Aufgabe 1

Die Ruhelage sei $x = 0$. Wird der Klotz bis zur Auslenkung $x_0 > 0$ gebracht, so ist seine potenzielle Energie

$$E_{pot} = \int_0^{x_0} 2D_0 x dx = D_0 x_0^2$$

a) Nach dem Loslassen gleitet er bis zum Umkehrpunkt x_1 und verliert dabei die Reibungsenergie

$$E_R = f_1 mg\,(x_0 - x_1)$$

mit $x_1 < 0$. Damit folgt

$$D_0 x_1^2 = D_0 x_0^2 - f_1 mg\,(x_0 - x_1)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{f_1 mg}{D_0} - x_0 < 0$$

Für die Beträge der Auslenkungen gilt

$$|x_1| = |x_0| - \frac{f_1 mg}{D_0}$$

und allgemein

$$|x_n| = |x_{n-1}| - \frac{f_1 mg}{D_0} = |x_{n-1}| - 0.059m$$

$$|x_n| = |x_0| - \frac{n f_1 mg}{D_0} = |x_0| - n \cdot 0.059m$$

Die Abstände $|x_n|$ der Umkehrpunkte nehmen linear mit n ab. Die Bewegung des Klotzes ist eine gedäpfte, aber nichtharmonische Schwingung.

b) Der Klotz bleibt im n-ten Umkehrpunkt stecken, wenn dort die Rückstellkraft kleiner ist als die Haftreibungskraft. Also ist

$$2D_0|x_n| < f_0 mg \Rightarrow n > \frac{D_0 x_0}{f_1 mg} - \frac{f_0}{2f_1}$$

Einsetzten der Zahlenwerte liefert

$$n > \frac{100 \cdot 0.22}{0.3 \cdot 2 \cdot 9.81} - \frac{0.9}{2 \cdot 0.3} = 2.3$$

d.h. der Klotz bleibt spätestens beim dritten Umkehrpunkt stecken, wenn er ihn überhaupt erreicht. Um dies zu überprüfen, bestimmen wir seine Anfangsenergie am zweiten Umkehrpunkt

$$E_p = D_0 x_2^2 = D_0 \left(x_0 - \frac{2f_1 mg}{D_0} \right)^2$$

die größer sein muss als die Reibungsenergie $f_1 mg|x_3 - x_2|$, wenn x_3 erreicht werden soll. Einsetzten der Zahlenwerte zeigt, dass $E_p(x_1) = 1.05Nm$, $f_1 mg|x_3 - x_2| = 0.346Nm$ ist, d.h. x_3 wird erreicht. Somit bleibt der Klotz im Umkehrpunkt x_3 stecken.

c) Die Gesamtenergie ist gegeben durch

$$E = \frac{1}{2}D_0x_0^2 = \frac{1}{2}D_0x^2 + \frac{1}{2}mv^2 + f_1mg\,(x_0 - x)$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{D_0}{m}\right)\left(x_0^2 - x^2\right) - 2f_1g\,(x_0 - x)$$

Der Klotz wird bei $x = x_0$ losgelassen. Die Zeit für die Bewegung von x_0 bis zum Umkehrpunkt x_1 ($x_1 < 0$) sei T. man erhält T aus

$$T = \int_{t=0}^{t_0} dt + \int_{t_0}^{t_1} dt wobei \begin{cases} t_0 = t\,(x = 0) \\ t_1 = t\,(x = x_1) \end{cases}$$

mit

$$-dx = vdt \Rightarrow dt = -\frac{dx}{v}$$

Damit folgt dann

$$T = -\int_{x_0}^{0} \frac{dx}{v} - \int_{0}^{x_1} \frac{dx}{v} = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{v}$$

Einsetzten von

$$v = \sqrt{\frac{D_0}{m}\left(x_0^2 - x^2\right) - 2f_1g\,(x_0 - x)}$$

ergibt mit den Substitutionen

$$z = x_0 - x \Rightarrow x_0^2 - x^2 = (x_0 - x)\cdot(x_0 + x) = z\cdot(2x_0 - z) \quad ,dx = -dz$$

Ferner folgt mit

$$x = x_0 \Rightarrow z = 0 \quad a = \frac{D_0}{m} \quad b = 2ax_0 - 2f_1g$$

der Ausdruck für die Zeit

$$T = \int_{z=z_1}^{0} \frac{dz}{(-az^2 + bz)^{\frac{1}{2}}}$$

Dieses Integral ist analytisch lösbar und ergibt

$$T = -\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\arcsin\left(\frac{-2az + b}{b}\right)\right)\Bigg|_{z_1}^{0}$$

Den Umkehrpunkt x_1 erhält man aus

$$x_1 = \frac{f_1mg}{D_0} - x_0 < 0$$

Mit $x_0 = 0.22m$ folgt

$$T = \frac{1}{\sqrt{\frac{D_0}{m}}}\left(\arcsin(1) - \arcsin\left(1 - \frac{2az_1}{b}\right)\right)$$

Aufgabe 2

a) Wir wissen, dass die vom schwingenden System aufgenommene Leitung gegeben ist durch

$$P = m\gamma\omega^2 A_2^2 = \frac{\left(\frac{F_0^2}{m}\right)\cdot\gamma\cdot\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}$$

Diese ist proportional zum Quadrat des Imaginärteils b mit

$$b = -\frac{2K\gamma\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2} = A_2\sin(\phi)$$

weil nur die Dämpfung γ Energie verbraucht. Der Realteil a gegeben durch

$$a = \frac{K\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2} = A_2\cos(\phi)$$

bestimmt wegen $\tan(\phi) = \frac{b}{a}$ die Phasenverschiebung ϕ, verbraucht aber selbst keine Energie, weil für $b = 0$ und $\omega \neq \omega_0$ $\phi = 0$ folgt. Im Falle $b = 0$ und $\omega = \omega_0$ ist keine stationäre Schwingung möglich. Die Amplitude der erzwungenen Schwingung wächst stetig an bis $A \longrightarrow \infty$ (Resonanzkatastrophe) . In diesem Fall wird die Energie vom Erreger aufgenommen auch für $b = 0$, bis das System zerstört ist.

b) Der Radialteil des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten ist gegeben durch

$$\triangle_r = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

angewandt auf $\xi = \frac{A}{r}e^{i(kr-\omega t)}$ liefert

$$\triangle_r\xi = \left[-\frac{2}{r^3}+\frac{ik}{r^2}+\frac{2}{r^3}-\frac{2ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right]Ae^{i(kr-\omega t)} = -k^2\xi$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2\xi \Rightarrow \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\triangle_r\,\xi \Rightarrow c = \frac{\omega}{k}$$

c) Die Superposition der beiden Wellen ist gegeben durch

$$\xi = \xi_1+\xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta k}{2}z\right)\cos\left(\omega_m t - k_m z\right)$$

$$= 2A\cos(85t-0.25z)\cos(715t-1.75z)$$

Es ergibt sich also

$$v_{1Ph} = \frac{\omega_1}{k_1} = 400\frac{m}{s} \quad v_{2Ph} = \frac{\omega_2}{k_2} = 420\frac{m}{s}$$

Damit ist insgesamt

$$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}340\frac{m}{s}$$

Aufgabe 3

Auto mit Sebastian Vettel: I $mg = -kx$
Auto ohne Sebastian Vettel: II $Mg = -k(x - \Delta x)$
Setzt man I in II ein, so ergibt sich:

$$-k(\frac{mg}{-k} - \Delta x) \Leftrightarrow k\Delta x = Mg - mg \Leftrightarrow k = \frac{Mg - mg}{\Delta x}$$

Es ist bekannt, dass gilt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Damit folgt

$$\nu = \frac{\sqrt{\frac{k}{M}}}{2\pi} \approx 0.781\frac{1}{s}$$

Aufgabe 4

Der Trichter sei bis zur Höhe H gefüllt, sodass der Radius R der kreisförmigen Wasseroberfläche $R = H\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ist. Das Wasservolumen ist dann

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi H^3 \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{9}piH^3$$

da $\tan^2(30°) = \frac{1}{3}$.

a) Die Abnahme des Wasservolumens pro Zeiteinheit ist

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dH}\frac{dH}{dt} = \frac{1}{3}\pi H^2\frac{dH}{dt}$$

Andererseits gilt nach Hagen- Poisseuille

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi r^4}{4\eta L}\Delta p \quad mit\ r = \frac{d}{2}$$

Damit folgt

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{3}{8}\frac{r^4\rho g}{\eta LH} \Rightarrow HdH = -\alpha dt$$

mit

$$\alpha = \frac{3}{8}\frac{r^4\rho g}{\eta L} \approx 7.2\cdot 10^{-4}\frac{m^2}{s^2}$$

Integration liefert

$$H^2 = -2\alpha t + H_0^2 \quad mit\ H_0 = H(t=0)$$

Damit erhalten wir

$$H = \sqrt{H_0^2 - 2\alpha t}$$

b) Es ist

$$\frac{dM}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{3}\pi\alpha H\rho = -\frac{1}{3}\pi\alpha\rho\sqrt{H_0^2 - 2\alpha t}$$

Damit folgt

$$M(t) = \frac{1}{9}\pi\rho\left(H_0^2 - 2\alpha t\right)^{\frac{3}{2}}$$

c) Die Zeit bis alles Wasser ausgeflossen ist (d.h $H = 0$) , also muss

$$T = \frac{H_0^2}{2\alpha}$$

Mit $H_0 = 0.3m$, $r = 2.5 \times 10^{-3}m$, $L = 0.2m$ und $\eta = 1.0 \times 10^{-3}Pa \cdot s$ folgt für T

$$T = 62.5s$$

d) Für eine Füllmenge von $4L$ wird $H_0 = \left(\frac{9V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.225m$. Die Füllzeit ohne Nachfüllen des Trichters ist mit $\alpha = 7.2 \times 10^{-4}$ gegeben durch $T = 35s$. Mit Nachfüllen gilt $H = H_0 = const.$. Die Menge, die in der Zeit t in das 4-Liter-Gefäß fließt, ist dann

$$V = \frac{1}{3}\pi\alpha H_0 t \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 4 \times 10^{-3}}{\pi \cdot 7.2 \times 10^{-4} \cdot 0.225s} = 23.6s$$

Aufgabe 5

a) Hier kann man die Kontinuitätsgleichung benutzen. Es gilt

$$A_1v_1 = A_2v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1$$

b) Für die Strömungsgeschwindigkeiten gilt $v_1 = v_3 = v_4$, da für diese die Rohrquerschnitte identisch sind. Mit der Bernoulli- Gleichung folgt nun

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}\rho v_1^2(1 - (\frac{A_1}{A_2})^2)$$

Nun ersetzt man $p_2 - p_1 = \Delta p_{II} = \rho g\Delta h_{II}$ und damit

$$\Delta h_{II} = \frac{v_1^2}{2g}(1 - (\frac{A_1}{A_2})^2)$$

Da $v_1 = v_3$ gilt folgt $\Delta h_{III} = 0$ Im Steigrohr IV wird er Gesamtdruck $p_4 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$ gemessen. Damit folgt

$$\Delta p_{IV} = p_4 - p_1 = \rho g\Delta h_{IV} = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \rightarrow \Delta h_{IV} = \frac{v_1^2}{2g}$$

Aufgabe 6

a) Für den hydrostatischen Druck im Punkt 1

$$p = \rho g H$$

wobei ρ die Dichte des Mediums,g die Erdbeschleunigung und H die Höhe des Flüssigkeitsspiegel über dem betrachteten Punkt ist.

b) Um die Geschwindigkeit am Punkt 2 in der Mitte zu bestimmen, benutzen wir die Bernoulli Gleichung. Wir haben also

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \sqrt{2g(H-(h+\frac{d}{2}))}$$

c) Damit sich der Wasserpegel im Behälter nicht ändert, muss gelten:

$$\underbrace{Q_1}_{Zuflussrate} = \underbrace{Q_2}_{Abflussrate}$$

Damit gilt

$$Q_1 = Q_2 = A_2 v = (\frac{d}{2})^2 \pi v$$

d) Die Bewegungsgleichung ist

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0 \text{ mit } h_0 = h + \frac{d}{2}$$

Wir setzen $y(t) = 0$ und lösen diesen Ausdruck nach t auf.Wir erhalten

$$t_P = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Dies setzen wir in die Bewegungsgleichung für die $x-$ Richtung ein

$$x(t_P) = v \cdot t_P = \sqrt{\frac{2p}{\rho}\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{4p(h+\frac{d}{2})}{g\rho}} = 2\sqrt{(H-(h+\frac{d}{2}))(h+\frac{d}{2})}$$

Damit folgt für die Koordinaten des Auftreffpunktes

$$P(2\sqrt{(H-(h+\frac{d}{2}))(h+\frac{d}{2})}|0)$$