Übungsblatt II-Lösung

Kurzfrage 1

Wenn man sagt, dass man 100 Kilometer pro Stunde schnell fährt, dann kann man das natürlich als Durchschnittsgeschwindigkeit auffassen, also

$$v = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_2} = \frac{100km}{1h} = 100\frac{km}{h}$$

Natürlich kann man eine solche Geschwindigkeit auch für infinitesimal kleine Weg-und Zeitintervalle bestimmen, sie wird dann zur Momentangeschwindigkeit an einem *bestimmten Zeitpunkt*. Man sollte der Person damit erklären, dass sie zum Zeitpunkt t_0 die Geschwindigkeit

$$\left.\frac{dr(t)}{dt}\right|_{t_0} = 100\frac{km}{h}$$

aufwies.

Kurzfrage 2

Vom heutigen physikalischen Erkenntnisstandpunkt aus gesehen würden wir sagen, dass Achilles eine zwar konstante, aber betraglich größere Geschwindigkeit besitzt als die Schildkröte. Dadurch wird er sie natürlich, auch wenn sie einen *endlichen Vorsprung* besitzt, *irgendwann* einholen. Diese Erklärung setzt jedoch konzeptionell voraus, dass ein Geschwindigkeitsbegriff, bestehend als Zusammenhang zwischen *Ort* und *Zeit*, vorhanden ist. Zu Zeiten Zenons (und auch danach noch) gab es diesen Begriff eben noch nicht wirklich. Nehmen wir einmal an, die Schildkröte habe einen Vorsprung von einer Längeneinheit und Achilles sei viermal so schnell wie sie. Er läuft also los und kommt am Ausgangspunkt der Schildkröte an. Nun ist diese aber schon um ¼ Längeneinheiten voraus. Kommt er nun dort an, ist sie wieder um $\frac{1}{16}$ Längeneinheiten voraus usw. Damit bleibt der Abstand zwischen ihr uns Achilles immer positiv. Wenn wir jedoch noch die Zeit mit einbeziehen, ändert sich die Situation- Die erste Zeitmessung, wenn sich beide an ihren Ausgangspunkten befinden, sei etwa der Zeitpunkt $t_0 = 0$. Die zweite Messung findet dann zum Zeitpunkt $t_1 = 1$, die zweite zum Zeitpunkt $t_2 = 1 + 1/4$ statt usw. Damit lässt sich die *geometrische Folge*

$$T_n = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^j$$

konstruieren, die den Zeitpunkt der n-ten Ortsmessung angibt. Lässt man nun n gegen unendlich laufen, so erhält man die geometrische Reihe, die aufgrund $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ konvergiert:

$$T_{max} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Physikalisch heißt das, dass der maximale Messzeitpunkt bei $T_{max} = \frac{4}{3}$ liegt- Achilles wird die Schildkröte bei

$$T_{max} = \frac{4}{3}$$

überholen!

Kurzfrage 3

i) Die (Momentan-) Beschleunigung ist definiert als die Änderung der Geschwindigkeit in einem infinitesimal kleinen Zeitintervall.

ii) Die Höhe (hier willkürlich als y-Richtung festgelegt) bei einer Wurfbewegung in Abhängigkeit von der Zeit ist eine quadratische Funktion, also eine Wurfparabel. Sie hängt ab von der Anfangsgeschwindigkeit des Körpers in y-Richtung und der (je nach Koordinatensystemwahl beliebigen) Anfangshöhe y_0. (Hier hatte sich in der Aufgabenstellung ein Fehler eingeschlichen- der Linearfaktor der Parabel ist natürlich die Anfangsgeschwindigkeit in y-Richtung, nicht in x-Richtung)

iii) Der Betrag der Zentripetalbeschleunigung ist proportional zum Radius der Kreisbahn und dem Quadrat des Betrages der Winkelgeschwindigkeit.

Aufgabe 1

a) Allgemein kann ein (Orts-) Vektor in Kugelkoordinaten dargestellt werden durch

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\sin\theta(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\theta\,(t)\sin\varphi\,(t) \\ r(t)\cos\theta(t) \end{pmatrix} = r(t)\boldsymbol{e}_r$$

Die zeitliche Ableitung dieses Vektors ergibt sich durch Produkt-und Kettenregel, man beachte, dass auch die Winkel zeitabhängig sind!

$$=> \ \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}_r}$$

Das einzige, was jetzt hier im Wesentlichen noch bestimmt werden muss, ist die Zeitableitung des r-Einheitsvektors. Diese ergibt:

$$\dot{\boldsymbol{e}_r} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta(t)\cos\varphi(t) - \dot{\varphi}\sin\theta(t)\sin\varphi(t) \\ \dot{\theta}\cos\theta\,(t)\sin\varphi\,(t) + \dot{\varphi}\sin\theta(t)\cos\varphi(t) \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

Nun kann man sich die anderen Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten

$$\boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta(t)\cos\varphi(t) \\ \cos\theta\,(t)\sin\varphi\,(t) \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

anschauen und diese (mit Vorfaktoren) in der Ableitung identifizieren. Für die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten ergibt sich also

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r(\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi)$$

Die Bestimmung der Beschleunigung verläuft mit demselben Prinzip (Produkt/Kettenregel, Identifikation der Einheitsvektoren). Man erhält

$$\boldsymbol{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\, sin^2\theta\right)\boldsymbol{e_r} + 2\left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\,\right)\boldsymbol{e_\theta} + ((r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{e_\varphi}$$

Diese Darstellung ist insbesondere bei der Betrachtung von klassischen Nichtinertialsystemen relevant, da sie nämlich nichts anderes als die in solchen Bezugssystemen auftretenden Scheinkräfte angibt.

b) Die Beschleunigung an höchster bzw. tiefster Stelle ergeben sich durch Superposition aller auf den Massenpunkt wirkenden Kräfte. Dies ist zum einen die Zentripetalkraft, die zum Kreismittelpunkt hin wirkt, zum anderen die Gewichtskraft, die in z-Richtung wirkt. Am höchsten Punkt wirken die Gewichtskraft und die Zentripetalkraft in dieselbe, am tiefsten Punkt in entgegengesetzte Richtungen. Mit dem zweiten Newton´schen Axiom für zeitlich konstante Massen ergibt sich somit

$$a_{oben} = -R\omega^2 - g\,, \qquad a_{unten} = R\omega^2 - g$$

für die Beträge der Beschleunigungen.

Aufgabe 2

a) Offensichtlich handelt es sich um ein eindimensionales Problem, wir brauchen also nur genau eine Achse, nennen wir sie x-Achse. Wir wissen, dass die Anfangsgeschwindigkeit in positive x-Richtung null ist und wir können auch unser Koordinatensystem so wählen, dass wir für den Anfangsort $x_0 = 0$ erhalten. Der Rest ist Kinematik!
Zunächst wollen wir wissen, ob es das Flugzeug überhaupt schafft, auf die zum Abheben erforderliche Geschwindigkeit $v_a = 100\frac{km}{h} \approx 27.8\frac{m}{s}$ zu beschleunigen. Dazu verwenden wir die Gleichung

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a(x - x_0)$$

Einsetzen der angegebenen Werte für Anfangsgeschwindigkeit, Beschleunigung und Anfangsort liefert $v \approx 24.5\frac{m}{s}$. Die Länge der Startbahn reicht also nicht aus.

b) Nun soll ermittelt werden, wie lang die Startbahn denn sein müsste, damit sie zum Flugbetrieb geeignet ist. Hierfür können wir wieder dieselbe Formel wie in Aufgabenteil a) verwenden, nur dass wir diesmal die erforderliche Abhebegeschwindigkeit (v_A) kennen und die zur Beschleunigung auf diese Geschwindigkeit benötigte Startbahnlänge ermitteln wollen. Wir erhalten:

$$x_A = \frac{{v_a}^2 - {v_0}^2}{2a} \approx 193m$$

Die Startbahn müsste somit mindestens $193m$ lang sein.

Aufgabe 3

a) Dieses Mal haben wir es mit einem zweidimensionalen Problem zu tun. Das ist aber kein Problem, denn wir können solche Bewegungen einfach analysieren, indem wir zunächst die beiden Raumrichtungen getrennt betrachten und dann geschickt miteinander kombinieren. Im ersten Aufgabenteil soll die horizontale Entfernung ermittelt werden, in der die Vorräte abgeworfen werden müssen, um die Bergsteiger adäquat zu erreichen. Dazu legen wir zunächst unser Koordinatensystem derart, dass sich das Flugzeug zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt $x_0 = 0, y_0 = 0$ befindet (Natürlich ist auch eine andere Wahl des Koordinatensystems akzeptabel, die Physik ändert sich dadurch nicht). Da wir wissen, dass die Güter fallen gelassen werden, also die vertikale Anfangsgeschwindigkeit $v_{y0} = 0$ besitzen, ergibt sich zunächst die Fallzeit zu

$$t_{Fall} = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{-2(-200m)}{g}} \approx 6.39s$$

Nach dem Galilei´schen Fallgesetz können wir hiermit ganz einfach über

$$x = v_{0x} t_{Fall} = \left(69\frac{m}{s}\right)(6.39s) \approx 440m$$

die benötigte horizontale Abwurfentfernung zu den Bergsteigern. v_{0x} ist dabei einfach die Geschwindigkeit des Flugzeugs

b) Nun wollen wir die vertikale Abwurfgeschwindigkeit für die Güter ermitteln. Eine Information haben wir aus der Aufgabenstellung zusätzlich gewonnen- die horizontale Entfernung zu den Bergsteigern beträgt jetzt feste 400m. Damit können wir die Zeit ausrechnen, die das Flugzeug braucht, um von $x_0 = 0$ zu $x = 400m$ zu gelangen:

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \approx 5.80s$$

Nun verwenden wir die altbekannte Wurfparabel für die y-Richtung, um die vertikale Abwurfgeschwindigkeit v_{y0} zu ermitteln. Da wir willkürlich $y_0 = 0$ gewählt haben, ergibt sich

$$v_{y0} = \frac{y + \frac{g}{2}t^2}{t} = \frac{-200m + \frac{g}{2}(5.80s)^2}{5.80s} \approx -6.1\frac{m}{s}$$

Die Güter müssen folglich mit einer Geschwindigkeit von $6.1\frac{m}{s}$ in negative y-Richtung („nach unten“) geworfen werden, um bei den Bergsteigern zu landen.