Aufgabe 5

Arbeit beim elektrischen Aufladen

Eine Kugel aus Metall habe den Radius $R = 5\text{cm}$ und sei zu beginn elektrisch neutral geladen.

a) Welche Arbeit W ist erforderlich, um die Kugel auf die Ladung $Q = 10\mu\text{C}$ aufzuladen?

b) Welche Spannung liegt dann an der Kugel an?

Lösung

zu a):
Trägt die Kugel in einem Zwischenstadium die Ladung q, so herrscht an ihrer Oberfläche das Potential $\phi(q) = q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Um die Kugel um dq aufzuladen muss gegen die bereits vorhandene gleichnamige Ladung die Arbeit $dW = \phi(q)dq$ verrichtet werden. Insgesamt ergibt sich für die Arbeit also:

$$W = \int_0^Q \phi(q)dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = 9J$$

(siehe dazu auch *Demtröder Experimentalphysik 2 S.22 Kapitel 1.6 (4.Auflage)*)
zu b):
Die Spannung U ist gleich der Potentialdifferenz zwischen der Kugeloberfläche (auf der sich die Ladung befindet) und der Unendlichkeit:

$$U = \phi(R) - \phi(\infty) = \phi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 1.8MV$$

Bemerkung: Man erkennt bei Vergleich von a) und b): $W = QU/2$

Aufgabe 6

Elektrisches Feld eines Kreisrings

Auf einem dünnen Kreisring mit Radius a befindet sich die Ladung Q gleichförmig verteilt. Bestimmen Sie das elektrische Feld an einem Punkt P auf der Achse, die durch das Zentrum geht (siehe Abbildung 1). Die Ladung pro Längenheit (C/m) werde mit λ bezeichnet. Bilden sie außerdem den Grenzfall $(x \to \infty)$.

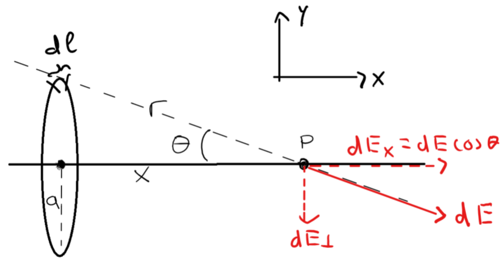


Abbildung 1: Ladungsring

Tipp: Überlegen Sie welche Vektorkomponenten aus Symmetriegründen nicht zum elektrischen Feld am Punkt P beitragen.

Lösung

Das elektrische Feld $d\vec{E}$ eines bestimmten Ringabschnitts der Länge dl hat den Betrag:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}$$

Der gesamte Ring hat eine Länge, die dem Kreisumfang $2\pi a$ entpricht. Somit ist die Ladung dQ eines Ringsegments der Längge dl gegeben durch:

$$dQ = Q\left(\frac{dl}{2\pi a}\right) = \lambda\, dl$$

Dabei bezeichnet $\lambda = Q/2\pi a$ die Ladung pro Längeneinheit. Eingesetzt in dE liefert das:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}$$

Wie in Abbildung 1 zu sehen, kann das E-Feld eines Längenstücks in zwei Komponenten aufgeteilt werden. Eine, die in radiale Richtung $dE_\perp$, also senkrecht von der x-Achse weg zeigt, und eine die entlang der x-Achse dE_x zeigt. Das gesamte Feld am Ort P wird im folgenden durch Superposition, also die Summation aller Ringelemente, berechnet. Zu beachten ist, dass ein gleich langer Ringabschnitt dl, der dem abgebildeten dl genau gegenüberliegt, ein $d\vec{E}$ erzeugt, dass die abgebildete Komponente $dE_\perp$ gerade aufhebt. Es summieren sich also nur die Komponenten dE_x, alle Komponenten $dE_\perp$ heben sich auf. Das resultierende E-Feld verläuft damit parallel zur x-Achse. Man erhält also(Im Grenzfall geht die Summation in ein Integral über):

$$E = E_x = \int dE_x = \int \cos\theta dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int \frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

Da es sich um ein Zylinder-symmetrisches Problem handelt wird nun Zylinderkoordinaten übergegangen. Dann ist $\cos\theta = x/r$ mit $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$ und man erhält schließlich:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x 2\pi a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Im Grenzfall großer Entfernung ($a << x$) verhält sich der Ring wie eine Punktladung denn:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} (x \rightarrow \infty)$$

Aufgabe 7

Massiv geladene Kugel

Auf einer nicht leitfähigen Kugel mit Radius r_0 sei die Ladung Q homogen verteilt. Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Satzes

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{eingeschl.}}{\epsilon_0}$$

das elektrische Feld a) innerhalb und b) außerhalb der Kugel. c) Tragen Sie anschließend den Betrag des elektrischen Feldes E gegen den Radius r auf.

Lösung

In einer Kugel aus Metall ist die Ladung homogen verteilt. Aus Symmetrie-Gründen hängt E somit nur von r und nicht etwa von den Azimut- und Polarwinkel θ, ϕ ab.
zu a):
Als geschlossene Fläche für die Anwendung des Gaußschen Gesetzes wählen wir eine Kugel mit Radius $r > r_0$. Da E nur von r abhängt und die Eingeschlossene Ladung die Gesamtladung ist $Q_e ingelsch. = Q$ folgt:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > r_0) \end{aligned}$$

Wobei $(4\pi r^2)$ die Oberfläche der Gauß-Kugel ist. Es fällt auf, dass das Feld außerhalb der Kugel gleich dem einer Punktladung mit Ladung Q am Ort des Zentrums der Kugel ist.
zu b):
Im inneren der Kugel wählen wir eine konzentrische Kugel mit Radius $r < r_0$. Aus

Gründen der Symmetrie verläuft auch hier das E-Feld radial, also senkrecht durch die Kugeloberfläche. Somit erhalten wir:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2)$$

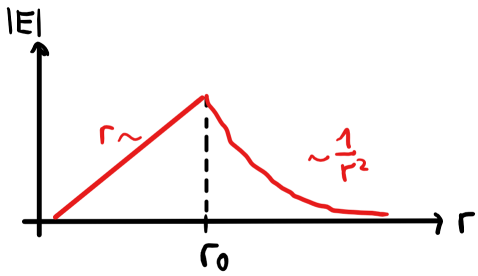
Die eingeschlossene Ladung ist nun ein Teil der Gesamtladung abhängig vom Radius. Die Ladungsdichte ρ beschreibt die Ladung pro Volumen. Bei einer homogen geladenen Kugel ist die Ladungsdichte für die gesamte Kugel konstant. Der Anteil der Ladung von der Gesamtladung Q, der von einer Kugel mit Radius r eingeschlossen ist, entspricht somit der Verhältnis des eingeschlossenen Volumens zum Gesamtvolumen (aber nur wenn die Ladungsdichte konstant ist!). Oder anders:

$$Q_{einglschl.} = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho} \right) Q = \frac{r^3}{r_0^3} Q$$

In den Gaußschen Satz eingesetzt erhält man so für das E-Feld innerhalb der Kugel:

$$E(4\pi r^2) = \frac{r^3}{r_0^3} \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^3} r \quad (r < r_0)$$

Das Feld wächst also bis $r = r_0$ linear an und fällt dann mit $1/r^2$ ab.
zu c):



Aufgabe 8

Gaußscher Satz

Gegeben sei das elektrische-Feld $\vec{E}$:

$$\vec{E} = ax\vec{e_x} + ay\vec{e_y} + az\vec{e_z}$$

und eine Kugel mit $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Verifizieren Sie den Gaußschen Satz, indem Sie beide Seiten explizit ausrechnen:

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{V(A)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV$$

Dabei ist die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$.
Tipp: Berechnen sie das Flächenintegral in Kugelkoordinaten, dann zeigt das Flächenelement $d\vec{A}$ in Richtung des Radialen-Einheitsvektors.

Lösung

Die Divergenz von V ist:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = a + a + a = 3a$$

Damit wird die rechte Seite des Gaußschen Satzes zu:

$$\int_{V(A)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV = 3a \int_{r \leq R} d^3r = 3a\frac{4\pi}{3}R^3 = 4\pi a R^3$$

Für das Flächenintegral auf der linken Seite ist es sinnvoll Kugelkoordinaten zu verwenden. Dabei wird als einschließende Fläche die Kugeloberfläche mit $(r = R)$ verwendet.

$$\begin{aligned}
d\vec{A} &= R^2 d\cos\theta d\phi \vec{e_r} \\
\vec{e_r} \cdot \vec{E} &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\,R\sin\theta\cos\phi \\ b\,R\sin\theta\sin\phi \\ c\,R\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= R(a\,\sin^2\theta\cos^2\phi + a\,\sin^2\theta\sin^2\phi + a\,\cos^2\theta) \\
&= R(a\sin^2\theta \cdot 1 + a\cos^2\theta) = Ra
\end{aligned}$$

In das Integral eingesetzt folgt damit:

$$\begin{aligned}
\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= R^2(Ra)\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\cos\theta = R^2(Ra)(1-(-1))\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= R^2(Ra) \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi a R^3
\end{aligned}$$

Damit ist die Gleichheit in diesem speziellen Fall gezeigt.