Aufgabe 1

a) Diese Aufgabe lösen wir mittels partieller Integration. Das ist im wesentlichen eine Umkehrung der Produktregel beim Ableiten.Es gilt allgemein:

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

Dieses wendet man solange an, bis der verbleibende Integral-Ausdruck mittels elementarer Integration gelöst werden kann. In unserem Falle setzen wir

$$f'(x) = e^x \ , \ f(x) = e^x \ , \ g(x) = \cos(x) \ , \ g'(x) = -\sin(x)$$

Mit dieser Definition folgt

$$\int e^x \cdot \cos(x)dx = e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \sin(x)dx$$

Der zweite Summand wird erneut partiell integriert mit der Setzung

$$f'(x) = e^x \ , \ f(x) = e^x \ , \ g(x) = \sin(x) \ , \ g'(x) = \cos(x)$$

Damit folgt

$$\int e^x \cdot \cos(x)dx = e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x)dx$$

Wir addieren auf beiden Seiten $\int e^x \cdot \cos(x)dx$ und erhalten den Ausdruck

$$\int e^x \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x))$$

b) Dieses Integral wird mittels einer geschickten Substitution gelöst. Wir ersetzen folgende Ausdrücke

$$u = \log(x) \text{ und damit } dx = x \cdot du \text{ sowie } x = e^u$$

Dies liefert

$$\int \sin(\log(x))dx = \int \sin(u) \cdot e^u du$$

Dieses Integral löst man analog zu a) und ergibt

$$\int \sin(u) \cdot e^u du = \frac{1}{2}e^u(\sin(u) - \cos(u))$$

Re-Substitution $u = \log(x)$ bringt

$$\int \sin(\log(x))dx = \frac{1}{2}x(\sin(\log(x)) - \cos(\log(x)))$$

c) Per Definition ist der Tangens gegeben als

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Damit gilt

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

Auch hier substituieren wir. Wir setzen

$$u = \cos(x)\text{und}\frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = -\frac{du}{-\sin(x)}$$

Damit wird das Integral zu

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{\sin(x)}{u}\frac{du}{-\sin(x)} = -\int \frac{1}{u}du = -\log(u) = \log(\frac{1}{u})$$

Re-Substitution liefert

$$\int \tan(x)dx = \log(\frac{1}{\cos(x)})$$

d) Zuerst erinnern wir uns an die Additionstheoreme

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Falls nun $x = y$ ist folgt

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$$

Nun ersetzen wir mit der Identität $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ und erhalten

$$\cos(2x) = 2\cos(x)^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(\cos(2x) - 1) = \cos(x)^2$$

Damit reduziert sich die Integration auf das Problem

$$\int \cos(x)^2 dx = \int \frac{1}{2}(\cos(2x) - 1)dx$$

Insgesamt folgt

$$\int \cos(x)^2 = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$$

Aufgabe 2

Zwei Objekte mit unterschiedlichen Massen $m_1 = 4Kg$ und $m_2 = 10Kg$ sind vertikal über eine masselose reibungsfreie Umlenkrolle gehängt wie in Abbildung 2 gezeigt. Die zwei Objekte in der Atwood Maschine sind zwei Kräften ausgesetzt. Eine ist die Gravitationskraft und die andere ist die Kraft, die durch den Faden ausgeübt wird durch den die beiden miteinander verbunden sich. Wie in dem Diagramm zu sehen ist, wird die Kraft nach oben durch den Faden und die Kraft nach unten durch die Gravitation ausgeübt. Da die Umlenkrolle reibungs- und masselos ist, ist die Zugkraft im Seil auf beiden Seiten der Umlenkrolle gleich. (Achtung mit Vorzeichen in Problemen wie diesen!!!!). Wenn das Objekt der Masse m_1 nach oben beschleunigt, beschleunigt Objekt der Masse m_2 nach unten. Wenn wir die Aufwärtsbewegung von Objekt mit Masse m_1 als positiv bezeichnen, müssen wir somit die Abwärtsbewegung des Objekts mit Masse m_2 auch als positiv bezeichnen (um mit den Vorzeichen konsequent zu sein). Mit dieser Vorzeichen Konvention, bewegen sich beide Objekte durch die Vorzeichenwahl in die gleiche Richtung. Weiterhin kann man gemäß dieser Konvention Newtons II Gesetz benutzen um separate Gleichungen für jede Masse zu bestimmen

$$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y$$

und

$$\sum F_{y'} = m_2 g - T = m_2 a_y$$

Lösen des oberen Gleichungssystems liefert

$$a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$$

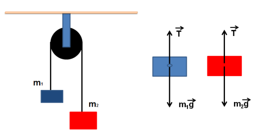
und an der ersten Gleichung kann man sehen, dass

$$T = m_1(g + a_y)$$

Einsetzen des entsprechenden Werts von a_y in obere Gleichung liefert

$$T = \left(\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

Durch einsetzen von $m_1 = 4Kg$ und $m_2 = 10Kg$ erhält man die Beschleunigung und Zugkraft jeweils zu $a_y \simeq 4.3 \mathrm{m/s}^2$ and $T \simeq 57.2\mathrm{N}$.



Aufgabe 3

Betrachten Sie zwei Blöcke der Masse m_1 und m_2 ($m_1 > m_2$). Diese Beiden Blöcke berühren sich auf einer reibungsfreien Fläche. Eine konstante horizontale Kraft $\vec{F}$ wirkt auf m_1 wie in Abbildung 2 gezeigt.

a) Um die Beschleunigung des Systems (die zwei Blöcke zusammen) zu bestimmen, muss uns klar werden, dass die Blöcke die gleiche Beschleunigung erfahren. Das kommt daher, da sich die Blöcke berühren und auch während der Bewegung den Kontakt nicht verlieren. Das ist das gleiche wie eine Nettokraft, die auf ein Objekt wirkt denn die Kraft wirkt auf ein System auf Blöcken und wir suchen die Beschleunigung des Systems. Anwenden von Newtons II Gesetz auf das System zeigt

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a_x$$

Somit ist die Beschleunigung des Systems gegeben durch

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

b) Die Anpresskraft $\vec{T}$ wirkt innerhalb des Systems der zwei Blöcke. Also lasst uns jeden Block separat betrachten (vgl. Abbildung 2). Die einzige horizontale Kraft, die auf m_2 ist die Anpresskraft $\vec{T}_{12}$ (d.h. die Kraft, die m_1 auf m_2 ausübt). Mithilfe Newtons II Gesetz auf m_2 sieht man, dass

$$\sum F_x = T_{12} = m_2 a_x$$

Ersetzen von a_x von oben

$$T_{12} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

Offensichtlich ist die Anpresskraft kleiner als die von außen ausgeübte Kraft F. Die Kraft um den Block der Masse m_2 alleine zu beschleunigen muss kleiner sein als die Kraft, die benötigt wird um das System aus Blöcken zu beschleunigen (das macht Sinn!). Lasst uns erneut Newtons II Gesetz auf den ersten Block anwenden.

$$\sum F_x = F - T_{21} = m_1 a_x$$

demzufolge

$$T_{21} = F - m_1 a_x$$

ersetzen des entsprechenden Werts für a_x liefert

$$T_{21} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

Es ist klar, dass $T_{12} = T_{21}$. Dies ist nicht überraschend, da sie ein Aktion- Reaktion Paar sind. Ihre Richtung sind offensichtlich in Abbildung 1.

c) Genau wie in der oberen Analyse kann Newtons II Gesetz angewendet werden um die Anpresskraft zu bestimmen. Bedenken sie, dass wenn die Kraft nach Links auf Block m_2 ausgeübt wird, die Anpresskraft m_1 beschleunigen muss. In dem vorherigen Fall hat sie die Masse m_2 beschleunigt. Da $m_1 > m_2$ wird mehr Kraft benötigt, somit ist der Betrag von $\vec{T}_{12}$ größer als im vorherigen Fall.

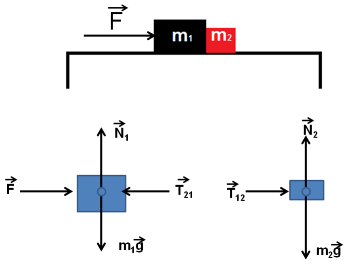


Abbildung 1: Eine Kraft wirkt auf den ersten Block, welcher einen anderen Block mit anderer Masse anschiebt.

Aufgabe 4

a) Für das Trägheitsmoment und den Drehimpulsbetrag gilt:

$$I_1 = 2mr^2 = 2mR_1^2 \Rightarrow L_1 = I_1\omega_1 = 2mR_1^2\omega_1 \Rightarrow L_1 = 2\cdot(35Kg)(1m)^2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{s} \approx 439.8\frac{Kg\cdot m^2}{s}$$

Der Drehimpulsvektor zeigt senkrecht zur Bewegungsebene nach oben, da $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$. Für die Energie bzw. die Rotationsenergie gilt:

$$E_{rot,1} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = mR_1^2\omega_1^2 = 1381.74J$$

b) Da kein äußeres Drehmoment wirkt, ist der Drehimpuls erhalten.Für die neue Situation ergeben sich ein neues Trägheitsmoment I_2 und ein neuer Drehimpuls L_2.Für die beiden Größen gilt:

$$I_2 = 2mR_2^2, L_2 = I_2\omega = L_1 = I_1\omega_1$$

Damit folgt

$$\omega = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{2mR_1^2}{2mR_2^2}\omega_1 = \frac{R_1^2}{R_2^2}\omega_1 = \frac{1m^2}{(0.75)^2\cdot m^2}\cdot\frac{1}{s} \approx 1.78\cdot 2\pi\frac{1}{s}$$

Für die neue kinetische Energie gilt

$$E_{rot,2} = \frac{1}{2}I_2\omega^2 = \frac{1}{2}2mR_2^2(\frac{R_1^2}{R_2^2}\omega_1)^2 = 2456.41J$$

c) Es gilt für die geleistete Arbeit:

$$E_{rot,2} = E_{rot,1} + \Delta W \Rightarrow \Delta W = 1074.67J$$