Aufgabe 1

a) Wir bezeichnen den senkrechten Abstand von der Drehachse mit $r_\perp$. Da die Kugel homogen ist, gilt natürlich $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \rho$. Für das Trägheitsmoment I_K der Kugel gilt

$$I_K = \int_V r_\perp^2 dm = \int_V \rho(r) r_\perp^2 dr^3 = \int_0^{R_K} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta)\rho r^2 \sin(\theta)^2 d\theta$$
$$= 2\pi\rho \int_0^{R_K} r^4 dr \int_0^\pi \sin(\theta)^3 d\theta = 2\pi\rho \cdot \frac{1}{5} R_K^5 \cdot \frac{4}{3} = \rho \frac{4\pi}{3} R_K^3 \cdot \frac{2}{5} R_K^2 = \frac{2}{5} m_K R_K^2$$

b) Zunächst müssen wir den Ring über den Polarwinkel θ parametrisieren.
Dafür gilt:

$$\gamma : [0,\pi] \longrightarrow R \subset \mathbb{R}^3 \ , \theta \mapsto \gamma(\theta) = R_{Ring} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ 1 + \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Das diese Parametrisierung das gewünschte liefert erkennt man sofort, wenn man die entsprechenden Werte einsetzt. Beispielsweise möchte man für $\theta = 45°$ in der $x-$ Komponente R_{Ring} erhalten, da dies genau die Projektion auf die $x-$ Achse darstellt .Weiter erhält man für $\theta = 90°$, dass die Projektion auf die $y-$ Achse gerade zwei mal der Radius ist.
Der senkrechte Abstand eines Punktes auf dem Ring zur Drehachse ist einfach durch dessen $x-$ Koordinate gegeben. Das Trägheitsmoment I_R lautet dann

$$I_R = \int_\gamma x^2 dm = \int_\gamma \lambda x^2 ds$$

wobei wir das differentielle Wegelement schreiben können als

$$ds = ||\frac{d\gamma}{d\theta}||d\theta = R_{Ring} d\theta$$

Aus $x^2 = R_{Ring}^2 \sin(\theta)^2$ folgt dann

$$I_R = \int_0^\pi \lambda R_R^3 \sin(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\lambda\pi R_R^3 = \frac{1}{2} m_R R_R^2$$

c) Aus dem *Satz von Steiner* und der Summe der oben berechneten Trägheitsmomente erhält man schließlich das gesamte Trägheitsmoment

$$I = I_{Ring} + I_{Kugel} + m_K R_R^2$$

Aufgabe 2

Der aus den beiden Kugeln zusammengesetzte Körper ist rotationssymmetrisch bezüglich der $y-$ Achse. Somit hat der Trägheitstensor Diagonalgestalt und es muss $I_{11} = I_{33}$ gelten. Da die Massenverteilung der Kugeln radialsymmetrisch ist, fällt der Schwerpunkt der Kugeln mit ihrem Mittelpunkt zusammen. Für das Trägheitsmoment einer Kugel bezüglich einer beliebigen durch den Schwerpunkt gehenden Achse (*z.B. die z-Achse*) gilt unter Verwendung von Kugelkoordinaten

$$I_K = \int_K \rho(\vec{r})(x^2+y^2)d^3r =$$

$$\frac{5}{4\pi}\frac{M}{R^5}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta r^2 \cdot r^2(\cos(\phi)^2\sin(\theta)^2 + \sin(\phi)^2\sin(\theta)^2 \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) =$$

$$\frac{5}{4\pi}\frac{M}{R^5}\int_0^R r^6 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin(\theta)^3 d\theta = \frac{5}{4\pi}\frac{M}{R^5}\cdot\frac{R^7}{7}\cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3}\frac{10}{21}MR^2$$

Das Trägheitsmoment des Gesamtkörpers bezüglich der $y-$Achse lautet nun $I_{22} = 2I_K$. Für die anderen beiden Trägheitsmomente muss man den Satz von Steiner anwenden. Da die Schwerpunkte der Kugeln bei $y = \pm R$ liegen, ergibt sich

$$I_{11} = I_{33} = 2\cdot(I_K + MR^2) = 2I_K(1+\frac{21}{10}) = 2I_K\frac{31}{10}$$

Damit lautet der Trägheitstensor

$$\tilde{I} = 2I_K\begin{pmatrix} \frac{31}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31}{10} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Wir berechnen zuerst die Komponente I_{11}:

$$I_{11} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \rho(y^2+z^2) = m\frac{b^2+c^2}{12}$$

und $I_{12} = I_{21} = I_{31} = I_{13} = I_{23} = I_{32} = 0$, da der Körper entlang den Hauptträgheitsachsen ausgerichtet ist. Die anderen Komponenten ermitteln man aus Symmetrieüberlegungen, indem man a, b, c zyklisch vertauscht. Man erhält

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

a) Wir nutzen den *Satz von Steiner*. Mit dem Achsenabstand $\frac{a}{\sqrt{2}}$ folgt

$$I = \frac{1}{6}ma^2 + m(\frac{a}{\sqrt{2}})^2 = \frac{2ma^2}{3}$$

Der Drehimpuls bezüglich der Schwelle ist während des Stoßes erhalten.

$$m \cdot v_0 \frac{a}{2} = I\omega \Rightarrow \omega = \frac{3}{4}\frac{v_0}{a}$$

Die kinetische Energie T nach dem Stoß ist geringer als die vor dem Stoß, denn

$$T - T_0 = \frac{1}{2}T\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{5}{16}mv_0^2$$

b) Überkippen passiert, wenn der Würfel sich um einen Winkel größer als 45° dreht. Da der Kaugummi keine Energie mehr absorbiert, wird die Energie nach dem Stoß erhalten. Bei einer Rotation um 45° erhöht sich der Schwerpunkt um $\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2}$ und die potentielle Energie um $\Delta V = \frac{mga(\sqrt{2}-1)}{2}$.
Im Grenzfall wir die gesamte verbliebene kinetische Energie $T = \frac{3}{16}mv_0^2$ dafür aufgebracht.

$$T = \Delta V \Rightarrow v_G = \sqrt{8ag\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$$