Aufgabe 44

Ein elektrisches Feld sei gegeben durch

$$\vec{E}(t) = A\cos(\omega t + \phi_a)\vec{e}_x + B\cos(\omega t + \phi_b)\vec{e}_y$$

Zeigen Sie zunächst, dass

$$\vec{E}(0) \times \vec{E}(t) = AB\sin\phi\sin(\omega t)\vec{e}_z$$

mit $\phi = \phi_a - \phi_b$. Beweisen Sie anschließend die allgemeinere Form:

$$\vec{E}(t_1) \times \vec{E}(t_2) = AB\sin\phi\sin(\omega(t_2 - t_1))\vec{e}_z$$

Wie kann man lineare Polarisation mithilfe dieser Gleichung erklären?

Lösung

Wir zeigen direkt die allgemeinere Form:

$$\begin{aligned}\vec{E}(t) \times \vec{E}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A\cos(\omega t_1 + \phi_a) & B\cos(\omega t_1 + \phi_b & 0) \\ A\cos(\omega t_2 + \phi_a) & B\cos(\omega t_2 + \phi_b) & 0 \end{vmatrix} \\ &= AB\left[\cos(\omega t_1 + \phi_a)\cos(\omega t_2 + \phi_b) - \cos(\omega t_1 + \phi_b)\cos(\omega t_2 + \phi_a)\right]\vec{e}_z\end{aligned}$$

mit der Identität:

$$\cos\theta\cos\phi = \frac{\cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi)}{2}$$

und $\phi = \phi_a - \phi_b$ folgt:

$$\begin{aligned}\vec{E}(t) \times \vec{E}(t) &= \frac{AB}{2}\left[\cos(\omega(t_1 - t_2) + \phi) - \cos(\omega(t_1 - t_2) - \phi)\right]\vec{e}_z \\ &= \frac{AB}{2}\left[\cos(\omega(t_2 - t_1) - \phi) - \cos(\omega(t_2 - t_1) + \phi)\right]\vec{e}_z\end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da $\cos(x) = \cos(-x)$ symmetrisch ist. Nun folgt mit:

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\phi &= \frac{\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi)}{2} \\ \vec{E}(t) \times \vec{E}(t) &= AB\sin\phi\sin(\omega(t_2 - t_1))\vec{e}_z\end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. Für $t_1 = 0, t_2 := t$ erhält man:

$$\vec{E}(0) \times \vec{E}(t) = AB\sin\phi\sin(\omega t)\vec{e}_z$$

Bei linearer Polarisation gilt $\phi = \phi_a - \phi_b = 0$, denn die x- und y-Komponente des Feldes sind in Phase. Dann verschwindet das Kreuzprodukt für alle t. Die Schwingung des E-Feldes vollzieht sich in einer festen Ebene ohne die Richtung zu ändern.

Aufgabe 45

Ein langes, gerades Koaxialkabel besitzt eine Innenleiter mit dem Radius r_i und einen zylindrischen Mantel mit Außenradius r_a. Das Kabel transportiert elektrische Leistung, wobei ein Strom I fließt und zwischen Innen- und Außenleiter eine Spannung U besteht. Die Verluste im Kabel seien zu vernachlässigen.

i) Wie lauten die Felder $\vec{E}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$ zwischen Innen- und Außenleiter?

Der *Poynting-Vektor* $\vec{S} := \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$ beschreibt die Richtung und den Betrag des Energietransports in einem solchen System

ii) Berechnen Sie den Poynting-Vektor

iii) Zeigen Sie durch Integration über den Kabelquerschnitt, dass die übertragene Leistung $P = UI$ in Form elektromagnetischer Feldenergie zwischen Innen- und Außenleiter strömt.

Lösung

zu i):
Man erhält das elektrische Feld aus dem Gaußschen Gesetz:

$$\int \vec{E} d\vec{A} \overset{\vec{E} \| d\vec{A}}{=} EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{CU}{\epsilon_0 2\pi r l}$$

Mit der Zylindermantelfläche als Fläche des Gaußschen Gesetzes. Nun fehlt uns ein Ausdruck für die Kapazität C. Den erhalten wir aus folgendem Ansatz:
Die Spannung U zwischen Innen- und Außenleiter ist gleich der Potentialdifferenz φ zwischen r_i und r_a. Damit erhält man:

$$\varphi = \int_{r_i}^{r_a} \vec{E} d\vec{r} = \frac{CU}{2\pi\epsilon_0 l} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr = \frac{CU}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \overset{!}{=} U$$
$$\Rightarrow C = 2\pi\epsilon_0 l \frac{1}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$
$$\Rightarrow E = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{U}{r \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} = \frac{U}{r \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$

Aus Symmetrie-Gründen gilt: $\vec{E} = E\vec{e}_r$.
Das magnetische Feld erhalten wir aus dem Ampere'schen Gesetz mit einem Integrationsweg über einen Kreis um die Leiteranordung:

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I \overset{\vec{B} \| d\vec{r}}{\Leftrightarrow} B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

Ebenfalls aus Symmetrie-Gründen erhalten wir $\vec{B} = B\vec{e}_\varphi$.

zu ii):

Der Poynting Vektor ist dann:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \frac{U}{r \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r\right] = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \vec{e}_z, \; [\vec{S}] = \frac{\mathrm{AV}}{\mathrm{m}^2}$$

Wobei wir benutzt haben, dass $\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_z$ in Zylinderkoordinaten. Man sieht also, dass der Energietransport entlang des Kabels (wie wir es auch erwartet haben) verläuft.

zu iii):

Um zu zeigen, dass die Leistung durch $P = UI$ gegeben ist, integrieren wir den Poynting-Vektor $\vec{S}$ über den Kabelquerschnitt. Wir erhalten:

$$P = \int_F \vec{S} d\vec{A} = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} S r d\varphi dr = 2\pi \int_{r_i}^{r_a} S r dr = \frac{2\pi UI}{2\pi \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \underbrace{\int_{r_i}^{r_a} \frac{r}{r^2} dr}_{=\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$

$$\Rightarrow P = UI$$

Damit stimmt die Behauptung.

Aufgabe 46

Wir betrachten einen ruhendes Stück Leiterdraht der Länge L_0. In dem Draht fließe ein Strom der Stärke I. Außerdem bewege sich eine Probeladung q mit Geschwindigkeit v parallel zum Draht. Durch das Magnetfeld des stromdurchflossenen Leiters erfährt die Probeladung eine Kraft. Im Folgenden soll das System aus dem Ruhesystem

a) des Drahtes und

b) der Probeladung

betrachtet werden. Welche Kraft wirkt auf das Teilchen?
Herangehensweise:
zu a): Bestimmen Sie die Lorentzkraft eines vom Strom I durchflossenen Leiters, indem Sie die Formel für das Magnetfeld bestimmen.
zu b): Gehen Sie nun in das Ruhesystem der Probeladung. Nehmen Sie vereinfacht an, die Probeladung bewege sich mit der gleichen Geschwindigkeit v parallel zum Leiter wie die Elektronen des Stroms I im Leiter. Wir idealisieren den Leiter durch zwei gerade Linienladungsdichten, eine positive λ_+, welche die Atomrümpfe darstellen, und eine negative λ_-, welche die Elektronen darstellt. Jede dieser Linienladungsdichten verursacht ein elektrisches Feld und eine der beiden ein Magnetfeld im Ruhesystem der Probeladung (welche?). Bestimmen Sie die Felder.
Überlegen Sie sich anschließend: Im Ruhesystem des Leiters erscheinen die Abstände zwischen den bewegten Elektronen verkürzt, sowie die Abstände der Atomrümpfe im Ruhesystem der Probeladung verkürzt erscheinen. Wie sieht es im Ruhesystem der Probeladung aus? Nutzen Sie diese Überlegungen um mithilfe der Längenkontraktion die Ladungsdichten $\lambda'_+ = \gamma\lambda_+$ und $\lambda'_- \propto \lambda_-$ im Ruhesystem der Probeladung zu bestimmen (Für λ'_+ steht das Ergebnis bereits hier... was gilt für $\lambda'\_?$). Stellen sie damit schließlich die Kraft F' im Ruhesystem der Probeladung auf und transformieren Sie sie gemäß $F' = \gamma F$ zurück in das Ruhesystem des Drahtes. Was fällt Ihnen auf?

Lösung

zu a): Gemäß dem Biot-Savart-Gesetz ist jeder stromdurchflossene Leiter von einem Magnetfeld umgeben. Das Magnetfeld für einen unendlich langen, geraden, stromdurchflossenen Leiter hat die Form:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

Hier ist I der Strom durch den Leiter und$r$ der Abstand vom Leiter. Die Richtung des Magnetfeldes folgt der Rechten-Hand-Regel. Stellen wir uns vor, eine Ladung q bewege sich parallel zu diesem Leiter mit der Geschwindigkeit v, so wird auf diese Ladung die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

wirken. Je nachdem ob sich die Ladung in dieselbe Richtung wie der Strom I bewegt oder genau entgegengesetzt, zeigt F_L zum Leiter hin oder von diesem weg. Für den Fall einer parallelen Bewegung steht F_L senkrecht auf den Leiter. Nehmen wir an, dass v parallel zu I verlaufe. Es ergibt sich dann für den Betrag der Lorentzkraft:

$$F_L = \frac{\mu_0 q v I}{2\pi r}$$

zu b): Wir befinden uns nun im Ruhesystem der Probeladung: Ein elektrischer Leiter wird in der Regel ein Metall sein, zum Beispiel ein Kupferdraht. Dieser besteht im Wesentlichen aus den positiv geladenen Atomrümpfen und den frei beweglichen, negativ geladenen Elektronen, welche den Stromfluss ermöglichen. Wir idealisieren den Leiter durch zwei gerade Linienladungsdichten, eine positive λ_+ , welche die Atomrümpfe darstellt, und eine negative λ_-, welche die Elektronen darstellt. Jede dieser Linienladungsdichten verursacht ein elektrisches Feld der Form;

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{e}_r$$

Im Ruhesystem von q ruht q ebenso wie die negative Ladungsdichte. Die positive Ladungsdichte hingegen erscheint mit der Geschwindigkeit v in die entgegengesetzte Richtung bewegt. Sie stellt damit einen Strom dar, der ein Magnetfeld verursacht. Jedoch hat es keinen Einfluss auf die Ladung, da diese ruht. Im Ruhesystem des Leiters ist die Ladungsverteilung neutral (es gibt gleich viele Elektronen wie Protonen). Im Ruhesystem der Probeladung gilt diese Annahme nicht mehr, denn hier greift die Relativitätstheorie. In diesem Ruhesystem erscheinen die Abstände zwischen den sonst bewegten Elektronen verlängert und die Abstände der nun bewegten Atomrümpfe verkürzt (Längenkontraktion). Dies führt dazu, dass der Leiter im Ruhesystem von q positiv geladen erscheint. Gemäß der Relativitätstheorie erscheint ein mit der Geschwindigkeit v bewegter Maßstab um den Faktor

$$1/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

in Bewegungsrichtung verkürzt.
Somit erscheint die positive Ladungsdichte λ_+ um den Kehrwert dieses Faktors, also um γ vergrößert, denn die Ladungsdichte ist antiproportional zum Abstand der Ladungen. Andererseits wird die negative Ladungsdichte im Ruhesystem von q um einen Faktor $1/\gamma$ verkleinert, da die Abstände der bewegten Elektronen im Ruhesystem des Leiters kontrahiert erscheinen und diese Kontraktion im Ruhesystem von q nicht mehr beobachtet wird. Damit erhält man also schließlich:

$$\lambda'_+ = \gamma\lambda_+$$
$$\lambda'_- = \lambda_-/\gamma$$

Die Gesamtladungsdichte des Leiters ergibt sich, wenn wir diese beiden summieren:

$$\lambda' = \lambda'_- + \lambda'_+ = \lambda_+(\gamma - \frac{1}{\gamma}) = \lambda_+\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} = \gamma\frac{v^2}{c^2}\lambda_+$$

Damit erhält man für die Kraft des elektrischen Feldes auf die Probeladung q:

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = \frac{q\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{e}_r = \gamma\frac{q\lambda_+ v^2}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\vec{e}_r = -\gamma\frac{q\lambda_- v^2}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\vec{e}_r$$

Wobei wir verwendet haben, dass im Ruhesystem des Drahtes $\lambda_+ = -\lambda_-$ gilt. Mit den Bezeichnungen $1/c^2 = \mu_0\epsilon_0$ und $I = v\lambda$ folgern wir schließlich:

$$\vec{F}' = \gamma\frac{\mu_0 qvI}{2\pi r}\vec{e}_r \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}'/\gamma = -\frac{\mu_0 qvI}{2\pi r}\vec{e}_r$$

Das ist dasselbe Ergebnis wie in a) bis auf das Vorzeichen, das daher rührt, dass hier $\vec{r}$ vom Leiter weg zeigt. Wenn also q und I dasselbe Vorzeichen haben, wird q zum Leiter angezogen. Die Lorentzkraft auf die Ladung q ist somit auf ein elektrisches Feld im Ruhesystem von q zurückzuführen.
(Bemerkung: Diese Zeilen entstammen zum Großteil aus:
http://physik.uni-graz.at/ uxh/diploma/kaufmann11.pdf (24.06.18))