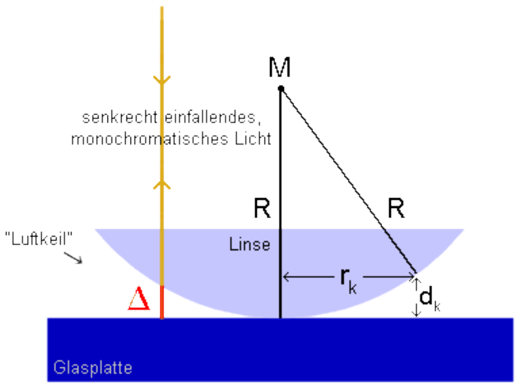
Aufgabe 51

Eine dünne plankonvexe Linse aus Flintglas ($n = 1.613$) liegt mit der sphärisch gekrümmten Fläche auf einer ebenen Glasplatte. Über einen halbdurchlässigen Spiegel wird senkrecht von Oben mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda = 589$nm beleuchtet. Mit einem Messmikroskop wird der Radius des dunklen *Newton*schen Ringes 2. Ordnung zu $r_2 = 915\mu$m und der Radius 7. Ordnung zu $r_7 = 1405\mu$m bestimmt. Man bestimme aus dieser Kenntnis den Radius R der Linse.



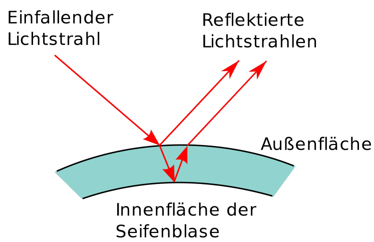
Nutzen Sie beim Lösen, dass $2R >> d_k$.

Lösung

Aus dem Bild ist ersichtlich, dass $r_k^2 = R^2 - (R - d_k)^2 = (2R - d_k)d_k \approx 2Rd_k$ für $2R >> d_k$. Aufgrund des Phasensprungs bei der Reflexion der Lichtstrahlen, die an der Glasplatte reflektiert werden, gilt die Auslöschungsbedingung $2d_k = k\lambda, k \in \mathbb{N}$. Damit folgt $kR = \frac{r_k^2}{\lambda}$ und mit $(7-2)R = \frac{r_7^2 - r_2^2}{\lambda}$ folgt $R = 386$mm.

Aufgabe 52

Eine Seifenhaut erscheint in dem Punkt, der dem Betrachter am nächsten liegt grün ($\lambda = 540$nm). Wie dick ist die Seifenblase dort mindestens? Nehmen Sie für den Brechungsindex $n = 1.35$ an.



Lösung

Von dem Punkt, der dem Betrachter am nächsten liegt, wird das Licht senkrecht reflektiert. Daher ist der Gangunterschied $\delta = 2d$, wobei d die Dicke der Seifenhaut ist. Das an der ersten Fläche (außen) reflektierte Licht erfährt einen Phasensprung von $\lambda/2$, da der Brechungsindex des Seifenwassers höher als der von Luft ist. Das an der zweiten Fläche reflektierte Licht erfährt keinen Phasensprung. Daher leuchtet grünes Licht, wenn der Gangunterschied $\delta = (2m+1)\lambda/2$ ist mit $m \in \mathbb{N}$. Es gilt also $2d = (2m+1)\lambda/2n$ und somit für den minimalen Gangunterschied ($m = 0$):

$$t = \frac{\lambda}{4n} = 100\text{nm}$$

Dies ist allerdings nur die minimale Dicke.

Aufgabe 53

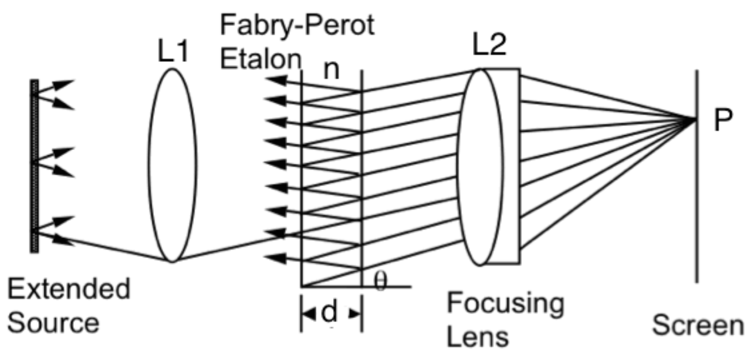
Ein Fabry-Perot-Interferometer mit Plattenabstand $d = 5$cm ($n = 1$) werde als Spektrometer für Licht der Wellenlänge $\lambda = 500$nm benutzt. Durch eine Linse der Brennweite $f = 50$cm werden die Interferenzerscheinungen als Ringe auf einem Schirm abgebildet.

a) Zeigen Sie, dass für den Gangunterschied δ zweier Strahlen nach dem Fabry-Perot Etalon die folgende Gleichung gilt: $\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nd \cos\theta$.

b) Welchen maximalen Radius kann der innerste Interferenzring annehmen? Überlegen Sie hierzu, was in diesem Fall bei $\theta = 0°$ zu beobachten sein muss.

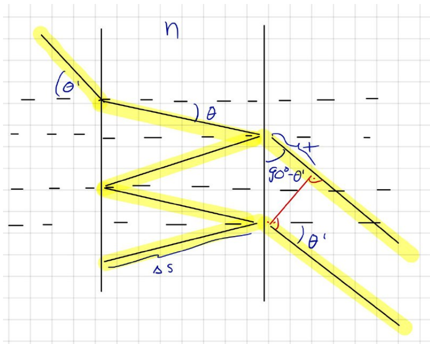
c) Wie groß sind Auflösungsvermögen und freier Spektralbereich (Bereich $\Delta\lambda$, innerhalb dessen Spektrallinien beobachtet werden können, ohne dass sich die Ringe unterschiedlicher Ordnung überlagern)?

d) Erläutern Sie die Anwendung eines Fabry-Perot Interferomenters als Frequenzfilter.



Lösung

zu a):
Wir bestimmen zunächst den Gangunterschied für das Fabry-Perot-Etalon:



Nach dem *Snellius*schen Brechungsgesetz folgt:

$$n_1 \sin\theta' = n_2 \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sin\theta'}{n}; n_2 = n, n_1 = 1(\text{Luft})$$

Außerdem gelten folgende geometrische Beziehungen:

$$\cos\theta = \frac{d}{\Delta s}$$
$$\cos(90^\circ - \theta') = \frac{x}{b} \Rightarrow x = 2d\tan\theta\cos(90^\circ - \theta') = 2d\tan\theta\sin\theta'$$
$$\tan\theta = \frac{b/2}{d} \Rightarrow b = 2d\tan\theta$$

und:

$$\text{Wegunterschied} = 2\Delta s - x$$
$$\text{optischer Wegunterschied } \eta = n2\Delta s - x$$
$$\text{Gangunterschied } \delta = 2\pi\frac{\eta}{\lambda}$$

Mit

$$\eta = 2\frac{nd}{\cos\theta} - 2d\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta' = 2\frac{nd}{\cos\theta} - 2d\frac{\sin\theta}{\cos\theta}n\sin\theta = 2nd\frac{1}{\cos\theta}(\underbrace{1 - \sin^2\theta}_{=\cos^2\theta})$$

folgt für den Gangunterschied:

$$\delta = 2\pi\frac{\eta}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda}nd\cos\theta$$

zu b):
Gesucht ist der Radius des ersten/innersten Interferenzringes. Ein Sichtbarer Ring endet immer mit einem Ring absoluter destruktiver Interferenz, dadurch wird er klar von anderen Ringen abgegrenzt. Also wird im Folgenden der Radius für den ersten Ring destruktiver Interferenz berechnet:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} d\cos\theta \stackrel{!}{=} \underbrace{(2m+1)\pi}_{\text{Bed. für destr. Interf.}} \quad \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{(2m+1)\lambda}{4d}\right)$$

Dabei ist m eine ganze Zahl. Da der $\arccos(x)$ für $x \to 1$ minimal wird, folgt:

$$\frac{(2m+1)\lambda}{4d} \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow m = \frac{2d}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

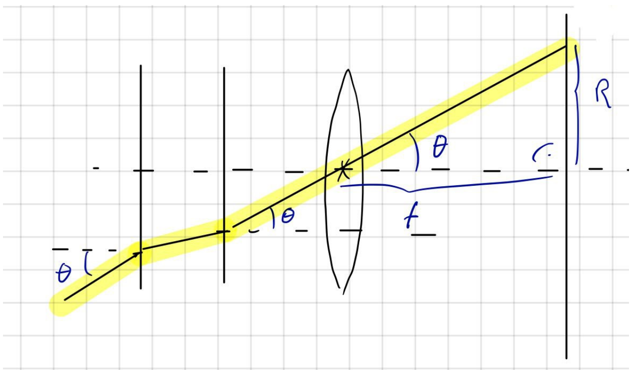
Nun muss m eine ganze Zahl sein, was hier noch nicht gilt, da $\frac{2d}{\lambda}$ mit den Werten aus der Aufgabenstellung ebenfalls eine ganze Zahl ist und in der Gleichung oben minus $1/2$ gerechnet wird, was auf eine ganz-rationale Zahl führt. Also wählen wir stattdessen für das minimale $m_{min} = \frac{2d}{\lambda} - 1$. Damit folgt für den Winkel destruktiver Interferenz:

$$\theta(m_{min}) = \arccos\left(\frac{2\lambda m_{min} + \lambda}{4d}\right) = \arccos\left(1 - \frac{\lambda}{4d}\right) \approx 0.2^\circ$$

Nun bestimmen wir den Radius des Rings destruktiver Interferenz. Dazu nutzen wir aus, dass der Schirm mit dem Abstand der Brennweite $f = 50\text{cm}$ von der Linse L2 entfernt steht und Strahlen durch das Zentrum der Linse nicht abgelenkt werden:

$$R = f\tan\theta \approx 1.75\text{mm}$$

Demnach ist der Radius des innersten, sichtbaren Ringes kleiner als 1.75mm. Das Maximum dieses Rings befindet sich genau im Zentrum bei $\theta = 0^\circ$ denn dort gilt genau $d = m\lambda$.



zu c): Für das Auflösungsvermögen zweier Wellenlängen ist entscheidend, dass die Maxima der einen Wellenlänge auf dem Minima der anderen liegen. Daraus folgern wir:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} d\cos\theta \stackrel{!}{=} 2\pi(m+1) \tag{1}$$

$$\delta' = \frac{4\pi}{\lambda'} d\cos\theta \stackrel{!}{=} 2\pi m, \tag{2}$$

denn für ein festes m o.B.d.A. gerade (konstruktive Interferenz) ist $(m+1)$ ungerade (destruktive Interferenz). Gleichungen (1) und (2) sind äquivalent zu folgender Aussage (z.B. durch ineinander Einsetzen):

$$m\lambda' = (m+1)\lambda \Leftrightarrow (\lambda + \Delta\lambda)m = (m+1)\lambda \Rightarrow m \cdot \Delta\lambda = \lambda$$

Dabei haben wir $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ eingeführt. Das Auflösungsvermögen ist dann:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m$$

und der Spektralbereich:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

zu d):

Mit einem Frequenzfilter will man einzelne Frequenzen des Lichts aus einer nicht monochromatischen Lichtquelle herausfiltern. Beim Fabry-Perot Interferometer erreichen verschiedene Wellenlängen bzw. Frequenzen unter unterschiedlichen Winkeln ihr Maximum auf dem Schirm. Bestrahlt man also das Interferometer mit unchromatischem Licht, kann man durch Einstellen der Auflösung eine bestimmte Frequenz unüberlagert von anderen Frequenzen erhalten (am Ort des Maximums).