Aufgabe 1

a) Ein Block der Masse $m = 0.5Kg$ hängt am unteren Ende einer vertikal aufgehängten Feder. Aufgrund des Blocks streckt sich die Feder um eine Distanz $d = 5cm$ aus ihrer Gleichgewichtslage (vgl. Abb. 1). Da das System im Gleichgewichtszustand ist, ist die netto Kraft null. Somit hebt die Federkraft $\vec{F_s}$ die Gravitationskraft $m\vec{g}$ genau auf. Benutzt man das hookesches Gesetz erhält man

$$|\vec{F_s}| = \kappa d = mg,$$

und damit

$$\kappa = \frac{mg}{d}.$$

Durch einsetzen der Variablen erhält man $\kappa = 98\frac{N}{m}$. Die Arbeit, die die Feder auf den Block ausübt ist

$$W = \int_0^x F_x \, \mathrm{d}x = \int_0^d (-\kappa x) \, \mathrm{d}x.$$

Durch lösen dieser Gleichung erhält man eine Arbeit von$-12.25 \times 10^{-2} J$.

b) Eine schwache Feder mit einer Federkonstante von $7.7\frac{N}{m}$ wird um $16cm$ zusammengedrückt und zwischen zwei Blöcken auf einer horizontalen Fläche gehalten. Der Block auf der linken Seite wiegt $0.5Kg$ und der auf der rechten Seite $1Kg$. Die Feder wirkt eine Kraft auf beide Blöcke aus, die sie auseinander drückt will. Wenn es keine Reibung zwischen Block und Oberfläche gibt, ist die einzige Kraft, die auf die Blöcke wirkt die Federkraft. Für den Block der Masse m_1 ist die Kraft gegeben durch

$$F_1 = -\kappa x = m_1 a_1.$$

dabei zeigt das Minuszeichen die Bewegungsrichtung an (die nach links zeigt). Benutzt man obere Gleichung erhält man $a_1 = -2.46\frac{m}{s^2}$. Bei dem zweiten Block der Masse m_2 wird genauso verfahren

$$F_2 = \kappa x = m_2 a_2.$$

Benutzt man nun diese Gleichung für den zweiten Block erhält man $a_2 = 1.23\frac{m}{s^2}$
Wenn es zwischen Blöcken und Oberfläche Reibung gibt (Gleitreibungskoeffizient $\mu_\mathrm{k} = 0.462$), ist die Situation anders. Der Betrag der Federkraft F_s auf die blöcke ist gegeben durch $\kappa x = 0.308N$. Aber die Gleitreibungskräfte f auf die Blöcke der Masse m_1 und m_2 sind gegeben durch

$$f_1 = \mu_\mathrm{k} m_1 g \simeq 2.26\mathrm{N}$$

und

$$f_2 = \mu_\mathrm{k} m_2 g \simeq 4.53\mathrm{N}.$$

Offensichtlich ist die Gleitreibungskraft auf die Blöcke m_1 und m_2 größer als die Federkraft. Die Blöcke können sich also nicht bewegen und damit ist ihre Beschleunigung null. Mathematisch können Lösungen gefunden werden, aber die physikalische Interpretation ist immer wichtig!!

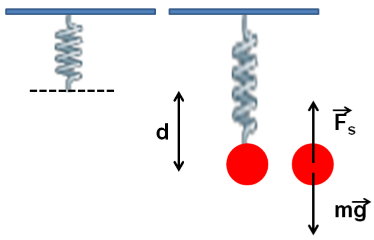

Abbildung 1: Vertikale Feder mit Masse m am Ende. Die Feder streckt sich um die Distanz d aus der Gleichgewichtslage.

Aufgabe 2

a) Ein $1Kg$ Block hat in Punkt A die Geschwindigkeit $v_A = 4\frac{m}{s}$. Seine kinetische Energie ist gegeben durch

$$K_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = 8\text{J}.$$

Der selbe Block hat in Punkt B eine kinetische Energie von $K_B = 16\frac{m}{s}$. Durch die Gleichung für die kinetische Energie kann die Geschwindigkeit v_B an Punkt B bestimmt werden

$$v_B = \sqrt{\frac{2K_B}{m}} \simeq 5.66\text{m/s}.$$

Die netto Arbeit, die am Block verrichtet wird während er von A zu B rutsch ist gegeben durch

$$W_{\text{net}} = \Delta K = K_B - K_A = 8\text{J}.$$

b) Ein Objekt der Masse $5Kg$ hat eine Anfangsgeschwindigkeit von $\vec{v}_0 = (10\text{m/s})\vec{e}_x$ - $(3\text{m/s})\vec{e}_y$. Dann verändert es seine Geschwindigkeit zu $\vec{v} = (15\text{m/s})\vec{e}_x + (5\text{m/s})\vec{e}_y$. Die Arbeit um die Geschwindigkeit von v_0 zu v zu verändern ist

$$W = \Delta K,$$

Man benutzt Vektoralgebra um den Betrag der Anfangs- und Endgeschwindigkeit zu bestimmen

$$|\vec{v}_0| = \sqrt{(10\text{m/s})^2 + (-3\text{m/s})^2} = \sqrt{109}\text{m/s}$$

und

$$|\vec{v}| = \sqrt{(15\text{m/s})^2 + (5\text{m/s})^2} = \sqrt{250}\text{m/s}.$$

Benutzt man diese Ergebnisse lässt sich die kinetische Energie am Anfang und am Ende leicht berechnen und man erhält

$$W = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = 352.5\text{J}.$$

Aufgabe 3

Ein $10Kg$ schwerer Block, der zunächst in ruhe ist wird von einer horizontalen Kraft von $20N$ auf einer horizontalen Fläche nach rechts gezogen.

a) Der Block wird durch eine Kraft gezogen und die Fläche ist rau. Die Arbeit, die von der Kraft verrichtet wird um den Block um $\Delta x = 3m$ zu ziehen ist

$$W = F\Delta x = (20\text{N}) \times (3\text{m}) = 60\text{J}.$$

Der Block ist in der vertikalen Richtung im Gleichgewicht (sagen wir in der$y$- Richtung). Die Normalkraft N und die Gravitationskraft mg sind die einzigen vertikalen Kräfte, also

$$\sum F_y = N - mg = 0,$$

und damit $N = mg$. Man kann den Betrag der Reibungskraft folgendermaßen bestimmen

$$f = \mu_k N = 19.6\text{N}.$$

Erweitert man das kinetische Energie-Arbeit Theorem um die Reibungskraft, sieht man dass

$$\Delta K = \sum W_{\text{otherforce}} - f\Delta x,$$

Somit

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - fd + \sum W_{\mathrm{otherforce}},$$

In diesem Fall ist $\sum W_{\mathrm{otherforce}} = 60J$, was die Arbeit von der auf den Block angewendeten Kraft ist. Löst man obere Gleichung erhält man $v_{\mathrm{f}} = 0.49\frac{m}{s}$.

b) Angenommen die Kraft wirkt unter einem Winkel θ über der Horizontalen. Dann ist die von dieser Kraft verrichtete Arbeit

$$W = F\Delta x \cos\theta = Fd\cos\theta,$$

Da der Block in vertikaler Richtung im Gleichgewichtszustand ist gilt

$$\sum F_y = N + F\sin\theta - mg = 0,$$

Die Normalkraft ist dann also $N = mg - F\sin\theta$. Nun verwendet man wieder das modifizierte Theorem

$$K_{\mathrm{f}} = K_0 - fd + \sum W_{\mathrm{otherforce}},$$

einsetzen ergibt

$$K_{\mathrm{f}} = -\mu_{\mathrm{k}}(mg - F\sin\theta)d + Fd\cos\theta,$$

Die maximale Geschwindigkeit (was gleichbedeutend ist mit maximaler kinetischer Energie) erhält man für den Wert von θ bei dem gilt

$$\frac{\mathrm{d}(K_{\mathrm{f}})}{\mathrm{d}\theta} = 0,$$

Nach der Ableitung nimmt die obere Gleichung folgende Form an

$$\mu_{\mathrm{k}} = \tan\theta.$$

Einsetzen von $\mu_{\mathrm{k}} = 0.2$ und lösen der trigonometrischen Funktion ergibt einen Wert von $\theta = 11.3°$ zur Horizontalen

Aufgabe 4

a) Der Elektromotor einer Modelleisenbahn beschleunigt diese aus der Ruhe ($v_0 = 0$) zu $v = 1.2\frac{m}{s}$ in einem Zeitintervall von $\Delta t = 40s$. Die Gesamtmasse des Zugs ist $m = 1.8Kg$. Die gesamte eingehende Arbeit des Zuges ist

$$W_{\text{input}} = \Delta K = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2).$$

Die Durchschnittliche Leistung des Motors während der Zug in einer Zeit $\Delta t = 40s$ von $v_0 = 0$ auf $v = 1.2\frac{m}{s}$ beschleunigt ist

$$P_{\text{av}} = \frac{W_{\text{input}}}{\Delta t} = 0.0324\text{W}.$$

b) Der Aufzug hat eine Masse von $2000Kg$ und er trägt Passagiere mit einer Gesamtmasse von $200Kg$. Somit ist die Gesamtmasse des Systems $M =$ Masse Passagiere + Masse Aufzug. Wendet man Newtons II Axiom auf das System an, welches sich ohne Beschleunigung bewegt (konstante Geschwindigkeit) bekommt man folgenden Ausdruck

$$\sum F_y = T - Mg - f = 0,$$

und damit

$$T = Mg + f = 25560\text{N}.$$

Man kann die Leistung schreiben als

$$P = \vec{T} \cdot \vec{v},$$

Da $\vec{T}$ und $\vec{v}$ die gleiche Richtung haben, wird aus der Leistung

$$P = T \times v \simeq 51120\text{W}.$$