Aufgabe 1

Ein paramagnetisches Gas bei Zimmertemperatur ($T = 300K$) wird in ein externes homogenes Magnetfeld der Feldstärke $B = 1,5T$ gebracht. Die Atome des Gases besitzen ein magnetisches Dipolmoment $\mu = 1\mu_B$. Wie groß sind die mittlere Translationsenergie eines Atoms des Gases und die Energiedifferenz ΔU_B zwischen der parallelen und der antiparallelen Ausrichtung des atomaren magnetischen Dipolmoments mit dem äußeren Feld?
Lösung:
Die mittlere kinetische Energie der Translation einer Atoms in einem Gas der Temperatur T ist:

$$E_{kin} = \frac{3}{2}kT \tag{1}$$

Für $T = 300K$ ist die Energie $E_{kin} = 0.038eV$.
Die potenzielle Energie eines magnetischen Dipol $\vec{\mu}$ in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ ergibt sich durch das negative Skalarprodukt der beiden:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos(\Theta) \tag{2}$$

Für die parallele Ausrichtung ist $\Theta = 0°$ und für eine antiparallele Ausrichtung ist $\Theta = 180°$.
Somit ist die Differenz der potentiellen Energien:

$$\Delta U_B = -\mu B \cos(180°) - (-\mu B \cos(0°)) = 2\mu B = 170\mu eV \tag{3}$$

Aufgabe 2

Eine Kompassnadel aus reinem Eisen (mit einer Dichte von $7900\frac{kg}{m^3}$) ist 3,0 cm lang, 1,0 mm breit und 0,50 mm dick. Ein Eisenatom besitzt ein magnetisches Dipolmoment von $_{Fe} = 2.1 \cdot 10^{-23}\frac{J}{T}$. Wie groß ist das ist das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ der Nadel, wenn 10 % der Atome ausgerichtet sind?
Lösung:
Da nur 10% der N Atome ausgerichtet werden gilt für das Dipolmoment der Nadel:

$$\mu = 0.1N\mu_{Fe} \tag{4}$$

Nun muss die Gesamtzahl der Eisenatome bestimmt werden.

$$N = \frac{mN_A}{M} \tag{5}$$

wobei m die Masse der Nadel, N_A die Avogadro-Konstante und M die molare Masse von Eisen ist. Wir haben das Volumen der Eisennadel gegeben, die Masse der Nadel ergibt sich aus der Dichte:

$$m = \rho_{Fe}V = 1.185 \cdot 10^{-4}kg \tag{6}$$

Für N erhalten wir:

$$N = 1.2774 \cdot 10^{21} \tag{7}$$

$$\mu = 0.1 N \mu_{Fe} \approx 2.7 \cdot 10^{-3} \frac{J}{T} \tag{8}$$

Aufgabe 3

a) Wenn ein Stoff keine ungepaarten Elektronen hat, ist er dann paramagnetisch oder diamagnetisch?

b) Erklären Sie kurz, warum Eisen bei $T_C = 1041K$ (Curie-Temperatur) paramagnetisch wird und alle seine ferromagnetischen Eigenschaften verliert?

Lösung:

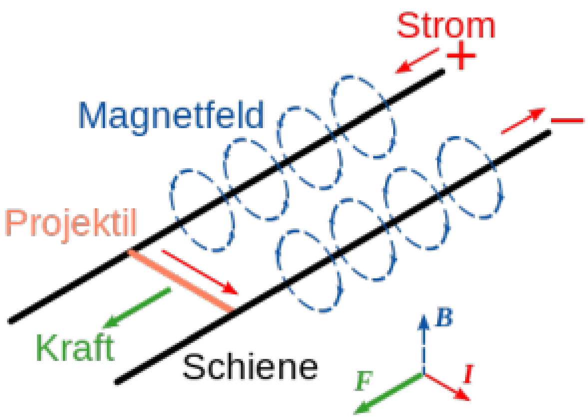
a) Gepaarte Elektronen erzeugen kein intrinsisches magnetisches Moment, da sich die magnetischen Momente der einzelnen Elektronen (Spin) sich gegenseitig ausgleichen. Ein Stoff ohne ungepaarte Elektronen, enthält somit keine Elementarmagneten. Dies ist allerdings nötig für Paramagnetismus. Bei Paramagnetismus richten sich diese Elementarmagneten in Richtung des externen Magnetfeldes aus und verstärken es dadurch.
   Von Diamagnetismus spricht man, wenn ein Stoff keine Elementarmagneten enthält und damit die Induktion von Strömen in dem Stoff zum vorherrschenden Effekt wird. Nach der Lenz'schen Regel wirken diese Ströme ihrer Ursache entgegen und induzieren deshalb ein dem externen Magnetfeld entgegen gerichtetes Feld. Folglich ist ein Material ohne ungepaarten Elektronen diamagnetisch.

b) Bei einem Ferromagneten sind die magnetischen Momente innerhalb sogenannter Weiss'scher Bezirke gleich ausgerichtet, bedingt durch magnetische Wechselwirkung zwischen den Elementarmagneten. Steigt nun die Temperatur und damit die thermische Energie der Elementarmagneten, verliert die magnetische Wechselwirkung nach und nach an Relevanz und die Elementarmagneten ihre ursprüngliche Gleichrichtung. Oberhalb der Curie-Temperatur ist die Gleichrichtung und damit sämtliche ferromagnetischen Eigenschaften verschwunden. Das Material beinhaltet nun ungerichtete Elementarmagneten und verhält sich somit paramagnetisch.

Aufgabe 4

Bei einer Railgun wird das Projektil durch die magnetische Wechselwirkung eines elektrischen Stromes beschleunigt, der über die Schienen auf das Projektil selbst oder auf einen hinter dem Projektil geladenen Treiber fließt. Das Projektil kann dabei auch selbst als Schlitten dienen, dies ist aber wegen der sich widersprechenden Anforderungen (das Projektil muss wegen der Aerodynamik schlank sein, der Schlitten dagegen breit und

flach) unüblich in professionellen/militärischen Entwürfen.
Die folgende Abbildung zeigt den Feldverlauf der Railgun-Schienen:

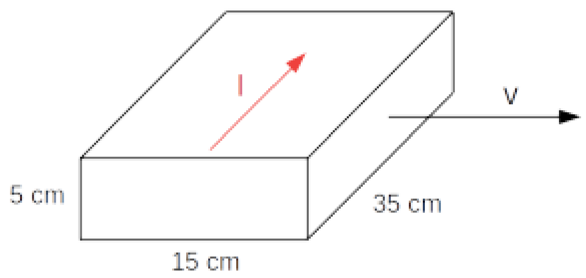


a) Wie groß ist die Kraft, die auf ein Projektil der Masse m wirkt, während es sich auf dem Schlitten mit Breite b und mit Masse M durch den Lauf der Waffe bewegt? Nehmen sie an, innerhalb der Railgun herrscht ein Magnetfeld mit konstanter Flussdichte $\mid B \mid= const$ und durch den Schlitten fließt ein konstanter Strom I.

b)) Mit dieser konstanten Kraft wird das Projektil, nun über eine Waffenlaufstrecke l beschleunigt. Welche Geschwindigkeit v_{end} , hat das Projektil am Ende des Waffenlaufes, wenn es sich am Anfang der Bewegung in Ruhe befindet?

c) Experimentelle Waffen des US-Militärs schaffen eine Projektilgeschwindigkeit von $v_{end} = 7.5\frac{km}{s}$ (zum Vergleich, Leopard-2-Panzer verschießt seine Granaten mit $v_{end} = 1.7\frac{km}{s}$). Diese Waffen haben meist einen Waffenlauf mit $l = 15m$ Länge, einen Waffenlaufdurchmesser von $d = 35cm$ und ein inneres Magnetfeld von$B = 0,5T$. Welche Stromstärke wird benötigt, um das Projektil mit Masse $m = 5kg$ auf $v_{end} = 7.5\frac{km}{s}$ zu beschleunigen?

d) Welche technische Herausforderung besitzen Railguns heutzutage? Betrachten sie dazu, die Leistung, die eine solche Waffe bringen muss. Nehmen Sie dazu an, dass der Schlitten aus Kupfer besteht und als Quader gemäß der Skizze genähert werden kann.
Hinweis: Die elektrische Leitfähigkeit von Kupfer beträgt $\sigma = 58 \cdot 10^6 \frac{l}{\Omega m}$



Lösung:

a) Die hier wirkende Kraft ist die Lorentzkraft, die auf die Schiene oder, besser gesagt, auf die bewegten Ladungen in der Schiene wirkt:

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \tag{9}$$

Wir müssen uns nun klar machen, dass die Bewegung der Elektronen durch den Strom I entlang der Breite der Schiene geschieht. Die Lorentzkraft wirkt auf jeden Ladungspunkt der Schiene. Das bedeutet, dass auf eine breitere Schiene eine größere Lorentzkraft wirkt. In Formeln ausgedruckt:

$$q\vec{v} = b\vec{I} \tag{10}$$

Einsetzen in die Formel für die Lorentzkraft:

$$\mid \vec{F}_L \mid = F_L = b \cdot \mid \vec{I} \times \vec{B} \mid = b \cdot I \cdot B \sin(\Theta) \tag{11}$$

Wie wir in der Skizze erkennen können sind I und B immer orthogonal, sodass $\sin(\Theta) = 1$. Damit sind wir auch schon beim Ergebnis:

$$F_L = b \cdot I \cdot B \tag{12}$$

b) Aus der Bewegungsgleichung folgt:

$$a_L = \frac{F_L}{m} = \frac{b \cdot I \cdot B}{m} \tag{13}$$

Wir können insgesamt über eine Strecke l beschleunigen, da dies die Länge des Waffenlaufes ist. Wir erhalten für die Zeit t_B, die das Projektil beschleunigt wird:

$$l = \frac{1}{2} a_L \cdot t_B^2 \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{2l}{a_L}} \tag{14}$$

Eingesetzt in die Formel für die Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung:

$$v_{end} = a_L \cdot t_B = \sqrt{2l \cdot a_L} = \sqrt{\frac{2l \cdot b \cdot I \cdot B}{m}} \tag{15}$$

c) Um diese Frage zu lösen, müssen wir nur die Formel aus Teilaufgabe (b) umstellen:

$$v_{end} = \sqrt{\frac{2l \cdot b \cdot I \cdot B}{m}} \Rightarrow I = \frac{m \cdot v_{end}^2}{2l \cdot b \cdot B} \tag{16}$$

Die einzige Schwierigkeit besteht hierbei den Waffendurchmesser mit der Schlittenbreite zu identifizieren d = b = 35cm. Wir setzen die in der Angabe angegebenen Werte ein und erhalten:

$$I \approx 5.36 \cdot 10^7 A \tag{17}$$

Es wird also ein gewaltiger Strom benötigt!

d) Die Leistung ergibt sich nach dem Ohmschen Gesetz als:

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R \tag{18}$$

Wir müssen also nur den elektrischen Widerstand des Schlittens bestimmen. Wir kennen bereits das Gesetz, dass uns den elektrischen Widerstand eines Leiters abhängig von seiner Geometrie gibt:

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot A} \tag{19}$$

Hierbei ist natürlich A die Fläche, durch die der Strom fließt und l die Länge der Richtung in die der Strom fließt. Wir setzen ein:

$$R \approx 8.05 \cdot 10^{-7} \Omega \tag{20}$$

Dies ergibt eine benötigte Leistung von:

$$P \approx 2.31 \cdot 10^9 W \tag{21}$$

Obwohl wir diese Leistung nur sehr kurz bringen müssen, stellt es uns vor große Probleme eine solch hohe Leistung überhaupt aufzubringen.
Heutige Railgun-Lösungen stehen vor folgenden Problemen:

i) Ein Strom von mehreren Megaampere erhitzt die Schienen und den Schlitten derart, dass sich schon nach wenigen Schüssen die Railgun verformt und sie damit nutzlos wird

ii) Es ist bis heute schwer eine Leistung im Gigawatt-Bereich auch nur kurze Zeit aufzubringen

iii) Die vielen Spulen, Kondensatoren, etc., die benötigt werden, um die Railgun zu betreiben machen die Waffe groß, schwer und unhandlich.