Aufgabe 17

Wie im Hinweis bereits angegeben, wenden wir die Maschenregel an. Es muss also

$$\mathcal{U}_R + \mathcal{U}_C = 0$$

Ferner gelten die folgenden Gleichungen

$$\mathcal{U}_R = R \cdot I \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad Q = C\mathcal{U}_C$$

Mit diesen Beziehungen und der Maschenregel erhält man die Differentialgleichung

$$RC\frac{d\mathcal{U}_C}{dt} + \mathcal{U}_C = 0$$

Diese Differentialgleichung besitzt eine Lösung (*Satz von Picard-Lindelöf*) und ist von der Form einer Exponentialfunktion. Damit ist der zeitliche Verlauf der Spannung gegeben durch

$$\mathcal{U}_C(t) = \mathcal{U}_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

und für den zeitlichen Verlauf des Stromes erhält man dementsprechend

$$I(t) = -\frac{\mathcal{U}_l}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Aufgabe 18

a) Wir betrachten das Problem infinitesimal. Der Widerstand dR des Längenelementes dx ist gegeben durch

$$dR = \rho_{el}\frac{dx}{A(x)}$$

wobei mit $A(x)$ der Querschnitt des Leiters im Punkte x gemeint ist. Eine Parametrisierung des Querschnittes ist

$$A(x) = \frac{\pi}{4}(d(x))^2 = \frac{\pi}{4}\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{L}x\right)^2$$

Der Gesamtwiderstand ergibt sich mittels Integration über die gesamte Leiterlänge

$$R = \frac{4\rho_{el}}{\pi}\int_0^L \left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{L}x\right)^{-2} dx$$

Wir substituieren $a = d_1$ und $b = \frac{d_2 - d_1}{L}$. Damit folgt

$$\frac{4\rho_{el}}{\pi}\int_0^L \frac{dx}{(a + bx)^2}$$

Aufintegration und Evaluierung an den Integralgrenzen ergibt

$$\frac{4\rho_{el}}{\pi}\frac{L}{d_1 d_2}$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte liefert

$$R = \frac{4 \cdot 8.71 \times 10^{-8}}{\pi}\frac{1}{0.25 \times 10^{-6}\Omega} = 0.44\Omega$$

b) Bei einer Spannung von $\mathcal{U} = 1V$ fließt ein Strom von

$$I = \frac{1}{0.44}A = 2.25A$$

Am gesamten Draht fällt die Leistung $P_{el} = \mathcal{U} \cdot I = 2.25W$ ab, die sich aber nicht gleichmäßig am ganzen Draht verteilt. Aus $dP_{el} = I^2 dR$ folgt

$$P_{el}(x) = I^2 \rho_{el} \frac{dx}{A(x)}$$

Die am Draht verheizte Leistung ist demnach umgekehrt proportional zum Querschnitt.

Aufgabe 19

a) Die Taylor-Reihe einer gut gelaunten Funktion ist allgemein gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

Wir entwickeln also die Funktion bis zur ersten Ordnung.Man erhält

$$f(\Delta T) = R_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

b) Es ist $\Delta R = 1.56\Omega$. Damit folgt $\Delta T = \frac{\Delta R}{\alpha R_0} = 50K$. Damit folgt für die Endtemperatur $T = 70°C$.

Aufgabe 20

a) Es gilt

$$\frac{U'}{U} = \frac{R_2 R/(R_2+R)}{R_1 + R_2 R/(R_2+R)} = \frac{R_2 R}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R} = \left(\frac{R_1}{R} + \frac{R_1}{R_2} + 1\right)^{-1}$$

Steigung bei $R = 0$

$$\frac{dU'}{dR} = U \frac{(R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R) R_2 - R_2 R (R_1 + R_2)}{(R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R)^2}$$

Damit wächst $U' = f(R)$ mit steigendem R monoton an.

b) Es sei nun $R = 100\Omega$. Dann gilt

$$\frac{U'}{U} = \frac{70\Omega \cdot 100\Omega}{150\Omega \cdot 70\Omega + 150\Omega \cdot 100\Omega + 70\Omega \cdot 100\Omega} = 0.215$$

und somit $U' = 47.4V$. Für $R >> R_1$ gilt

$$\frac{U'}{U} = \frac{70\Omega}{150\Omega + 70\Omega} = 0.318$$

und somit $U' = 70.0V$.

c) Es ist

$$\tilde{R} = R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R} = 150\Omega + \frac{70 \cdot 100}{70 + 100}\Omega = 191.2\Omega$$

und $G = 1/R = 5.23 \times 10^{-3}$Siemens. Für die Stromstärke gilt

$$I_1 = \frac{U}{\tilde{R}} = \frac{220V}{191.2\Omega} = 1.15A$$

$$I_2 = \frac{U'}{R_2} = \frac{47.4V}{70\Omega} = 0.68A$$

$$I_i = \frac{U'}{R} = \frac{47.4V}{100\Omega} = 0.47A = I_1 - I_2$$

und für die Leistung

$$P = \frac{(U')^2}{R} = 22.5W$$

d) Wir bestimmen die maximale Leistung. Es ist

$$P = \frac{(U')^2}{R} = U^2 R_2^2 \frac{R}{(R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R)^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = U^2 R_2^2 \frac{R_1 R_2 - R_1 R - R_2 R}{(R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R)^3}$$

Die Bedingung für ein Extremum lautet

$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow R_1 R_2 = (R_1 + R_2) R \Leftrightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 47.7\Omega$$

Damit folgt für den Gesamtwiderstand $\tilde{R}$

$$\tilde{R} = 150\Omega + \frac{70\Omega \cdot 47.7\Omega}{(70 + 47.7)\,\Omega} = 178.4\Omega$$

Aus Aufgabenteil a) wissen wir bereits

$$\frac{U'}{U} = \left(\frac{R_1 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} + \frac{R_1}{R_2} + 1 \right)^{-1} = 0.159$$

und $U' = 35.0V$. Für die Stromstärken gilt $I_1 = 1.23A$, $I_2 = 0.50A$ und $I_i = 0.73A$

$$P_{max} = \frac{(U')^2}{R} = \frac{(35.0V)^2}{47.7\Omega} = 25.7W$$

e) Aus den Ergebnissen von b) und d) wissen wir bereits, dass

$$\frac{U'}{U} = \frac{1}{2} \left(\frac{U'}{U} \right)_{unbelastet}$$

also gilt $U' = 70V$ unbelastet. Der Innenwiderstand $RR_2/\,(R_1 + R_2)$ der Spannungsquelle ist gleich dem Innenwiderstand R des Verbrauchers, wenn die Leistung des Verbrauchers maximal wird.