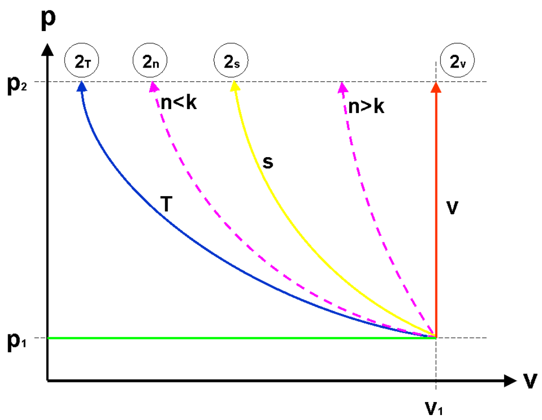
Aufgabe 1

a) Wir bezeichnen mit rot den isochore Zustandsänderung , mit blau die isotherme, mit grün die isobare, mit gleb die isentrope und mit lila die polytrope.



b) i) Für die isochore Zustandsänderung gilt

$$v = const, \quad pv = RT \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 293K \cdot \frac{10bar}{0.96bar} = 3052.08K$$

Für das Volumen gilt

$$V_2 = V_1 = \frac{m_1 R T_1}{p_1} = \frac{10Kg \cdot 287 \frac{J}{Kg \cdot K} \cdot 293K}{0.96 \times 10^5 Pa} = 8.759m^3$$

Die Volumenänderungsarbeit ergibt sich durch

$$W_{12} = -\int pdV = 0, \quad da\ dV = 0$$

Nach dem ersten Hauptsatz gilt für ein geschlossenes System

$$\Delta_{12} U = Q_{12} + W_{12} \Rightarrow c_v m \left(T_2 - T_1\right) = Q_{12}$$

Ferner ist

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V}\ ,\ c_p - c_v = R \Rightarrow c_v = \frac{R}{\kappa - 1}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$Q_{12} = \frac{R}{\kappa - 1} m \left(T_2 - T_1\right) = 19796.4KJ$$

ii) Bei der isothermen Zustandsänderung gilt

$$pv = RT = const = p_1 v_1 = p_2 v_2 \Rightarrow T_2 = T_1 = 293K$$

$$p_1 \underbrace{m_1 v_1}_{V_1} = p_2 \underbrace{m_2 v_2}_{V_2} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2} = 0.841 m^3$$

Für die verrichtete Arbeit gilt

$$W_{12} = -\int_1^2 p dV = -\int_1^2 p_1 V_1 \frac{dV}{V} = -p_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\Rightarrow W_{12} = 1970.5 KJ$$

iii)

$$V_2 = 1.643 m^3 \quad W_{12} = 2004.2 KJ$$

iv)

$$V_2 = 1.444 m^3 \quad T_2 = 503.19 K \quad W = \frac{mR}{n-1}(T_2 - T_1) = 2010.8 KJ$$

Aufgabe 2

a) Nach der barometrischen Höhenformel gilt

$$p_W = p_0 \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} = 1.025 \times 10^5 \frac{N}{m^2} e^{-\frac{3800}{7960}} = 635.9 mbar$$

Die Lufttemperatur auf der Wildspitze ist dann näherungsweise gegeben durch

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{0.6K}{100m}$$

Damit folgt

$$\Delta T = \left(\frac{dT}{dz}\Delta z\right) = -\frac{0.6K}{100m} \cdot 3800m = -22.8K$$

$$T_W = T_0 + \Delta T = 275.35K = 2.2°C$$

b) Wir nehmen eine polytrope Zustandsänderung der Luft an.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow \frac{T_W}{T_0} = \left(\frac{p_w}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} = \frac{\ln\left(\frac{T_W}{T_0}\right)}{\ln\left(\frac{p_W}{p_0}\right)} \Rightarrow k = 0.1666 \Rightarrow n = 1.2$$

Wir bestimmen nun die $0°C$ Grenze. Wir erhalten den Druck über die Polytropengleichung.

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \Rightarrow \frac{p_G}{p_0} = \left(\frac{T_G}{T_0}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

Damit ergibt sich

$$p_G(T_G) = p_0 \left(\frac{T_G}{T_0}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 606.07 mbar$$

Die Höhe bestimmen wir

i) mit der barometrischen Höhenformel:

$$p(z_G) = p_0 e^{-\frac{z_G}{z_0}} \Rightarrow z_G = -z_0 \ln\left(\frac{p(z_G)}{p_0}\right) = 4182.6m$$

ii) mit der "Faustformel":

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{0.6K}{100m} \Rightarrow \Delta z = -\frac{100}{0.6}\Delta T = 4166.7m \Rightarrow z_F = 4166.7m$$

iii) Extrapolation von Wildspitze bei $2.2°C$ auf $0°C$ Höhe.

Für den absoluten Fehler gilt

$$f_{abs} = |\Delta z| = |z_G - z_F| = 15.9m$$

Für den relativen Fehler gilt

$$f_{rel} = \frac{|\Delta z|}{z_F} = 0.382\%$$

c) Wir nehmen an, dass es sich um eine reversible adiabatische Zustandsänderung handelt.

$$\dot{Q}_{12} + \dot{W}_{12} = \dot{m}\left(\Delta_{12}h + \Delta_{12}\frac{c^2 2}{+}\Delta_{12}gz\right)$$

Da es sich um ein ideales Gas handelt, gilt

$$\Delta h = c_p \Delta T \Rightarrow \Delta_{12}T = -\frac{g}{c_p}(z_2 - z_1) = -37.28K$$

Also

$$T_2 = T_1 + \Delta T = -12.28°C$$

Für den Luftdruck gilt

$$\frac{p_w}{p_0} = \left(\frac{T_W}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{T_W}{T_0}\right)^{\frac{c_p}{R}}$$

Wir wissen, dass $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, $R = c_p - c_v$. Damit folgt $c_v = c_p - R$.

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} = \frac{\frac{c_p}{c_p - R}}{\frac{c_p}{c_p - R} - 1} = \frac{c_p}{R}$$

$$\Rightarrow p_W = p_0 \left(\frac{T_W}{T_0}\right)^{\frac{c_p}{R}} = 643.6mbar$$

Aufgabe 3

a) Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden

Fall 1) Für einen isothermen Prozess gilt $T_1 = T_0 = T_U = const$. Für ein ideales Gas gilt

$$pV = mRT \Rightarrow m_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_1 V_F}{RT_U} = 1.161Kg$$

Fall 2) Hier sind sowohl m_{F1} als auch T_1 unbekannt. Wir können wegen dem raschen Ausströmen eine isentrope Zustandsänderung annehmen. Wir betrachten die Zustandsänderung der in der Gasflasche verbleibenden Gasmenge. Es ist

$$pv^\kappa = const \Rightarrow pv^\kappa = p\left(\frac{RT}{p}\right)^\kappa = const$$

$$\frac{p}{p^\kappa}T^\kappa = const = p^{1-\kappa}T^\kappa \Leftrightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\kappa = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\kappa} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Damit folgt

$$m_F = 1.590Kg$$

b) Für die Gesamtmasse des geschlossenen Systems gilt

$$\Delta_{01}U = Q_{01} + W_{01} = 0 \Rightarrow Q_{01} = -W_{01}$$

Die Kopplungsbedingung ist $W_{01} = -W^u_{01}$. Es folgt

$$W^u_{01} = -\int_0^1 p_U dV = -p_U\left(V^u_1 - V^u_0\right)$$

Damit gilt für die zugeführte Wärme

$$Q_{01} = 200kJ$$

c) Wir nehmen ein reversibles adiabatisches Ausströmen an mit $T^*_1 = 219.18K$. Aufheizen der Flasche von T^*_1 auf $T_U = T_2$: isotherme Zustandsänderung

$$p_2 = p^*_1\frac{T_2}{T^*_1} = 27.375bar$$

Für die Wärme gilt

$$\Delta_{12}U = Q_{12} + W_{12} \Rightarrow Q_{12} = 91.944kJ$$

Aufgabe 4

a) Es gilt

$$W_{ges} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$$

Wenn $1 \longmapsto 2$ eine isentrope Verdichtung der Luft im Zylinder ist, gilt

$$pV^{\kappa} = const = p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}$$

$$W_{12} - \int_1^2 pdV = -\int_1^2 p_1 V_1^{\kappa} V^{-\kappa} dV = p_1 V_1 \frac{1}{\kappa - 1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right]$$

$$V_1 = V_H + V_T = 0.0012m^3 + 0.09 \cdot 0.0012m^3 = 0.001308m^3$$

$$V_2 = \left(\frac{p_1 V_1^{\kappa}}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 2.217 \times 10^{-4} m^3$$

und

$$W_{12} = 338.096J$$

Wenn $2 \longmapsto 3$ eine isobare Befüllung des Kessels ist :

$$V_3 = V_T = 1.08 \times 10^{-4} m^3 \quad , \; p_2 = p_3 = 12bar$$

Dann ist

$$W_{23} = -\int_2^3 pdV = -p_2\left(V_3 - V_2\right) = 136.44J$$

Wenn $3 \longmapsto 4$ eine reversible adiabate (isentrope) Expansion des Restgases ist

$$W_{34} = -\int_3^4 pdV = p_3 v_3 \frac{1}{\kappa - 1}\left[\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa-1} - 1\right]$$

$$V_4 = V_3 \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = V_3 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 6.372 \times 10^{-4} m^3$$

Damit folgt für W_{34}

$$W_{34} = -164.704J$$

Wenn $4 \longmapsto 1$ eine isobare Belüftung ist

$$W_{41} = -67.08J$$

b)

$$P = n \cdot W_{ges} \Rightarrow P2.895kW$$