Aufgabe 13

Ein Plattenkondensator (Plattenabstand d = 1mm, Plattengröße A = 5cm^2) sei mit einem Dielektrikum ($\epsilon_r = 7$) gefüllt. Am Kondensator liegt eine Spannung von 500V an. Berechne die:

a) Feldstärke E,

b) Flussdichte D im Kondensatorraum,

c) Ladung Q auf einer Platte des Kondensators,

d) Energie W_e des elektrischen Feldes im Kondensator,

e) Energiedichte w_e,

f) Polarisation P des Dielektrikums,

g) Oberflächenladung Q_P.

Nutze dazu die Formeln aus der Vorlesung oder aus Kapitel 1.7 im Demtröder Experimentalphysik 2.

Lösung

zu a): Nutze (1.42a): $E = U/d = 500\text{KV/m}$
zu b): Nutze (1.6.3): $D = \epsilon_r \epsilon_0 E = 31\mu\text{C/m}^2$
zu c): Aus dem Gaußschen Satz folgt für einen Plattenkondensator ohne Dielektrikum folgt:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$\Leftrightarrow E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Mit $D = \epsilon_0 E_{vak}$(1.63) folgt sofort:

$$E\epsilon_0 A = DA = Q = 15.5\text{nC}$$

zu d): Aus (1.49): $W = 0.5CUU = 0.5QU$ mit $Q = CU$ folgt sofort $W = 3.875\mu\text{J}$
zu e): Die Energiedichte ist definiert als Energie pro Volumen. Das Volumen in diesem Fall wird durch die Kondensatorflächen eingeschlossen und die Energie wurde in d) bereits berechnet. Somit folgt:

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{W_e}{Ad} = 7.75\text{J/m}^3$$

zu f): Nach (1.58): $P = \epsilon_0 \chi E$ mit $\chi = \epsilon_r - 1 = 6$ folgt $P = 26.6\mu\text{C/m}^2$
zu g): Nach (1.55): $Q_P = PA = 13.3\text{nC}$

Aufgabe 14

Bestimmen Sie für einen Zylinderkondensator der Länge l, Radius des inneren Zylinders R_i und Radius des äußeren Zylinders R_a ($R_i < R_a << l$) die:

a) Kapazität C,

b) Energie des elektrischen Feldes W_e.

Tipp: Bestimmen Sie zuerst den Ausdruck für das elektrische Feld $\vec{E}(r)$ und bestimmen Sie daraus durch $U = \int_{R_i}^{R_a} \vec{E} d\vec{r}$ die Spannung. Folgern Sie daraus schließlich die Kapazität C. Die Energie des elektrischen Feldes W_e erhalten Sie über die Relation für die Energiedichte $w_e = 0.5\epsilon_0 \vec{E}^2(r)$ und geeignete Integration.

Lösung

zu a):
Vernachlässigt man Randeffekte, so gilt aufgrund der Zylindersymmetrie $\vec{E}(r) = E\vec{e}_r$. Dann gilt nach dem Gaußschen Satz mit dem Zylindermantel als Gaußfläche für den Betrag des elektrische Feldes:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi r l) = \begin{cases} Q/\epsilon_0, & R_i \leq r \leq R_a \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Damit:

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}, \quad R_i \leq r \leq R_a$$

Wobei Q die Ladung auf dem inneren Zylinder ist. Nun erhält man über:

$$U = \int_{R_i}^{R_a} \vec{E} d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln(R_a/R_i)$$

die Spannung und aus:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_a/R_i)}$$

erhält man schließlich die Kapazität.

zu b): Die Energiedichte ist gegeben durch $w_e = 0.5\epsilon_0 \vec{E}^2(r)$. Man erhält schließlich die gesamte Feldenergie durch Integration der Energiedichte w_e über den Raum zwischen den Zylindern ($R_i \leq r \leq R_a$):

$$\begin{aligned} W_e = \int w_e dV &= \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 l^2} \int \frac{1}{r^2} dV \\ &= \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 l^2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{r^2} r dr d\phi dz \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l} \ln(R_a/R_i) = \frac{1}{2} C U^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 15

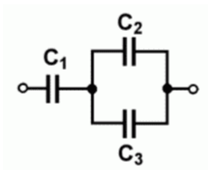
Zwei Platten mit einem Abstand von $d = 1$cm und einer Fläche von $A = 0.1\text{m}^2$ bilden einen Kondensator. Dieser wird auf $U_0 = 10$V aufgeladen. Anschließend wird die Spannungsquelle getrennt und DANACH ein Dielektrikum mit $\epsilon_r = 7$ eingeschoben.
(a) Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke, Kapazität und Ladung des Kondensators mit und ohne Dielektrikum.
(b) Wie ändern sich diese Größen, wenn der Kondensator während des Einschiebens mit der Spannungsquelle verbunden bleibt?

Lösung

zu a):
Ohne Dielektrikum gilt $E = U/d = 1$KV/m und die Kapazität ist gegeben durch die Geometrie des Aufbaus $C = \epsilon_0 A/d = 88.5$pF, sodass sich die Ladung zu $Q = CU = 885$pC ergibt.
Mit dem Dielektrikum gilt analog $C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d = 619.5$pF. Da keine weitere Ladung dazu oder abgeflossen ist, gilt $Q =$const und damit folgt für die Spannung $U = Q/C = 1.43$V und $E = U/d = 142.9$V/m.
zu b):
Die Spannungsquelle sorgt dafür, dass während des Einschiebens die Spannung konstant bleibt. Daraus ergibt sich analog wie bei a), dass $E = U/d = 1$kV/m $=$ const und $Q = CU = 6.195$nC.

Aufgabe 16

Bestimmen Sie die Gesamtkapazität der Anordnung in der Abbildung für $C_1 = 6\mu\text{F}, C_2 = 4\mu\text{F}$ und $C_3 = 8\mu\text{F}$. Bestimmen Sie außerdem die Ladung und die Spannung die sich zwischen Anfangs- und Endpunkt befindet, für den Fall dass die Kondensatoren mit einer 12V Spannungsquelle verbunden waren.



Lösung

Die Kondensatoren C_2 und C_3 sind parallel geschaltet:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 12\text{pF}$$

C_1 ist mit C_{23} in Reihe geschaltet:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} \Rightarrow C_{ges} \equiv C = 4\mu\text{F}$$

Die von der Spannungsquelle aus fließende Gesamtladung ist bestimmt durch die Spannung U und die Gesamtkapazität C durch $Q = CU = 4\mu\text{F} \cdot 12\text{V} = 48\mu\text{C}$. Sowohl C_1 als auch C_{23} tragen diese Ladung Q. Damit ergibt sich die Spannung U_1, die an C_1 anliegt zu:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = 8\text{V}$$

Die am Kondensator C_{23} anliegende Spannung U_{23} ist dann:

$$U_{23} = \frac{Q}{C_{23}} = 4\text{V}$$

Da die Kondensatoren C_2 und C_3 parallel geschaltet sind, liegt diese Spannung U_{23} auch an jedem einzelnen an $U_2 = U_3 = U_{23} = 4\text{V}$. Abschließend erhält man dann für die Ladung der einzelnen Kondensatoren:

$$Q_2 = C_2 U_2 = 16\mu\text{C}$$
$$Q_3 = C_3 U_3 = 32\mu\text{C}$$