Aufgabe 1

Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Funktionen. Um eine Funktion $f(r) = f(x, y, z)$ nach einer der Variablen x, y, z zu differenzieren, wende man die Differentialoperatoren $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ auf die Funktion f an. Dabei halte man die Variablen, welche man nicht differenzieren möchte konstant und führe so die partielle Ableitung einer Funktion mehrerer Veränderlicher auf die gewöhnliche Differenziation in einer Variablen zurück.

a)

$$\partial_x f(r) = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x f(x, y, z) = \partial_x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (-\frac{1}{2})(2x)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = -x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\partial_y f(r) = \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y f(x, y, z) = \partial_y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (-\frac{1}{2})(2y)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = -y \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\partial_z f(r) = \frac{\partial}{\partial z} = \partial_x f(x, y, z) = \partial_z \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (-\frac{1}{2})(2z)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = -z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

b)

$$\partial_x f(r) = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x (x^2 + y^2 + z^2) = 2x$$
$$\partial_y f(r) = \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y (x^2 + y^2 + z^2) = 2y$$
$$\partial_z f(r) = \frac{\partial}{\partial z} = \partial_z (x^2 + y^2 + z^2) = 2z$$

c) Hier müssen wir sowohl die Produktregel als auch die Kettenregel benutzen.

$$\partial_x f(x, y, z) = \partial_x (\frac{e^{-\alpha\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}) = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(-\alpha x)(\frac{e^{-\alpha\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}})$$
$$\partial_y f(x, y, z) = \partial_y (\frac{e^{-\alpha\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}) = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(-\alpha y)(\frac{e^{-\alpha\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}})$$
$$\partial_z f(x, y, z) = \partial_z (\frac{e^{-\alpha\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}) = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(-\alpha z)(\frac{e^{-\alpha\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}})$$

d) Hier verwenden wir die Kettenregel. Man beachte jedoch, dass $\partial_x log(x) = \frac{1}{x}$.

$$\partial_x f(x,y) = \partial_x(\log(\alpha x^2 + \beta y^2)) = 2\alpha x \cdot \frac{1}{\alpha x^2 + \beta y^2} = \frac{2\alpha x}{2\alpha x^2 + 2\beta y^2}$$
$$\partial_y f(x,y) = \partial_y(\log(\alpha x^2 + \beta y^2)) = 2\alpha y \cdot \frac{1}{\alpha x^2 + \beta y^2} = \frac{2\alpha y}{2\alpha x^2 + 2\beta y^2}$$

$$\partial_z f(x,y) = \partial_z(\log(\alpha x^2 + \beta y^2)) = 0$$

Aufgabe 2

Wir können im kartesischen $\mathbb{R}^3$ den Gradienten auffassen als

$$\text{grad}(f(x,y,z)) = \partial_x f(x,y,z)\vec{e}_x + \partial_y f(x,y,z)\vec{e}_y + \partial_z f(x,y,z)\vec{e}_z$$

Nun wenden wir dies auf unsere Funktionen an.

a)

$$F(\vec{r}) = -\text{grad}(f(x,y,z)) = -(\partial_x(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2)\vec{e}_x + \partial_y(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2)\vec{e}_y + 0\vec{e}_z) = -kx\vec{e}_x - ky\vec{e}_y$$

b)

$$F(\vec{r}) = -\text{grad}(f(x,y,z)) = Ax(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\vec{e}_x + Ay(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\vec{e}_y + A\alpha z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\vec{e}_z$$

c)

$$F(\vec{r}) = -\text{grad}(f(x,y,z)) = \frac{2xB}{x^2+y^2+z^2}\vec{e}_x + \frac{2yB}{x^2+y^2+z^2}\vec{e}_y + \frac{2zB}{x^2+y^2+z^2}\vec{e}_z$$

Aufgabe 3

i) Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gegeben durch $A = G \cdot h$ mit G der Grundflche und h der Höhe. Legt man die $x-$ Achse auf den Vektor $\vec{c}$, so ist die Höhe

$$h = ||\vec{b}|| \cdot \sin(\measuredangle \vec{b}, \vec{c})$$

Das Kreuzprodukt von $\vec{b} \times \vec{c}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf den beiden steht. Nennen wir diesen $\vec{k}$. Betrachten wir die Projektion dieses Vektors auf den Vektor $\vec{a}$, so gilt

$$h' = ||a|| \cdot \cos(\measuredangle \vec{a}, \vec{k})$$

Damit gilt für das Volumen des $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds

$$V = A \cdot h' = ||a||b\ ||c|| \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

ii) Wir betrachten den Ausdruck $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ in der i-ten Komponente. Also

$$[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]_i = a_i\cdot([\vec{b}\times\vec{c})]_i = a_i\epsilon_{ijk}b_jc_k = \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k$$

Die zyklische Vertauschbarkeit dieses Produktes folgt nun aus den Eigenschaften des Levi-Cevita-Tensors. Dieser ist vollständig antisymmetrisch und somit liefert dieser bei zyklischer Permutation immer den selben Wert.

iii) Auch hier verwenden wir den Epsilon-Tensor und zusätzlich das Kronecker-Delta(*siehe dazu auch mathematische Ergänzung auf der Homepage*).

$$[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]_i = \epsilon_{ijk}a_k[(\vec{b}\times\vec{c})]_k = \epsilon_{ijk}a_k\epsilon_{kmn}b_mc_n = \epsilon_{kij}\epsilon_{kmn}a_jb_mc_n =$$
$$(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})a_jb_mc_n = b_i(a_nc_n) - c_n(a_mb_m) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

iv) Die Jacobi-Identität zeigen wir durch Anwendung der Graßmann-Identität.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) + \vec{a}(\vec{c}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a}) + \vec{c}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$$

$$= \underbrace{\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a})}_{=0} + \underbrace{\vec{a}(\vec{c}\vec{b}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})}_{=0} + \underbrace{\vec{a}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})}_{=0} = 0$$

v) Hier wenden wir den Levi-Cevita-Tensor zweimal auf den Ausdruck an.

$$[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]_i = [\vec{a}\times\vec{b}]_i\cdot[\vec{c}\times\vec{d}]_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}a_jb_kc_md_n = (\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km})a_kb_kc_md_n$$

$$= \delta_{jm}\delta_{kn}a_kb_kc_md_n - \delta_{jn}\delta_{km}a_kb_kc_md_n = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$$

vi)

$$[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})]_i = \epsilon_{ijk}[\vec{a}\times\vec{b}]_j[\vec{c}\times\vec{d}]_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}\epsilon_{kno}a_lb_mc_nd_o = \vec{c}(\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})) - \vec{d}(\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}))$$

Aufgabe 4

i) Gegen bei das Tupel (i,j,k) mit $i,j,k\in\{1,2,3\}$. Dann gilt per Definition

$$\vec{b}_i = \frac{\vec{a}_j\times\vec{a}_k}{\vec{a}_i\cdot(\vec{a}_j\times\vec{a}_k)}$$

Des Weiteren liegen nach Voraussetzung die Vektoren a_i nicht in einer Ebene. Wir betrachten nun das folgende Produkt mit $i\neq j$

$$\vec{a}_j\times\vec{b}_i = \frac{\vec{a}_j(\vec{a}_j\times\vec{a}_k)}{\vec{a}_i\cdot(\vec{a}_j\times\vec{a}_k)}$$

Nun wissen wir aber, dass $\vec{a}_j\times\vec{a}_k$ senkrecht auf $\vec{a}_j$ steht. Somit ist das Skalarprodukt von $\vec{a}_j\times\vec{a}_k$ mit $\vec{a}_j$ Null. Sei also nun $i=j$. Dann gilt

$$\vec{a}_i\times\vec{b}_i = \frac{\vec{a}_i\cdot(\vec{a}_j\times\vec{a}_k)}{\vec{a}_i\cdot(\vec{a}_j\times\vec{a}_k)} = 1\,,\ \text{da die Vektoren linear unabhängig sind}$$

ii) Im folgenden werden wir die Vektorpfeile nicht mitschreiben. Wir betrachten das Produkt

$$b_1 \cdot (b_2 \times b_3) = \frac{(a_2 \times a_3)[a_1(a_2(a_3 \times a_1)) - a_2(a_1(a_3 \times a_1))]}{v^3}$$

Wir betrachten den Ausdruck $a_2(a_1(a_3 \times a_1))$. Dieser ist Null, da das Produkt von a_3 und a_1 senkrecht auf a_1 steht und somit das Skalarprodukt von a_1 mit diesem Vektor verschwindet. Des Weiteren können wir $(a_2(a_3 \times a_1))$ als Volumen interpretieren. Damit folgt

$$\frac{((a_2 \times a_3)a_1)v}{v^3}$$

Auch hier können wir $(a_2 \times a_3)a_1$ als Volumen interpretieren. Damit gilt

$$\frac{((a_2 \times a_3)a_1)v}{v^3} = \frac{v^2}{v^3} = \frac{1}{v}$$

c) Wir wählen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Dann gilt

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\vec{e}_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$$

Da $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bildet ist $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$.
Also ist

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1$$

Alle anderen laufen analog.