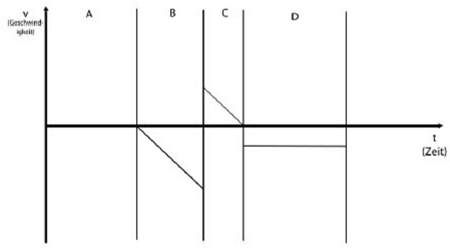
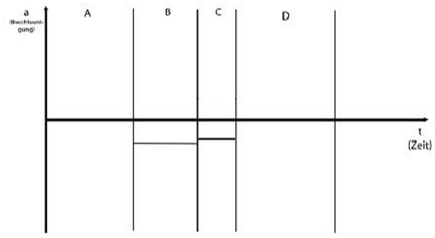
Aufgabe 1

a) Zeichnen von Geschwindigkeit(v)-Zeit(t)-Kurve und der Beschleunigung(a)-Zeit(t)-Kurve





b) Probleme und deren Ursprung
Probleme tauchen an den Stellen auf, an denen die Weg(s)-Zeit(t)-Kurve Knicke aufweist, bzw. die Stellen an denen die Geschwindigkeit(v)-Zeit(t)-Kurve unstetig ist. Hier hat man zwei unterschiedliche Geschwindigkeiten zum selben Zeitpunkt. Dies macht physikalisch keinen Sinn.

c) Begriffe zuordnen:
Ruhe = A
gleichförmige Bewegung=D
beschleunigte Bewegung=C
gleichmäßig abnehmende Bewegung=B

Aufgabe 2

a) Wir stellen eine Funktion auf, die uns die benötigte Zeit in Abhängigekeit der Länge der Strecke x liefert.
Es gilt

$$t(x) = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{(30-x)^2 + 20^2}}{v_2}$$

Da wir dies minimieren wollen, benötigen wir die Ableitung

$$\frac{d}{dx}t(x) = \frac{1}{v_1} - \frac{30-x}{v_2 \cdot \sqrt{(30-x)^2 + 20^2}}$$

Nun soll also gelten

$$\frac{d}{dx}t(x) = 0$$

Also

$$30 - x = \sqrt{(30-x)^2 + 20^2} \cdot (\frac{v_2}{v_1})^2 \Rightarrow x = 25.61m$$

b) Wir nutzen Trigonometrie. Daraus ergibt sich

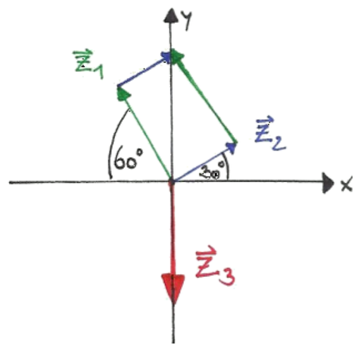
$$\tan(\alpha) = \frac{30-x}{20} \approx 0.2195 \Rightarrow \alpha = 12.4 \text{ Grad}$$

c) Falls $v_1 = v_2$ gilt, so setzen wir dies in das Resultat von a) ein und erhalten als neuen Punkt

$$P = A = (0|0)$$

Aufgabe 3

Damit das Bild in Ruhe hängt, muss nach Newton ein Kräftegleichgewicht herrschen. Betrachten wir das folgende Modell Die Zugkraft $\vec{Z_3}$ ist gleich der Gewichtskraft des Bildes und somit



gilt

$$||\vec{Z_3}|| = m \cdot ||\vec{g}|| = 5Kg \cdot 9.81\frac{m}{s^2}$$

Das Kräftegleichgewicht formulieren wir mit

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$$

Dann muss in den jeweiligen Komponenten gelten

$$Z_{1x} + Z_{2x} + Z_{3x} = -Z_1\cos(60°) + Z_2\cos(30°) + 0 = 0$$

und

$$Z_{1y} + Z_{2y} + Z_{3y} = Z_1 \sin(60^\circ) + Z_2 \sin(30^\circ) - Z_3 = 0$$

Auflösen nach Z_1 oder Z_2 ergibt

$$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} Z_1$$

Aufgabe 4

a) Zeichnung des Koordinatensystems siehe Teilaufgabe b).

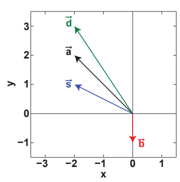
b) Summenvektor:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{e}_x + (a_y + b_y)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Differenzvektor:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{e}_x + (a_y - b_y)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zeichnung:



c) Vektormultiplikation:

$$\lambda_1 \vec{a} = (\lambda_1 a_x)\vec{e}_x + (\lambda_1 a_y)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \vec{b} = (\lambda_2 b_x)\vec{e}_x + (\lambda_2 b_y)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) Für die euklidische Norm gilt:

$$||\vec{a}|| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\sqrt{2}$$

und

$$||\vec{d}|| = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{13}$$

Der Winkel des Vektors $\vec{a}$ bezüglich der negativen x-Achse

$$\sin(\alpha) = \frac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Der Winkel des Vektors $\vec{d}$ bezüglich der negativen x-Achse

$$\sin(\delta) = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \delta \approx 56.3^\circ$$

e) Berechnung des Skalarproduktes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = -2$$

Für das Skalarprodukt gilt im Allgemeinen

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos(\ltimes \vec{a}, \vec{b})$$

Wenn man von der trivialen Lösung, also $\vec{a} = \vec{b} = 0$, absieht so muss nach dem Satz vom Nullprodukt einer der drei Faktoren Null sein. Damit muss gelten

$$\cos(\ltimes \vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow (\ltimes \vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

Damit müssen die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

f) Wenn die Vektoren linear abhängig wären, dann müsste gelten

$$\{\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} | \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}\}$$

Für λ_1 und λ_2 müsste also gelten

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Damit gilt

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Damit ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Damit sind die Vektoren linear unabhängig.
Für den *Span* gilt:

$$\{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i a_i | \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Damit können wir $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Basisvektoren fixieren, da diese linear unabhängig sind. Damit ist

$$span\{\vec{a}, \vec{b}\} \cong \mathbb{R}^2$$