Kurzfrage 1

Wir wissen, dass die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe ist, d.h. wir können dieser einen Betrag und eine Richtung zuordnen. Laut der Aufgabenstellung wissen wir, dass der Betrag konstant ist, also $|\vec{v}| = const$. Wenn aber die Geschwindigkeit ein Vektor ist, so muss auch deren Ableitung, die Beschleunigung, ein Vektor sein. Da sich aber unter Umständen die Richtung der Geschwindigkeit ändert, ändert sich auch die Beschleunigung. Die Beschleunigung muss deshalb mitnichten ein konstanter Vektor sein.

Kurzfrage 2

Hier muss man sich klar machen, in welchen System man sich befindet. Wir befinden uns im System dem fahrenden Zuges. Das heißt, dass sich das System für einen im Zug befindenden Beobachter in Ruhe befindet, für einen ausserhalb des Zuges stehenden Beobachters bewegt sich das System mit der Geschwindigkeit v. Insbesondere befindet sich auch der Ball in dem System des Zuges. Da Ball und die werfende Person sich in dem Systems des Zuges befinden und somit aus dem System des Zuges betrachtet ruhenden Systems, findet nur ein vertikaler Wurf statt, der gerade nach oben fliegt.

Rechenaufgabe 1

b) Es gilt

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{R^2\cos(\omega t)^2 + R^2\sin(\omega t)^2 v_0^2 t^2} = \sqrt{R^2 + v_0^2 t^2}$$

Des Weiteren ist

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = -R\omega\sin(\omega t)\vec{e}_x + R\omega\cos(\omega t)\vec{e}_y + v_0\vec{e}_z$$

und damit

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}$$

Und letztendlich

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2\cos(\omega t)\vec{e}_x - R\omega^2\sin(\omega t)\vec{e}_y + 0\vec{e}_z$$

mit

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{R^2\omega^4} = R\omega^2$$

c) Die Länge des Weges berechnen wir mittels

$$s(t) = \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} |\vec{v}(t)|dt = \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}dt = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}(\frac{4\pi}{\omega})$$

Rechenaufgabe 2

a) Als Parametrisierung für $t \in [0, t_1]$ wähle man

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\frac{\pi}{t_1} \cdot t) \\ R\sin(\frac{\pi}{t_1} \cdot t) \end{pmatrix}$$

denn dies liefert für die angegebenen Werte

$$\vec{r}_1(0) = \begin{pmatrix} R\cos(0) \\ R\sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r}_1(t_1) = \begin{pmatrix} R\cos(\pi) \\ R\sin(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den zweiten Teil der Parametrisierung gilt

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -R \\ -L(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}) \end{pmatrix}$$

denn dies liefert für die angegeben Werte

$$\vec{r}_2(t_1) = \begin{pmatrix} -R \\ -L(\frac{t_1-t_1}{t_2-t_1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r}_2(t_2) = \begin{pmatrix} -R \\ -L(\frac{t_2-t_1}{t_2-t_1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \\ -L \end{pmatrix}$$

Das die Geschwindigkeit , also $||\vec{v}||$ konstant ist, ist unmittelbar klar. Für den ersten Teil aus Aufgabe 1 und für den zweiten Teil, da es sich in jeder Komponente um eine konstante bzw. lineare Funktion handelt.

b) Wir berechnen den Beschleunigungsvektor. Es gilt allgemein

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}\vec{r}(t)) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$$

Es ist also

$$\vec{a}_1(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_1(t) = -R(\frac{\pi}{t_1})^2 \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{t_1 \cdot t}) \\ \sin(\frac{\pi}{t_1} \cdot t) \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{a}_2(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rechenaufgabe 3

Es gelte $\sqrt{<\vec{v}|\vec{v}>} = |\vec{v}(t)| = const.$ Wir rechnen

$$0 = \frac{d}{dt}const. = \frac{d}{dt}(<\vec{v}|\vec{v}>) = 2 <\vec{a}|\vec{v}>$$

Damit folgt

$$0 = <\vec{a}|\vec{v}> \longrightarrow \vec{a} \perp \vec{v}$$

Damit folgt die Aussage.