw. dem Rand des Volumens der Funktion selbst ist. Der Stokesche Integralsatz besagt

$$\int_S \nabla \times \vec{\Phi} d\vec{A} = \oint_{\partial S} \vec{\Phi} d\vec{r}$$

Damit ist das Integral über eine Oberfläche über die Rotation eines Vektorfeldes Φ gleich dem Integral über den geschlossenen Weg über das Feld selbst.

- iv) 2 P. Was ist die Lorentz-Transformation? Was bedeutet Lorentz-Invarianz? Sind die Maxwell-Gleichungen lorentzinvariant?

Wir betrachten hier die Lorentz-Transformation für Raum und Zeit, speziell für einen Beobachter, der sich mit der konstanten Geschwindigkeit v in x -Richtung gegenüber einem Beobachter bewegt. Es gilt

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad , \quad x' = \gamma (x - vt) \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z'$$

Eine Größe, die sich unter Lorentz-Transformation nicht ändert, heißt Lorentz-Invariante. Der Ausdruck $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ ist unter anderem eine Lorentz-Invariante, d.h. in allen unter Lorentz-Transformationen verbundenen Koordinatensystemen konstant. Die Maxwell-Gleichungen sind lorentzinvariant.

- v) 3 P. Der klassische harmonische Oszillator verhält sich formal wie der elektromagnetische Schwingkreis. Dabei müssen jedoch Ersetzungen vorgenommen werden. Was entspricht den Federn, Massen und Reibungswiderständen beim harmonischen Oszillator im Falle des elektromagnetischen Schwingkreises?

Der Masse m entspricht die Induktivität L , der Federkonstanten die reziproke Kapazität und der Dämpfungskonstante der Ohmsche Widerstand. Ferner kann man erkennen: Auslenkung entspricht Ladung, Geschwindigkeit entspricht Stromstärke.

- vi) 2 P. Was besagt das Fermatsche Prinzip?

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht in einem Medium zwischen zwei Punkten Wege nimmt, auf denen seine Laufzeit sich bei kleinen Variationen des Weges nicht ändert. Äquivalent dazu ist die Aussage, dass die optische Weglänge extremal ist.

- vii) 2 P. Was versteht man unter Eichfreiheit? Was ist die Coulomb Eichung?

Unter Eichfreiheit in der Elektrodynamik versteht man, dass verschiedene Potentiale, insbesondere Vektorpotentiale, die gleichen Felder erzeugen. Mathematisch bedeutet dies: Die Felder bleiben invariant unter der folgenden Eichtransformation der Potenzial

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

wobei λ eine beliebige skalare Funktion ist, welche mindestens zweimal differenzierbar sein muss. In der Coulomb-Eichung wird $\nabla\vec{A} = 0$ gesetzt. Man beachte, dass man immer ein \vec{A} finden kann, sodass die Coulombbedingung erfüllt ist.

- viii) 2 P. Was besagt die Abbildungsgleichung einer dünnen Linse mit Brennweite f ?

Die Abbildungsgleichung einer dünnen Linse lautet

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$

wobei f die Brennweite, g die Gegenstandsweite und b die Bildweite darstellt.

Aufgabe 2: Yukawa-Potenzial

(6 Punkte)

- i)
- 2 P.
- Wir erhalten das elektrische Feld aus dem Potenzial mittels

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r})$$

Da das Potenzial radialsymmetrisch ist, also $\Phi(\vec{r}) = \Phi(|\vec{r}|) \equiv \Phi(r)$ werden wir den Gradienten in Kugelkoordinaten transformieren und dann auf die Funktion anwenden. Für eine differenzierbare Funktion $\Phi(r, \theta, \varphi)$ gilt

$$\nabla\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Da aber in unserem Fall $\Phi(r, \theta, \varphi) = \Phi(r)$ gilt, verschwinden die Ableitungen nach den Winkeln und wir erhalten

$$\nabla\Phi(r) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r$$

Gemäß Ketten- und Produktregel erhalten wir

$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}(r_0 + r)}{r^2}\vec{e}_r$$

- ii)
- 2 P.
- Nun wollen wir die elektrische Ladungsdichte
- ρ
- bestimmen. Hier kann man sich die Maxwell-Gleichungen zu nutze machen. Im SI-System lautet die erste

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \Rightarrow -\epsilon_0 \nabla \cdot (\nabla\Phi) = -\epsilon_0 \Delta\Phi = \rho$$

Der letztere Zusammenhang der das Potenzial in die Bestimmung der Ladungsdichte involviert wird auch Poisson-Gleichung genannt. Man beachte hier, dass ∇ sowohl für die Divergenz als auch für den Gradienten benutzt wird, wobei die jeweilige Bedeutung aus dem Kontext klar wird. In Kugelkoordinaten gilt

$$\nabla\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta) E_\theta) + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$

wobei $E_i = \langle \vec{E}, \vec{e}_i \rangle$ bezeichnet, also die Projektion auf die jeweilige Koordinatenachse. Mit dem gleichen Argument wie oben fallen alle Ableitungen bis auf den radialen Anteil weg und es bleibt

$$\rho(r) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{Q}{4\pi r_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\frac{r}{r_0}}(r_0 + r)}{r_0} \right) = \frac{Q}{4\pi} \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r r_0^2}$$

- iii) 2 P. Um die von einer geschlossenen Kugel mit dem Radius a eingeschlossene Gesamtladung Q_0 zu ermitteln, müssen wir über die Ladungsdichte integrieren. Mit der Notation

$$B_a := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq a \right\}$$

folgt

$$Q_0 = \int_{B_a} dV \rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^a dr r^2 \rho(r)$$

Aufgrund der Radialsymmetrie ist die Winkelintegration trivial und liefert 4π . Damit erhalten wir den Ausdruck

$$Q_0 = 4\pi \int_0^a dr r^2 \rho(r) = \int_0^a \frac{r^3 \cdot e^{-\frac{r}{r_0}}}{r_0^2}$$

Das Integral wird elementar mittels partieller Integration gelöst und wir erhalten

$$Q_0 = \int_0^a \frac{r^3 \cdot e^{-\frac{r}{r_0}}}{r_0^2} = 6r_0^2 - \frac{(6r_0^3 + 6r_0^2 a + 3r_0 a^2 + a^3) e^{-\frac{a}{r_0}}}{r_0}$$

Im Grenzfall $a \ll r_0 \Leftrightarrow \frac{a}{r_0} \ll 1$ strebt der exponentielle Anteil gegen Null und wir erhalten

$$\tilde{Q}_0 = 6r_0^2$$

Aufgabe 3: Relativistische Drähte

(10 Punkte)

- i) 2 P. Der Betrag der elektrischen Feldstärke ist gegeben durch

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

wobei diese vom oberen Draht weg gerichtet ist. Damit erhalten wir sofort für die elektrische Kraft pro Längeneinheit

$$\frac{|\vec{F}|}{L} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

- ii) 2 Bei relativistisch bewegten Drähten wird durch die Lorentz-Kontraktion des Drahtes die Linienladungsdichte λ erhöht. Es gilt

$$\lambda_{bewegt} = \frac{\lambda_{Ruhe}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und damit folgt für die wirkende Kraft pro Längeneinheit

$$\frac{|\vec{F}|}{L} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

- iii) 2 P. Die Bewegung des Leiters führt zu einer Bewegung der darauf befindlichen Ladungen und somit zu einem Strom, also

$$I = \lambda_{bewegt} \cdot v = \frac{\lambda v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und damit

$$\frac{|\vec{F}|}{L} = \frac{IB}{c} \quad \text{wobei} \quad B = \frac{2I}{dc}$$

Wir erhalten schließlich

$$\frac{|\vec{F}|}{L} = \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{\lambda^2}{2d\pi\epsilon_0}$$

- iv) 2 P. Da die elektrische Kraft und die magnetische Kraft hier in entgegengesetzte Richtungen zeigen, ergibt sich die wirkende Gesamtkraft als Differenz der beiden, also

$$\frac{|\vec{F}|}{L} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

Aufgabe 4: Plattenkondensator

(10 Punkte)

2 P. Aufgrund der Symmetrie und unter Vernachlässigung können wir annehmen

$$\vec{D}(\vec{r}) = D(x) = \vec{e}_x$$

Gemäß des Gaußschen Satzes erhalten wir zwischen den Platten

$$\vec{D} = \frac{Q}{a} \vec{e}_x$$

wobei Q die Ladung der Platte bei $x = 0$ ist.

2 P. Gemäß der Definition

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}(\vec{r})$$

erhalten wir

$$\vec{E}(x) = \frac{Q}{a \epsilon_0 (1 + \alpha x)} \vec{e}_x$$

2 P. Mittels der Definition der Polarisation

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r})$$

erhalten wir

$$\vec{P}(x) = \frac{Q \alpha x}{a (1 + \alpha x)} \vec{e}_x$$

2 P. Außerhalb des Kondensators verschwinden alle Felder. Die Spannung zwischen den Platten ist gegeben durch

$$U = \int_0^b E(x) dx = \frac{Q}{\epsilon_0 a \alpha} \log(1 + \alpha b)$$

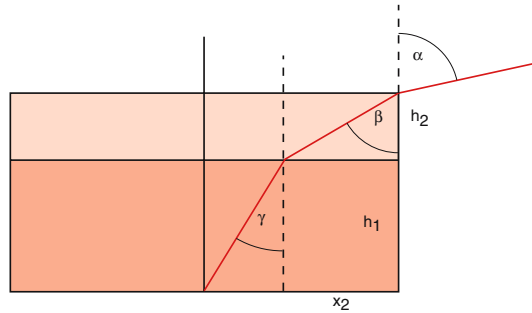
und somit

$$C = \frac{\epsilon a \alpha}{\log(1 + \alpha b)}$$

Aufgabe 5: Lichtbrechung

(5 Punkte)

Zunächst betrachten wir die folgende Abbildung



$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n_2 \quad , \quad \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1}$$

Damit folgt sofort

$$\sin(\gamma) = \frac{n_2}{n_1} \sin(\beta) = \frac{1}{n_1} \sin(\alpha)$$

- i) 2 P. Ist $r < 6.04\text{cm}$, so kann man den maximal beobachtbaren Winkel ausrechnen gemäß

$$\begin{aligned} R = x_1 + x_2 &= h_1 \tan \gamma + h_2 \tan \beta = h_1 \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\beta)} + h_2 \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \\ &= \frac{h_1}{n_1} \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \frac{1}{n_1^2} \sin^2(\alpha)}} + \frac{h_2}{n_1} \frac{\sin(\alpha)}{1 - \frac{1}{n_1^2} \sin^2(\alpha)^2} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$R = \frac{h_1 \sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \sin^2(\alpha)}} + \frac{h_2 \sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)^2}}$$

Deutlich einfacher ist die Lösung mittels des Fermatschen Prinzips. Für die Lichtlaufzeit gilt

$$T^2 = \frac{x_1^2 + h_1^2}{n_1^2 c^2} + \frac{x_2^2 + h_2^2}{n_2^2 c^2} = \text{minimal}$$

Mit $x_2 = R - x_1$ folgt nun

$$\frac{dT^2}{dx_1} = \frac{2x_1}{cn_1^2} - \frac{2(R-x_1)}{cn_2^2} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{n_1^2}{n_2^2}(R-x_1)$$

Mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Werten erhalten wir

$$x_1 = R \cdot \frac{1}{1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \frac{R}{1.83} \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma = \frac{x_1}{h_1} = 0.41$$

Damit ergeben sich alle weiteren Größen zu

$$\sin(\gamma) = 0.38 \quad , \quad \beta = 24.6^\circ \quad , \quad \alpha = 33.6^\circ$$

- ii) 2 P. Wenn $\alpha_m = 90^\circ$ sein soll, so muss an der Oberfläche Totalreflexion auftreten. Das heißt

$$\sin(\beta_m) = \frac{1}{n_2} = 0.752 \Rightarrow \beta_m = 48.76^\circ$$

und

$$\sin(\gamma_m) = \frac{1}{n_1} = 0.685 \Rightarrow \gamma_m = 43.235^\circ$$

Der Radius des Gefäßes muss dann sein

$$R \geq x_1 + x_2 = h_1 \operatorname{tg}\gamma_m + h_2 \operatorname{tg}\beta_m = 6.04 \text{cm}$$

Aufgabe 6: Statisches Magnetfeld

(8 Punkte)

- i) 3 P. Für den magnetischen Fluss gilt

$$\Phi_{mag} = \int \vec{B} \, d\vec{A} = \int_{y_0 - \frac{l}{2}}^{y_0 + \frac{l}{2}} dy \int_{x_0 - \frac{l}{2}}^{x_0 + \frac{l}{2}} dx Bx = \frac{B_0}{2} x^2 \Big|_{x_0 - \frac{l}{2}}^{x_0 + \frac{l}{2}} = B_0 l^2 x_0$$

- ii) 3 P. Für die induzierte Spannung gilt gemäß den Maxwell-Gleichungen

$$\epsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = B_0 l^2 \frac{\partial x}{\partial t} = B_0 l^2 v_0$$

- iii) 2 P. Für Zeiten hinreichend groß, kann man den Strom als konstant annehmen und somit hat die Induktivität L keinen Effekt.

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{l^2 B_0 v_0}{R}$$

- iv) 2 P. \vec{B} ist konstant in \vec{e}_y Richtung, da sich wegen $d\vec{F} = \frac{I}{c} d\vec{l} \times \vec{B}$ die beiden Kräfte aufheben. Angenommen der Mittelpunkt des Quadrats befinde sich im Punkte x . Dann ist

$$F_x = -\frac{I}{c} l B (x + l) + \frac{I}{c} l B (x) = -\frac{I}{c} l^2 B_0 = -\frac{l^4 B_0^2 v_0}{c^2 R}$$

Aufgabe 7: Wechselstrom

(10 Punkte)

i) 2 P. Es ist

$$Z = R + \frac{1}{\frac{1}{i\omega L} + i\omega C} = R + i \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)$$

ii) 2 P. Für den Strom I gilt

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{R + i \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)}$$

Da der Nenner eine komplexe Zahl ist, gibt es eine Zerlegung in Polarform mittels $z = |z|e^{i\varphi}$. Damit folgt

$$I = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)^2}} e^{i\varphi}$$

wobei

$$\varphi = \arctan \left(\frac{-\frac{\omega L}{R}}{1 - \omega^2 LC} \right) \quad , \quad I = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)^2}}$$

iii) 2 P. Für niedrige Frequenzen gilt

$$\tan(\varphi) \approx -\frac{\omega L}{R}$$

und für hohe Frequenzen ist

$$\tan(\varphi) \approx \frac{1}{\omega RC}$$