Übungsblatt IV

Aufgabe 1

a) Man benutze die Gleichung

$$\vec{F} = \dot{\vec{t}}$$

Hier ändert sich jedoch nicht der Betrag der Kraft sondern die Richtung. Man beachte, dass man einen festen Aufpunkt für den Winkel wählen muss.

b)

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Aufgabe 2

Da die Energie beim Stoß erhalten ist, können wir den Energieerhaltungssatz nutzen. Zunächst gilt die Impulserhaltung

$$\vec{p^i} = \vec{p_1^i} + \vec{p_2^i} = \vec{p_1^f} + \vec{p_2^f} = \vec{p^f}$$

und

$$\frac{(p_1^i)^2}{2m_1} + \frac{(p_2^i)^2}{2m_2} = \frac{(p_1^f)^2}{2m_1} + \frac{(p_1^f)^2}{2m_2}$$

Da die zweite Kugel am Anfang zunächst ruht, reduziert sich der Ausdruck auf

$$\frac{(p_1^i)^2}{2m_1} = \frac{(p_1^f)^2}{2m_1} + \frac{(p_1^f)^2}{2m_2}$$

Aufgabe 3

a) Es wirkt die Gravitationskraft. Demnach ist

$$a = -g \Rightarrow r(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2.2m$$

Gesucht ist der Punkt, wenn der Koffer auf dem Boden auftrifft also

$$r(t) = 0 \Rightarrow t = +\sqrt{\frac{4.4}{g}}$$

b) Da der Passagier bezüglich des Systems des Zuges in Ruhe befindet ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + 2.2 \end{pmatrix}$$

c) Für einen Beobachter auf dem Bahndamm, gibt es eine überlagerung aus der Bewegung des Zuges und dem freien Fall des Koffers. Es gilt also

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 280t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + 2.2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

a) Hier wirken zwei Kräfte, einmal die Gravitationskraft und einmal die Reibungskraft. Es ist also

$$F_{Res} = F_{Grav} + F_{Reibung} = mg - 6\pi\eta Rv$$

Mit Newton II folgt

$$ma = m\ddot{r} = mg - 6\pi\eta R\dot{r} \Rightarrow \ddot{r} = g - \frac{6\pi\eta R}{m}\dot{r} \Leftrightarrow \ddot{r} + \frac{6\pi\eta R}{m}\dot{r} = g$$

b) Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche wir nun im ersten Schritt auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen. Mit der Substitution

$$\ddot{r} \longmapsto \dot{r} \ , \ \dot{r} \longmapsto r$$

folgt

$$\dot{r} + \frac{6\pi\eta R}{m}r = g$$

Nun betrachten wir zuerst die homogene Differentialgleichung

$$\dot{r} + \frac{6\pi\eta R}{m}r = 0$$

Dies schreiben wir um in die Form

$$\frac{dr}{dt} + br = 0$$

wobei wir $\frac{6\pi\eta R}{m} = b$ gesetzt haben. Damit folgt

$$\frac{dr}{r} = -bdt \Rightarrow \int \frac{dr}{r} = -\int bdt \Rightarrow ln(r) + C = -bt \Rightarrow r = Ce^{-bt}$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man durch raten. Insgesamt folgt

$$r(t) = \frac{gm}{6\pi\eta R}t + Ce^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}$$

c) Für $t \to \infty$ geht der Exponentialterm gegen Null und somit folgt für das asymptotische Grenzverhalten

$$v(t)_\infty = \frac{gm}{6\pi\eta R}$$

Aufgabe 5

a) Nach der Eulerschen Formel gilt

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

Insbesondere gilt dann

$$e^{i\alpha+i\beta} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

Demnach ist

$$e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i\sin(\beta) =$$

$$-\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) + i\sin(\alpha)\cos(\beta) + i\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Anwendung der Definition der trigonometrischen Funktionen liefert das Ergebnis.

b) Es ist

$$|z_1| = 1 \text{ und } \Phi = 270° \ , \ Re(z_1) = 0 \ , \ Im(z_1) = -1$$

$$|z_2| = \sqrt{3^3 + 4^2} = 5 \text{ und } \Phi \approx 53° \ , \ Re(z_2) = 3 \ , \ Im(z_2) = 4$$

Für die letzte Zahl, wollen wir diese zuerst zerlegen

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$$

Damit folgt

$$|z_3| = 1 \text{ und } \Phi = 90° \ , \ Re(z_3) = 0 \ , \ Im(z_3) = 1$$

c) Zuerst wissen wir, dass jede komplexe Zahl in der Form

$$z^n = |z|^n e^{in\phi}$$

geschrieben werden kann. Betrachte nun

$$e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$$

und insgesamt

$$z^n = |z|^n e^{in\phi} = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$