Aufgabe 29

Ein Stromkreis bestehe aus einer Spannungsquelle mit Spannung U_0 in Reihe mit einer Induktivität(Spule) $L = 0.8\text{H}$ und einem Widerstand $R = 10\Omega$. Zu dem Zeitpunkt $t = 0$ werde die Spannungsquelle eingeschaltet. Nach welcher Zeit hat die Stromstärke 99% des Endwertes erreicht?

Lösung

Nach dem 2. *Kirchhoffschen* Gesetz ist die Summer der Spannungsabfälle an Spule U_L und Widerstand U_R gleich dem Spannungsabfall der Spannungsquelle:

$$U_0 = U_L + U_R = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{1}$$

Dies ist eine Differentialgleichung für die Stromstärke. Wir lösen sie durch Trennung der Variablen und nutzen, dass der Maximalwert der Stromstärke gegeben ist durch $I_0 = U_0/R$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} + I = I_0 \Leftrightarrow -\frac{dI}{I_0 - I} \overset{I_0=const}{=} -\frac{d(I_0 - I)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L}dt \tag{2}$$

Nach Integration beider Seiten und beachtung der Anfangswerte $t = 0, I = 0$ erhält man:

$$(2) \Leftrightarrow [\ln(I_0 - I)]_0^I = ln\left(1 - \frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t \tag{3}$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \tau = L/R = 0.08\text{s} \tag{4}$$

Dabei bezeichnet man τ als die Zeitkonstante des Systems. Setzt man nun an:

$$\frac{I}{I_0} \overset{!}{=} 99\% = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow t = -\tau\ln 0.01 = \tau\ln 100 \approx 0.37\text{s}$$

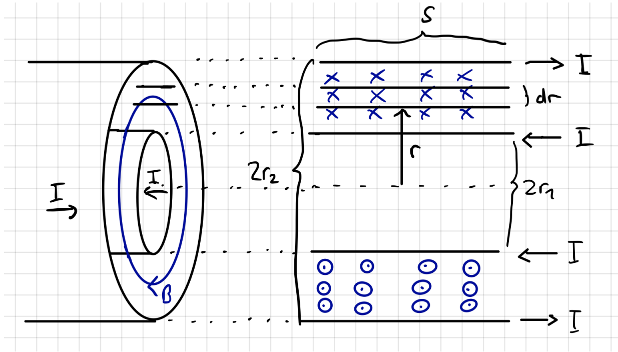
Aufgabe 30

Induktivität eines Koaxialkabels:

a) Bestimmen Sie die Induktivität pro Längeneinheit eines Koaxialkabels, dessen Innenleiter den Radius r_1 und dessen Außenleiter den Radius r_2 hat. Die Leiter führen beide in entgegengesetzter Richtung den Strom I.

b) Wie viel Energie wird pro Längeneinheit in diesem Koaxialkabel gespeichert?

c) Wo ist die Energiedichte am größten?



Lösung

zu a):
Die Induktivität L ist definiert über den magnetischen Fluss Φ_m. Daher bestimmen wir zunächst den magnetischen Fluss. Die Feldlinien von $\vec{B}$ sind Kreise um den Innenleiter. Mithilfe des Ampere'schen Gesetzes folgt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r}$$

Der magnetische Fluss durch ein Rechteck der Breite dr und Länge s entlang des Leiters mit Abstand r vom Mittelpunkt ist:

$$d\Phi_m = B(sdr) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} sdr$$

Durch Integration erhält man schließlich den gesamten Fluss durch einen Abschnitt der Länge s:

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \frac{\mu_0 I s}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Durch das Kabel fließt natürlich nur ein Strom, wenn Außen- und Innenleiter kurzgeschlossen werden. Dann entspricht das Kabel einer einzigen Windung, also $N = 1$. Folglich ist die Selbstinduktivität für einen Abschnitt der Länge s:

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 s}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Damit ist die Induktivität pro Längeneinheit:

$$\frac{L}{s} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

unabhängig vom Strom I!

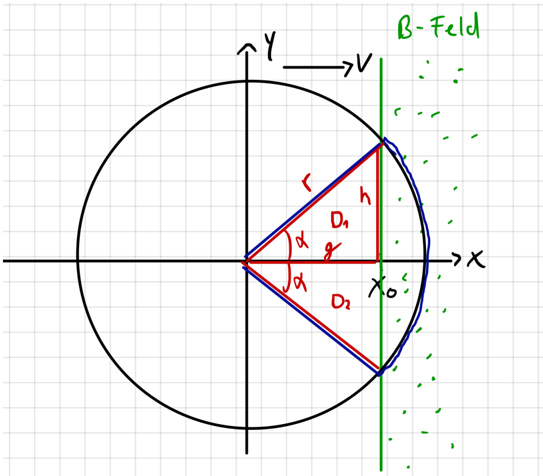
zu b):
Die Energie im Magnetfeld ist gegeben durch $W_m = \frac{1}{2} L I^2$. Mit der Formel aus a) erhält man für die Energie pro Längeneinheit:

$$\frac{W_m}{s} = \frac{0.5 L I^2}{s} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

zu c):
Da das Magnetfeld $B(r) \propto \frac{1}{r}$ ist es betraglich am größten für kleine r. Da auch die gespeicherte Energie von B abhängt ist diese in der Nähe der Oberfläche des Innenleiters am größten.

Aufgabe 31

Eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius R bewege sich innerhalb der x-y-Ebene mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung. Im Bereich $x_0 > 0$ wirkt ein homogenes Magnetfeld in z-Richtung. Berechnen Sie die in der Leiterschleife induzierte Spannung $U(t)$ und skizzieren Sie diese anschließend.



Lösung

Die Fläche A_M der Leiterschleife, die vom Magnetfeld durchsetzt wird, ist die Differenz eines Kreissegments A_{KS} und eines Dreiecks A_D:

$$
\begin{aligned}
A_M &= A_{KS} - A_D = A_{KS} - (A_{D1} + A_{D2}) \\
A_{D1} &= A_{D2} = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2}(r\cos\alpha)(r\sin\alpha)) = \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha\cos\alpha \\
A_{KS} &= \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} r^2 (2\alpha) = r^2\alpha, \quad \alpha \text{ im Bogenmaß} \\
\Rightarrow A_M &= r^2\alpha - r^2 \sin\alpha\cos\alpha = r^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Bewegung der Leiterschleife hängt der Winkel α von der Zeit ab:

$$\cos\alpha(t) = \frac{r - vt}{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\cos\alpha = \dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t) = \frac{v}{r}$$

Dabei befindet sich der Ring zur Zeit $t = 0$genau außerhalb des Feldes. Damit folgt nun:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a(\alpha)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} &= r^2(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\dot{\alpha}\\ &= r^2(1-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha)\dot{\alpha}\\ &= 2r^2\dot{\alpha}\sin^2\alpha\\ &= 2\frac{v^2}{\dot{\alpha}}\end{aligned}$$

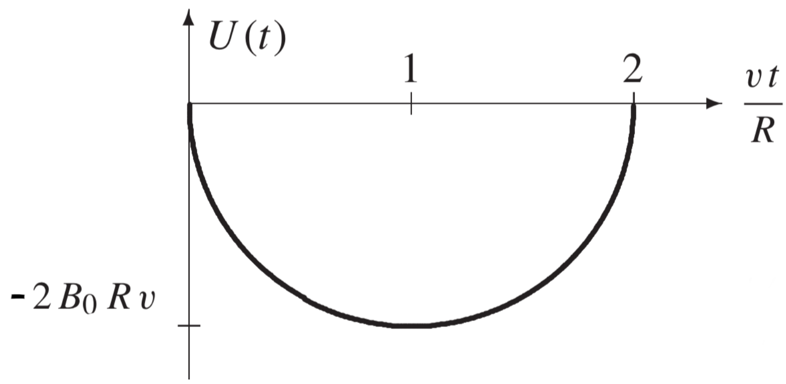
Dabei ist die Ableitung von α:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos^{-1}\frac{r-vt}{r} = \frac{v}{r}\left[1-\frac{(r-vt)^2}{r^2}\right]^{-1/2}\\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a(\alpha)}{\mathrm{d}t} &= 2vr\sqrt{\frac{vt}{r}\left(2-\frac{vt}{r}\right)}\end{aligned}$$

Mit dem magnetischen Fluss $\Phi_m(t) = \int B da = B_0 a(\alpha)$ bestimmen wir die induzierte Spannung:

$$U(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_M = -B_0\frac{\mathrm{d}a(\alpha)}{\mathrm{d}t} = -2B_0 rv\sqrt{\frac{vt}{r}\left(2-\frac{vt}{r}\right)}$$

Substituiert man geschickt $\eta = U/(2B_0 rv)$ und $\xi = vt/r$ so ergibt dies $\eta^2 = 2\xi - \xi^2$, also einen Kreis mit dem Mittelpunkt bei $(\xi, \eta) = (1, 0)$.



Aufgabe 32

Das Magnetfeld einer lang gestreckten Feldspule hat die Flussdichte 3.1mT. In der Feldspule befindet sich eine Induktionsspule mit $N = 100$ Windungen und einer Querschnittfläche von $A = 6.5\text{cm}^2$. Berechnen Sie die mittlere induzierte Spannung, wenn die Feldspule ausgeschaltet wird. Dabei fällen die Achsen beider Spulen zusammen und der Ausschaltvorgang dauere $t = 10\mu$s.

Lösung

Die Induzierte Spannung ist durch die Änderung des Flusses und die Windungszahl der Induktionsspule gegeben:

$$U_{ind} = -N\dot{\Phi} = -N(\dot{AB}) \overset{A=const}{=} -NA\dot{B} = -NA\frac{\Delta B}{\Delta t}$$
$$= -NA\frac{B^f - B^i}{10\mu\mathrm{s}} \overset{B^f=0}{=} NA\frac{B^i}{10\mu\mathrm{s}} \approx 20mV$$

Dabei ist B^f der Betrag des Magnetfeldes zum Endzeitpunkt, und B^i zu Beginn.