Aufgabe 1

a) Der Zylinderschwerpunkt legt in einem infinitesimalen Zeitintervall die Strecke $ds = vdt$ zurück. Dies muss gleichzeitig der abgerollten Bogenlänge entsprechen. In der gleichen Zeit muss er sich um einen Winkel $\phi = \omega dt$ drehen. Winkel und Bogenlänge sind über $ds = Rd\phi$ miteinander verknüpft. Damit ergibt sich

$$v = r\omega$$

b) Die kinetische Energie der Translation ist gegeben durch

$$T_S = \frac{1}{2}mv^2$$

Für die Rotation gilt

$$T_R = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

wobei Θ das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes für eine Drehung um die Symmetrieachse ist. Wir wissen aus der Vorlesung

$$\Theta = \frac{1}{2}mr^2$$

Insgesamt folgt also

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mr^2\omega^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

Der Zylinder hat daher eine um den Faktor $\frac{3}{2}$ höhere kinetische Energie als eine Punktmasse m mit der gleichen Geschwindigkeit v.

c) Die auf den Zylinder wirkende Kraft lässt sich in zwei Anteile zerlegen . Eine Komponente wird senkrecht auf die schiefen Ebene und trägt nicht zur Beschleunigung bei. Die andere wirkt parallel zur schiefen Ebene. Dies führt auf eine Kraft

$$F = -mg\sin(\alpha)$$

d) Unter Vernachlässigung von Reibungskräften entspricht die Abnahme der potenziellen Energie beim Herabrollen gerade der Zunahme der kinetischen Energie. Der Potenzialnullpunkt kann beliebig verschoben werden, sodass wir

$$0 = E = \frac{3}{4}mv^2 + mgh$$

für die Energie schreiben können. Aufgrund der Geometrie ist die zurückgelegte Strecke entlang der Ebene

$$s = \frac{h}{\sin(\alpha)}$$

Dabei gilt außerdem

$$v = \dot{s} < 0$$

und es folgt

$$\ddot{s} = -\frac{2}{3}\sin(\alpha)\cdot g < 0$$

Aufgabe 2

a) Da keine dissipativen Kräfte wirken, ist die Energie des Systems erhalten. Die Ausnutzung der Energieerhaltung liefert:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg(2R - R(1 - cos(\phi)) = mgR(1 - cos(\phi)) \Rightarrow v = \sqrt{2gR(1 - cos(\phi))}$$

b) Der Klotz löst sich genau dann von der Oberfläche der Kugel, wenn die Zentrifugalkraft die wirkende Gravitationskraft kompensiert. Damit folgt der Ansatz

$$\frac{mv^2}{r} = mgcos(\phi)$$

Jetzt ersetzt man v durch den winkelabhängigen Ausdruck aus a). Daraus ergibt sich

$$2mg(1 - cos(\phi)) = mgcos(\phi) \Leftrightarrow 3mgcos(\phi) = 2mg \Rightarrow cos(\phi) = \frac{2}{3}$$

Als numerische Näherung ergibt sich $\phi \approx 0.841rad$ oder $\phi \approx 48.19$ Grad .

Aufgabe 3

a) Es handelt sich um einen inelastischen Stoß. Man hat infolge dessen keine Energie bzw. Impulserhaltung. Der Stoß der Kugel bewirkt aber eine Drehung der Klappe, also haben wir eine Drehimpulserhaltung bezüglich des Aufpunktes Scharnier.

b) Wir schreiben die Gleichung für die Drehimpulserhaltung auf

$$\underbrace{m_1 \cdot v_1 \cdot 2r}_{Kugel\,vorher} = \underbrace{I \cdot \omega_1}_{Klappe\,nachher}$$

Für das Trägheitsmoment I bezüglich unserer Drehachse gilt

$$I_{ges} = \underbrace{I_{Kugel}}_{m_1(2r)^2} + \underbrace{I_{Klappe}}_{\frac{M(2r)^2}{12} + \underbrace{Mr^2}_{Steiner}}$$

Damit folgt für das gesamte Drehmoment

$$I_{ges} = \frac{M}{6} \cdot 4^2 + \frac{M}{12} \cdot 4r^2 + Mr^2 = 2Mr^2$$

Bewegungsgleichung schreiben als

$$\frac{M}{6} \cdot v_1 \cdot 2r = 2Mr^2 \cdot \omega_1$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = \frac{v_1}{6r}$$

2c) Hier können wir wieder die Energieerhaltung nutzen, da der Vorgang des Stoßes ja bereits abgeschlossen ist. Wir haben also

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{rot} = const. = E_{pot,Kugel} + E_{pot,Klappe} + E_{rot}$$

d) Wir können nun unsere Ergebnisse von Aufgabenteil *b*) verwenden.

$$E_{ges} = \frac{M}{6} \cdot g \cdot 2r + M \cdot g \cdot r + \frac{1}{2} I\omega_1^2 = Mr(\frac{4}{3}g + r\omega_1^2)$$

Beim Aufprall muss gelten

$$E_{ges} = E_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \underbrace{E_{pot}}_{Null}$$

Mit der Energieerhaltung folgt

$$\underbrace{Mr(\frac{4}{3}g + r\omega_1 2)}_{vorher} = \underbrace{Mr^2\omega_2^2}_{Aufprall}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}g + r\omega_1^2 = r\omega_2^2$$

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + \frac{4g}{3r}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{4g}{3r}} \text{ mit } \omega_1 = \frac{v_1}{6r}$$

Damit folgt insgesamt für ω_2:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{v_1^2}{36r^2} + \frac{4g}{3r}}$$

Aufgabe 4

a) Für das Drehmoment gilt $M = r \times F$ und für den Betrag somit $|M| = r \cdot F$. Falls das Drehmoment auf den Chemiker mit der Masse M größer ist als die Reibungskraft so fällt dieser um. Also gilt

$$Mr\ddot{\theta} = Mr\alpha = M\mu g \Rightarrow \alpha < \frac{\mu g}{r}$$

b) Für die Lösung dieser Aufgabe muss man zuerst die Winkelgeschwindigkeit explizit berechnen. Es gilt aus den Anfangsbedingungen $r = const$ und somit $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ und $\ddot{\theta} = const$ und somit $\dot{\theta} = \alpha \cdot t$. Die anwesenden Kräfte sind die radial wirkende Zentrifugalkraft $\vec{F_{ZF}} = Mr\dot{\theta}^2\vec{e_r}$ und die in θ-Richtung wirkende Eulerkraft $\vec{F_{Euler}} = -Mr\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$. Damit ergibt sich für die wirkende Gesamtkraft

$$\vec{F} = -Mr\dot{\theta}^2\vec{e_r} + Mr\ddot{\theta}\vec{e_\theta} = -Mr\alpha^2 t^2\vec{e_r} + Mr\alpha\vec{e_\theta}$$

c) Wir nehmen also an, dass $|\vec{F}| < \mu M g$ ist. Der Betrag der wirkenden Gesamtkraft ergibt sich nach b) zu

$$||F||_2 = M\sqrt{r^2\alpha^4 t^4 + r^2\alpha^2} < M\mu g$$

Mit etwas Algebra folgt

$$r^2\alpha^4 t^4 < \mu^2 g^2 - r^2\alpha^2$$

Damit folgt

$$t < \frac{1}{\alpha}\sqrt[4]{\frac{\mu g^2}{r} - \alpha^2}$$