Vektoren und Vektorräume

Vektoren bisher

Ein Vektor ist eine gerichtete, orientierte Strecke im Raum. Dabei werden diejenigen "Pfeileäls gleich angesehen, die durch Parallelverschiebung ineinander übergehen. Vektoren besitzen Länge, Richtung und Orientierung. Zwei Vektoren sind gleich, wenn diese in Betrag, Richtung und Orientierung übereinstimmen. Der Vektor mit dem Betrag 0 heißt Nullvektor und wird mit $\vec{0}$ bezeichnet. Dieser Vektor ist eindeutig bestimmt. Die so definierten Vektoren sind "freie"Vektoren, d.h. der Anfangspunkt des Vektors ist beliebig.
Vektoren kann man durch algebraische Operationen miteinander verknüpfen.

- Addition :
  Für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

  $$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} = (v_x + w_x)\vec{e}_x + (v_y + w_y)\vec{e}_y + (v_z + w_z)\vec{e}_z$$

  Analog wird die Subtraktion als Addition mit dem inversen Element definiert.

- Skalare Multiplikation :
  Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt

  $$\alpha\vec{v} = \alpha v_x e_x + \alpha v_y e_y + \alpha v_z e_z$$

Euklidische Vektorräume

Neben den oben bereits definierten Operationen auf Vektorräumen hat man auch eine weitere Verknüpfung, das Skalarprodukt.
Im $\mathbb{R}^3$ gilt für dieses:

$$\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos(\measuredangle x, y)$$

Mit dieser Definition kann man bereits Aussagen über die Orientierung zweier Vektoren treffen. Man beachte hier den Unterschied zwischen Parallelität und Kolinearität.
Weiter wollen wir noch ein Produkt definieren, dass es in dieser Form(sonst über ein Keilprodukt) nur im $\mathbb{R}^3$ gibt. Es handelt sich um das Kreuzprodukt.
Für dieses gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Für den Betrag eines solchen Produktes gilt

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin(\measuredangle a, b)$$

Diese Definition ist jedoch sehr unhandlich und schlecht geeignet mehrfache Kreuzprodukte von Vektoren auszurechnen. Bei genauen hinsehen erkennt man jedoch , dass die Struktur des

Kreuzproduktes völlig antisymmetrisch ist. Aus diesem Grunde definieren wir das Kronecker-Delta δ_{ij} und den Levi-Cevita-Tensor ϵ_{ijk}.
Es gilt

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & Perm(ijk) = 1 \\ -1 & Perm(ijk) = -1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

und

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Damit können wir das Kreuzprodukt schreiben als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \vec{e}_i a_j b_k = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \vec{e}_i a_j b_k$$

oder in einer Komponente

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass der Levi-Cevita Tensor das gewünschte liefert. Wir betrachten die x-Komponente oder auch $i = 1$

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_1 = \sum_{j,k}^{3} \epsilon_{1jk} a_j b_k$$

Nun werten wir die Doppelsumme aus. Wir beginnen mit:
$j = 1$

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{11k} a_1 b_k = \epsilon_{111} a_1 b_1 + \epsilon_{112} a_1 b_2 + \epsilon_{113} a_1 b_3$$

Nun wissen wir aus der Definition des Levi-Cevita-Tensors, dass falls zwei oder mehr Indizes gleich sind dieser Null wird. Damit folgt für $j = 1$ ist alles Null.
$j = 2$

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{12k} a_2 b_k = \epsilon_{121} a_2 b_1 + \epsilon_{122} a_2 b_2 + \epsilon_{123} a_2 b_3 = a_2 b_3$$

$j = 3$

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{13k} a_3 b_k = \epsilon_{131} a_3 b_1 + \epsilon_{132} a_3 b_2 + \epsilon_{133} a_3 b_3 = \epsilon 132 a_3 b_2$$

Nun schauen wir wie viele Vertauschungen notwendig sind, um aus dem Tripel (123) das Tripel (132) zu erzeugen. Es genügt hier die 2 und die 3 zu vertauschen. Damit wird eine Vertauschung benötigt und somit ist $\epsilon_{132} = -1$. Insgesamt folgt

$$\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{1jk} a_j b_k = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

Besonders nützlich wird der Levi-Cevita-Tensor aber erst, wenn man die Hintereinanderausführung von Kreuzprodukten betrachtet. Dazu benötigen wir die Identität

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

Ähnliches gilt für das Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij}$$

Das Kronecker-Delta reduziert hier die neun Einträge der Summe auf drei.

Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl z hat im allgemeinen die folgende Form

$$z = a + bi, \text{ mit} a, b \in \mathbb{R}$$

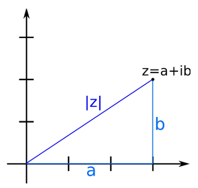
Nun müssen wir dem i noch Eigenschaften zuordnen. Dies macht man, indem man

$$i^2 = -1$$

setzt. Gelegentlich sieht man auch weitere Definitionen, wie etwa $i = \sqrt{-1}$ allerdings ergibt sich dort folgender Widerspruch

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Wir nennen a den Realteil und b den Imaginärteil. In einem Koordinatensystem mit x der reellen Achse und y die imaginäre Achse kann man dies wie folgt darstellen



Auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind auch wie in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gewisse Operationen/ Verknüpfungen erlaubt. Diese sind:

1) Addition

2) Subtraktion
3) Multiplikation
4) Division

Sei $z = 3 + 2i$ und sein $w = -1 - 2i$. Dann gilt

$$z + w = w + z = (3 + 2i) + (-1 - 2i) = (3 - 1) + (2 - 2)i = 2$$

$$z - w = (3 + 2i) - (-1 - 2i) = (3 + 1) + (2 + 2)i = 4 + 4i = 4(1 + i)$$

$$z \cdot w = w \cdot v = (3 + 2i) \cdot (-1 - 2i) = -3 - 6i - 2i + 4 = 1 - 8i$$

Bei der Division machen wir uns zunächst zunutze, dass nach der dritten binomischen Formel $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ gilt.

$$\frac{z}{w} = \frac{3 + 2i}{-1 - 2i} = \frac{3 + 2i}{-1 - 2i} \cdot \frac{-1 + 2i}{-1 + 2i} = \frac{(3 + 2i)(-1 - 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)} = \frac{1 - 8i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$$

Die komplexe Exponentialfunktion

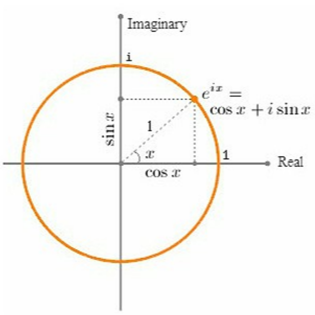
Man kann die komplexe Zahl auch im Exponenten zu einer Basis zulassen. Insbesondere ist für uns von Interesse, wenn die Basis die eulersche Zahl e ist.
Eine wichtige Darstellung der komplexen Exponentialfunktion liefert die eulersche Gleichung

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

Insbesondere folgt damit für die komplexe Darstellung des Sinus und des Cosinus

$$\cos(\phi) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

$$\sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2}$$



Integralrechnung

Stammfunktion

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$. Gesucht ist eine Funktion $F(x)$ so, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$$

Die Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion. Man spricht auch von dem unbestimmten Integral. Die suche nach einer Stammfunktion ist also formal das Gegenteil des Differenzierens.
Die Stammfunktion ist nur bis auf eine beliebige Konstante C eindeutig bestimmt. Sei also $F(x)$ eine Stammfunktion. Dann ist auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion, da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x) + C) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$$

Beispiel

Sei $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = e^x$. Dann gilt:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x)$$

$$\int g(x)\mathrm{d}x = \int e^x\mathrm{d}x = e^x$$

Integrationstechniken

Die partielle Integration erhalten wir aus der Produktregel beim Ableiten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x) \cdot v(x)) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}u \Leftrightarrow \mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$$

Wir sortieren um und integrieren. Man erhält:

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\,|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

Für verschachtelte Integrationen braucht man eine Regel,ähnlich zur Kettenregel beim Ableiten. Wir veranschaulichen dies an einem Beispiel. Was gibt:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x+1)\mathrm{d}x$$

Wir substituieren $y = 2x + 1$ und somit $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}y$. Durch einsetzen erhält man:

$$\int_a^b \sin(2x+1)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{2}\sin(y)\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\cos(y)\,|_a^b$$

Die neuen Grenzen ergeben sich durch $a = 2(0) + 1 = 1$ und $b = 2(\frac{\pi}{2}) + 1 = \pi + 1$.

Differenziation

Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion f, welche von den Funktionsvariablen x, y, z abhängt. Wir schreiben dann $f = f(x, y, z)$. Da wir schon einen guten Differenziationsbegriff für Funktionen haben die nur von einer Variablen abhängen, wollen wir die Differenziation von Funktionen mit mehreren Variablen auf diese zurückführen. Die partiellen Ableitungen kann man als Ableitung in eine Richtung h interpretieren.

Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ heißt differenzierbar im Punkt $a \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{|| \, L \, ||}$$

Eine Funktion heißt differenzierbar auf U , wenn sie in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar ist. Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung L heißt das Differential oder auch Linearisierung der Funktion f in dem Punkt a und wird mit $\mathrm{d}f(a)$ bezeichnet.

Richtungsableitungen

Es sei f eine in a differenzierbare Funktion. Für alle t mit hinreichend kleinem Betrag und $h \in \mathbb{R}^3$ gilt zunächst

$$f(a+th) = f(a) + \mathrm{d}f(a)th + R(th)$$

wobei der Rest für h wie oben gegen 0 geht.
Sei also $f : U \to \mathbb{C}$ eine nicht notwendiger Weise differenzierbare Funktion in einer Umgebung U von a. Dann versteht man unter der Ableitung von f im Punkt a in Richtung h im Existenzfall den Grenzwert

$$\partial_h f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Die Ableitungen in Richtung der Standardbasis heißen partielle Ableitungen von f .

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x, y, z) = xyz^2$. Wir wollen diese nun partiell nach x, y und z differenzieren.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(xyz^2) = yz^2$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(xyz^2) = xz^2$$
$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(xyz^2) = 2xyz$$

Gradient

Der Gradient ist ein mathematischer Operator, ein Differenzialoperator, der auf ein Skalarfeld angewandt werden kann und in diesem Fall ein Gradientenfeld genanntes Vektorfeld liefert.

Der Gradient hat zwei anschauliche Eigenschaften. Erstens steht der Gradient senkrecht auf den Höhenlinien und zeigt in die Richtung, in der sich die Funktionswerte am stärksten ändern und zweitens ist der Betrag des Gradienten ein Maß für die Änderung der Funktionswerte senkrecht zu den Höhenlinien. Der Gradient hat in verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Darstellungen.

Kartesische Koordinaten

Im $\mathbb{R}^3$ mit dem euklidischen Standardskalarprodukt ist $gradf(a)$ der Spaltenvektor

$$grad(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_3$$

Die Einträge $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sind die partiellen Ableitungen von f in x_i- Richtung. In drei Dimensionen hat der Gradient also die Darstellung

$$grad(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

Betrachte als Beispiel $f(x, y) = 2x^2 - y^2$. Für die partiellen Ableitungen gilt $f_x = 4x$ und $f_y = -2y$. Es gilt also $grad(f) = \nabla f = 4xe_x + -2ye_y$

Beispiel

Wir wollen den Gradienten der Funktion $f(x, y, z) = xyz^2$ bilden. Wir haben also nach der Definition des Gradienten

$$grad(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y + \frac{\partial f}{\partial z} e_z = yz^2 \vec{e}_x + xz^2 \vec{e}_y + 2xyz \vec{e}_z$$

Zylinderkoordinaten

Sei V eine Funktion in Zylinderkoordinaten, also von der Form $V = V(\rho, \phi, z)$. Dann gilt für den Gradienten

$$grad(V) = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} e_\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} e_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} e_z$$

Kugelkoordinaten

Sei V eine Funktion in Kugelkoordinaten, also $V = V(r, \theta, \phi)$. Dann gilt für den Gradienten

$$grad(V) = \nabla V = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{rsin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} e_\phi$$