# Aufgabe 1

i) Man legt das Koordinatensystem so, dass $\vec{e}_z$ in Richtung von $\vec{r}$ liegt, und benutze zu Integration Kugelkoordinaten $\left(r^{'}, \theta^{'}, \phi^{'}\right)$. Dann gilt

$$|\vec{r} - \vec{r}^{'}| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\theta')}$$

Nach der Integration über $\phi^{'}$ und $\cos\left(\theta^{'}\right)$ erhält man

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0 r} \int_0^R r^{'} \left(|r - r^{'}| - \left(r + r^{'}\right)\right) dr^{'}$$

dabei ist $\rho_0 = \frac{3q}{4\pi R^3}$ die Ladungsdichte der Kugel. Wegen der Betragsfunktion muss man hier eine Fallunterscheidung vornehmen. Für $r \leq R$ liegt $P$ innerhalb des Integrationsbereichs $0 \leq r^{'} \leq R$ . Man muss den Integrationsbereich aufteilen in $0 \leq r^{'} \leq r$ mit $|r - r^{'}| = r - r^{'}$ bzw. $r \leq r^{'} \leq R$ mit $|r - r^{'}| = r^{'} - r$. Für $r > R$ liegt $P$ außerhalb des Integrationsbereichs, d.h. $r > r^{'}$. Die $r^{'}$ Integration liefert

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{3R^2 - r^2}{2R^3} & \text{für} \quad 0 \leq r \leq R \\ \frac{1}{r} & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

ii) Da $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$ , liefert der Gradient in Kugelkoordinaten das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\vec{e}_r$, also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{e}_r \begin{cases} \frac{r}{R^3} & \text{für} \quad 0 \leq r \leq R \\ \frac{1}{r^2} & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

iii) Aufgrund der Kugelsymmetrie der Ladungsdichte muss das $\vec{E}$ -Feld die Gestalt $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r$ haben. Daher wählt man für das Flussintegral den Rand eines kugelförmigen Volumens $K$ mit dem Radius $r$ um den Ursprung. Dann gilt

$$\oint_K \vec{E} d\vec{a} = 4\pi r^2 E(r)$$

Für $r \leq R$ befindet sich die Ladung $\frac{qr^3}{R^3}$ im Volumen $K$ , für $r \geq R$ enthält $K$ die gesamte Ladung $q$. Damit ergibt sich wieder das Ergebnis aus $ii$).

# Aufgabe 2

Zuerst parametrisiert man die Ladungsdichte. Diese lautet

$$\rho\left(\vec{r}^{'}\right) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{für} \quad r^{'} = R \text{ und } \frac{\pi}{2} < \theta^{'} < \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit der konstanten Flächenladungsdichte$\sigma_0 = \frac{Q}{2\pi R^2}$. Für $\vec{r} = r\vec{e}_z$ gilt

$$|\vec{r} - \vec{r}^{'}| = \sqrt{(r')^2 + z^2 - 2r' z \cos(\theta')}$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi(z\vec{e}_z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{Rz}\left(|R + z| - \sqrt{R^2 + z^2}\right)$$

## Aufgabe 3

a) Kapazität des Kondensators

i) Kapazität ohne Dielektrikum. Es gilt

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8.85 \times 10^{-12} CV^{-1} m^{-1} \frac{2m \cdot 0.1m}{0.01m} = 177\text{pF}$$

wobei $A$ die Fläche des Kondensators und $d$ der Abstand der Platten ist.

ii) Bei partieller Füllung mit einem Dielektrikum verhält sich der gesamte Kondensator wie zwei parallelgeschaltete Kondensatoren. Ein ungefüllter mit einem Viertel der Fläche und ein gefüllter mit drei Viertel der Fläche. Parallelschaltung bei Kondensatoren bedeutet, dass sich die Kapazitäten addieren.

$$C_{ges} = \frac{1}{4}\epsilon_0 \frac{A}{d} + \frac{3}{4}\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = 336.3\text{pF}$$

b) i) Spannung konstant:

$$U(h) = U_0$$

Die Kapazität kann analog zu $a$) wieder als Summe der Kapazitäten eines gefüllten und eines ungefüllten Kondensators berechnet werden. Die Fläche des gefüllten Kondensators in Abhängigkeit von der Füllhöhe ist

$$A_g(h) = \frac{h}{h_{max}} A$$

mit der maximalen Füllhöhe $h_{max} = 2\text{m}$. Für den ungefüllten Teil erhält man entsprechend

$$A_{leer}(h) = \left(1 - \frac{h}{h_{max}}\right) A$$

Für die Gesamtkapazität erhält man

$$C(h) = C_0 \left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{h_{max}}\right)$$

Für die Ladung und Energie erhält man damit

$$Q(h) = CU = \left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{h_{max}}\right) Q_0$$

$$W(h) = \frac{1}{2} CU^2 = \left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{h_{max}}\right) W_0$$

ii) Spannungsquelle entfernt, d.h. Ladung konstant.

$$U(h) = \left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{h_{max}}\right)^{-1} U_0$$

$$W(h) = \left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{h_{max}}\right)^{-1} W_0$$

## Aufgabe 4

Um zu beweisen, dass nur der Monopolterm ungleich Null ist, muss man zeigen, dass gilt

$$\phi\left(R\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho}{|\vec{R}-\vec{r}|}dV = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Alle Ladungen im Kreisring mit Radius $y$, dessen Ebene den Abstand $x$ vom Mittelpunkt $x = y = 0$ hat, $dQ = \rho 2\pi dydx$, habe den gleichen Abstand $r = \sqrt{y^2 + (R-x)^2}$von $P\left(R\right)$ und liefern zum Potenzial den Beitrag

$$d\phi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\frac{ydy}{\sqrt{y^2 + (R-x)^2}}dx$$

Der Beitrag der gesamten Kreisscheibe ist dann

$$\phi_{Scheibe} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + (R-x)^2}}dx$$

Integration von $x = -a$ bis $x = a$ liefert

$$\phi_{Kugel} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{a^3}{4\pi\epsilon_0 R}$$