Aufgabe 1

Für das Volumen des Kegels muss man sich überlegen, dass in Zylinderkoordinaten der Radius von der Höhe abhängt. Es ist

$$r(z) = R(1 - \frac{z}{H})$$

Damit folgt

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^H dz \int_0^{r(z)} r dr$$

Da die Grenze bei der Integration noch von z abhängt müssen wir zuerst dr integrieren. Insgesamt erhält man

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 H$$

Bei der Bestimmung des Trägheitsmoments muss man beachten, dass $r_\perp = r$. Dann folgt

$$I = \int_V r_\perp^2 \rho dV = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^H dz \int_0^{r(z)} r^2 \cdot r = \frac{3}{10} M R^2$$

Aufgabe 2

a) Die Fläche A ist gegen durch ein Quadrat mit den Abmessungen

$$A = [1,2] \times [1,2]$$

Damit folgt für das Integral

$$\int_1^2 dx \int_1^2 dy = (y\big|_1^2) \cdot \int_1^2 dx = 1 \cdot 1 = 1$$

und analog folgt

$$\int_A \frac{1}{x+y} dxdy = \int_1^2 dx \int_1^2 dy \frac{1}{x+y} = \int_1^2 dy(\log(2+y) - \log(1+y)) =$$

$$(y+2)\log(y+2) - (y+1)\log(y+1)\big|_1^2 = \log(\frac{1024}{729})$$

b) Hier muss man beachten, dass die Grenzen von einem der Funktionsparameter abhängt. Es gilt

$$x \in [0,2] \text{ und } y = \frac{1}{2}x$$

Des Weiteren muss zuerst die Variable integriert werden, von denen die Grenzen abhängen

$$I_3 = \int_A dydy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}x} dy = \frac{1}{2}\int_0^2 xdx = 1$$

und analog

$$I_4 = \int_A (x^2+y^2) dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}x} (x^2+y^2) dy = \int_0^2 (yx^2 + \frac{1}{3}y^3)\big|_1^{\frac{x}{2}} dx$$

Aufgabe 3

a) Aufgrund der Geometrie der Erde folgt

$$I_S = \frac{2}{5}MR^2 = 9.7 \times 10^{37} Kgm^2$$

Damit folgt für das Drehimpuls

$$L = I_S\omega = 7.07 \times 10^{33} Kgm^2s^{-1}$$

und damit gilt für die Energie

$$E_{Rot} = \frac{1}{2}I_S\omega^2 = \frac{1}{5}MR^2\omega^2 = 2.57 \times 10^{29} J$$

b) Die Masse der Erde ist in diesem Fall

$$M_E = \frac{4}{3}\pi\rho_1\frac{R^3}{8} + \frac{4}{3}\pi\rho_2(R^3 - \frac{1}{8}R^3) = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

mit der mittleren Dichte ρ gilt

$$\rho_1 + 7\rho_2 = 8\rho$$

und der Bedingung $\rho_1 = 2\rho_2$ folgt

$$\rho_2 = \frac{8}{9}\rho \text{ und } \rho_1 = \frac{16}{9}\rho$$

Damit gilt für das Trägheitsmoment

$$I_S = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\{\rho_1(\frac{R}{2})^3(\frac{R}{2})^2 + \rho_2\{R^3R^2 - (\frac{R}{2})^3(\frac{R}{2})^2\}\} =$$

$$\frac{8}{15}\pi(\rho_1\frac{R^5}{32} + \rho_2\frac{31}{32}R^5) = \frac{11}{30}MR^2 = 0.367MR^2$$

Dies sollte mit $\frac{2}{5}MR^2 = 0.4MR^2 = 9.72 \times 10^{37} Kg \cdot m^2$ der homogenen Erde verglichen werden.

c) Die Menschen würden ein Drehmoment

$$D = nmaR = 5 \times 10^9 \cdot 70 \cdot 2 \cdot 6.37 \times 10^6 Nm = 4.46 \times 10^{18} Nm$$

erzeugen. Dieses würde zu einer relativen Abnahme $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta L}{L}$ der Erdrotationsgeschwindigkeit führen. Mit den Zahlenwerten folgt

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = 5 \cdot 6.3 \times 10^{-16} = 3.15 \times 10^{-15}$$

Aufgabe 4

a) Es ist

$$I = \int_V r^2 \rho dV = 2\pi H \rho_0 \int_{r=0}^{R} \{1 + (\frac{r}{R})^2\} r^3 dr = \frac{10\pi}{12}\rho_0 H R^4 = \frac{5}{6}\rho_0 R^2 V$$

Für die Masse gilt

$$M = \int_V \rho dV = \frac{3}{2}\pi\rho_0 H R^2 \Rightarrow I = \frac{5}{9} M R^2$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$M = 18.85 Kg \text{ und } I = 0.105 Kg m^2$$

b) Es ist

$$a = \frac{g \cdot \sin(\alpha)}{1 + \frac{I_S}{MR^2}} = \frac{g \cdot \sin(10°)}{\frac{14}{9}}$$

Damit folgt für die Zeit

$$h = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 1.35 s$$

Aufgabe 5

Wir wollen das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2}$$

lösen. Dazu betrachten wir das Integral

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

Mit der entsprechenden Substitution und Einführung von Zylinderkoordinaten wird dieses Integral zu

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dz z e^{-\lambda z^2} = 2\pi \frac{-e^{-\lambda z^2}}{2\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{\pi}{\lambda}$$

Damit gilt

$$I = \sqrt{I^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$