Aufgabe 47

i) Für das Dreieck MAP gilt der Sinussatz

$$\frac{x_2}{R} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(90° + \beta + \gamma)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Damit ein Schnittpunkt existiert, muss $x_2 < R$ sein. Damit folgt $\sin(\beta) < \sin(\alpha - \beta)$ und somit

$$\frac{\sin(\alpha)}{n} < \sin(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \frac{h}{R} < n \cdot \sin(\alpha - \beta) \Rightarrow h < R \cdot n \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

Mit Hilfe von $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$ folgt

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{h}{R}\sqrt{1 - \frac{\sin(\alpha)^2}{n^2}} - \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{n}$$

Dies lässt sich umformen in $h < R \cdot \sqrt{n^2 - (1 - \cos(\alpha))^2}$

ii) Wie man Teil a) der unteren Abbildung entnimmt, ist der totale Ablenkwinkel $\delta = \alpha - \beta + (360° - 2\beta) + \alpha - \beta = 360° + 2\alpha - 4\beta$. Gegen die Rückwärtsrichtung ist die Ablenkung

$$\varphi = \delta - 180° = 180° + 2\alpha - 4\beta$$

Da $\sin(\alpha) = \frac{h}{R}$ und $\sin(\beta) = \frac{1}{n} \cdot \frac{h}{r}$, folgt

$$\varphi = 180° + 2\arcsin\left(\frac{h}{R}\right) - 4\arcsin\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{h}{R}\right)$$

iii) Der Ablenkwinkel hat ein Minimum für $\frac{d\varphi}{dh} = 0$.

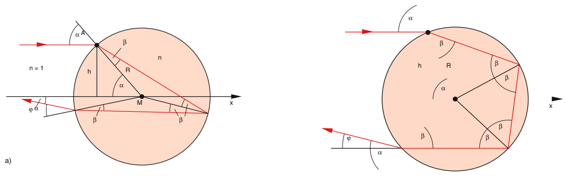
$$\frac{d\varphi}{dh} = \frac{\frac{2}{R}}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}} - \frac{\frac{4}{nR}}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{n^2R^2}}} = 0$$

$$\Rightarrow h_m = R \cdot \sqrt{\frac{1}{3}(4 - n^2)} \Rightarrow \sin(\alpha_m) = \frac{h}{R} = \sqrt{\frac{1}{3}(4 - n^2)}$$

iv) Mit $n = 1.33$ erhalten wir $\alpha_m = 59.6°$. Damit folgt

$$\sin(\beta_m) = \frac{\sin(\alpha_m)}{n} = 0.6484 \Rightarrow \beta_m = 40.4°$$

$$\Rightarrow \varphi = 180° + 2\alpha - 4\beta = 137.6°$$



Bei zweimaliger Reflexion kann dem Bild b) die Gesamtablenkung

$$\varphi = 180^\circ + 2 \arcsin\left(\frac{h}{R}\right) - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n}\frac{h}{R}\right)$$

entnommen werden.Differenzieren und Nullstellen der Ableitung liefern

$$h_m = R \cdot \sqrt{\frac{1}{8}(9 - n^2)} \Rightarrow \frac{h_m}{R} = 0.951 \Rightarrow \varphi_m = 128^\circ$$

Aufgabe 48

Da der Abstand D der Linsen kleiner als f_1 bzw. f_2 ist, gilt für die Brennweiten des Gesamtsystems

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 \cdot f_2}$$

Damit folgt bereits

$$f = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{50} - \frac{5}{500}\right)\frac{1}{cm} = \frac{55}{500}\frac{1}{cm} \Rightarrow f = 9.1\text{cm}$$

Aufgabe 49

Wir benutzen die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} \approx \frac{2}{R}$$

Für die Abbildung durch M_1 ist $g_1 = x = 6$cm und $R_1 = 24$cm. Damit folgt

$$b_1 = \frac{g_1 R_1}{2g_1 - R_1} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 24}{12 - 24} cm = -24cm$$

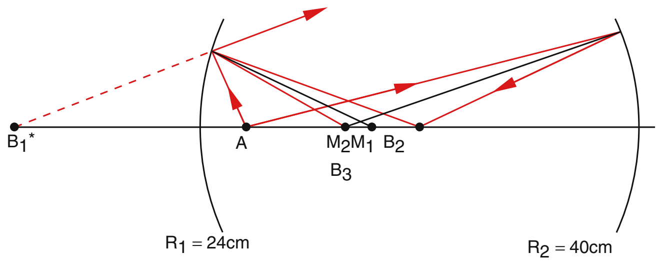
Die Abbildung ist divergent, weil A zwischen Spiegel und Brennpunkt F_1 liegt. Es entsteht ein virtuelles Bild B^* links von M_1 im Abstand $x = -24\text{cm}$ von M_1. Für die Abbildung von M_2 gilt $g_2 = -(d-x) = -54\text{cm}$ und $R_2 = -40\text{cm}$. Damit folgt $b_2 = \frac{54\cdot 40\text{cm}}{-2\cdot 54+40} = -31\text{cm}$.

$$\Rightarrow x(b_2) = (60-31)\,\text{cm} = 29\text{cm}$$

B_2 kann wieder von M_1 abgebildet werden in B_3. Es gilt

$$b_3 = \frac{g_3 R_1}{2g_3 - R_1} \Rightarrow b_3 = 20\text{cm}$$

Dies ist identisch mit dem Mittelpunkt M_2 des rechtes Spiegels M_2, sodass B_3 wieder durch M_2 in sich abgebildet wird, durch M_1 wieder in B_2 etc. Damit gibt es insgesamt zwei reelle und ein virtuelles Bild.



Aufgabe 50

Die Matrix des Systems ist gegeben durch

$$M = B_7 \cdot T_{76} \cdot B_6 \cdot T_{65} \cdot B_5 \cdot T_{54} \cdot B_4 \cdot T_{43} \cdot B_3 \cdot T_{32} \cdot B_2 \cdot T_{21} \cdot B_1$$

wobei

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1.6116-1}{1.628} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-1.6116}{-27.57} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und analog fortfahrend. Ferner sind die Translationsmatrizen

$$T_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{0.357}{1.6116} & 1 \end{pmatrix} \quad T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{0.189}{1} & 0 \end{pmatrix}$$

und analog fortfahrend. Bildet man die Produktmatrix, erhält man

$$M = \begin{pmatrix} 0.848 & -0.198 \\ 1.338 & 0.867 \end{pmatrix}$$

In der Näherung dünner Linsen ist $M_{12} = -\frac{1}{f}$ und damit $f = 5.06\text{cm}$